

УДК 539.3

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ<sup>1)</sup>****Л.У. СУЛТАНОВ, Л.Р. ФАХРУТДИНОВ***Казанский (Приволжский) федеральный университет  
E-mail: Lenar.Sultanov@kpfu.ru; bishchumbek@gmail.com***ALGORITHM FOR SOLVING PROBLEMS OF LARGE DEFORMATIONS OF HYPERELASTIC SOLIDS****L.U. SULTANOV, L.R. FAKHRUTDINOV***Kazan Federal University***Аннотация**

В работе описана методика исследования трехмерных тел из гиперупругих материалов с использованием меры деформации Фингера. Дается кинематика движения среды, напряженное состояние описывается тензором истинных напряжений Коши. Рассмотрен пример получения линеаризованных физических соотношений в напряжениях Коши. Численная реализация основана на методе конечных элементов в рамках инкрементального метода

**Ключевые слова:** гиперупругие материалы, конечные деформации, метод конечных элементов, резиноподобные материалы

**Summary**

In the present paper the technique of investigation of large deformations using the Finger strain measure is considered. The kinematics of motion of continua is given; the stress state is described by the Cauchy tensor of the true stresses. Also there is an example of obtaining the linearized physical ratio in the Cauchy stresses. The numerical implementation is based on the finite element method within the framework of incremental methods.

**Key words:** hyperelastic materials, finite deformations, finite element analysis, rubbery materials.

**Введение**

К гиперупругим материалам относят различные эластомеры, и другие подобные полимеры, отличительной особенностью которых является то, что они допускают большие деформации, сохраняя при этом упругие свойства. С точки зрения МДТТ речь идет о нелинейно упругих телах, при деформировании которых необходимо учитывать геометрическую нелинейность в рамках больших деформаций. Подобного рода проблемы рассматриваются во многих статьях и обобщены в ряде монографий, среди которых можно выделить работы [1–9]. В них приводится обширная библиография по данному вопросу и изложены основные положения по построению определяющих соотношений, и в данной статье этот материал активно используется. Из числа журнальных публикаций можно отметить статьи [10–17], посвященные гиперупругим материалам, в которых также рассматриваются различные варианты построения определяющих соотношений для определенных типов материалов и приводятся примеры решения задач. Методика, описанная здесь, в идейном плане близка к методам, использованным в работах [15–17]. Соотношения приводятся в наиболее компактной форме прямого тензорного исчисления. Для подробного ознакомления с методами и технологией работы с такой формой записи можно обратиться к работам [1, 3, 5].

<sup>1)</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-97058, 13-01-97059, 12-01-00955, 12-01-97026)

### 1. Кинематика среды

В глобальной неподвижной системе координат с ортами  $\vec{e}_i$ , рассмотрим положения исследуемого деформируемого тела:  $\vec{r}(\xi^j) = x^i(\xi^j) \vec{e}_i$  – радиус-вектор материальной частицы в недеформированном состоянии;  $\vec{R}(\xi^j) = y^i(\xi^j) \vec{e}_i$  – радиус-вектор материальной частицы в деформированном состоянии;  $\vec{u}(\xi^j) = \vec{R}(\xi^j) - \vec{r}(\xi^j) = u^i(\xi^j) \vec{e}_i$  – вектор перемещения;  $\vec{v}(\xi^j) = \dot{\vec{R}}(\xi^j) = \dot{y}^i(\xi^j) \vec{e}_i = v^i(\xi^j) \vec{e}_i$  – вектор скорости.

Базовым тензором, играющим ключевую роль в кинематике конечных деформаций, является тензор градиента деформаций:

$$(F) = \left( \vec{\nabla}_x \vec{R} \right)^T = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} (\vec{e}_i \vec{e}_j).$$

В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации используются: левый тензор Коши–Грина (мера деформации Фингера)  $(B) = (F) \cdot (F)^T$ ; тензор пространственного градиента скорости  $(h) = (\dot{F}) \cdot (F^{-1})$ ; тензор деформации скорости

$$(d) = \frac{1}{2} [(h) + (h)^T] = \frac{1}{2} \left[ (\dot{F}) \cdot (F^{-1}) + (F^{-1})^T \cdot (\dot{F})^T \right].$$

### 2. Определяющие соотношения.

Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений  $(\Sigma) = \sigma_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$ , определенного в актуальном состоянии. В качестве аргументов функции потенциальной энергии деформации примем компоненты тензора меры деформации Фингера, т.е. :  $W = W(B_{ij})$ , также вводятся в рассмотрение меры деформации, которые не сопровождаются изменением объема:

$$(\hat{B}) = J^{-2/3}(B).$$

Здесь  $J = dV/dV_0$  – относительное изменение объема. Имеем  $W = W_0(J) + W'(I_{1\hat{B}}, I_{2\hat{B}})$ . Тогда тензор напряжений Коши–Эйлера будет выражаться в следующем виде:

$$(\Sigma) = \frac{2}{J}(B) \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial B} \right).$$

Скорости изменения напряжений Коши – Эйлера:

$$(\dot{\Sigma}) = (\Lambda_\Sigma) \cdot \cdot (d) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - (\Sigma) I_{1d},$$

где введено обозначение  $(\Lambda_\Sigma) = \frac{4}{J}(B) \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial B \partial B} \right) \cdot (B)$ .

В результате получаем физическое соотношение для производной Трусделла в виде линейного уравнения:

$$(\Sigma^{Tr}) = (\dot{\Sigma}) - (h) \cdot (\Sigma) - (\Sigma) \cdot (h)^T + I_{1d}(\Sigma) = (\Lambda_\Sigma) \cdot \cdot (d).$$

Таким образом, для гиперупругого тела определяющие соотношения для скоростей имеет вид линейной зависимости при использовании обобщенной производной Трусделла для тензора истинных напряжений Коши – Эйлера (тензор индифферентный) и тензора деформации скорости (тоже тензор индифферентный).

### 3. Алгоритм решения.

Для решения задачи используется метод последовательных нагружений. Считается, что известно  $k$ -е состояние, по которому нужно найти  $(k+1)$ -е состояние. В качестве базового уравнения используется уравнение виртуальных мощностей, записанного для  $(k+1)$  шага:

$$\iiint_{V_{k+1}} ({}^{k+1}\Sigma) \cdot \cdot ({}^{\delta k+1}d) dV = \iiint_{V_{k+1}} {}^{k+1}\vec{f} \cdot \delta \vec{v} dV + \iint_{S_{k+1}^\sigma} {}^{k+1}\vec{t}_n \cdot \delta \vec{v} dS,$$

где  $V_{k+1}$  – текущий объем;  $S_{k+1}^\sigma$  – часть его поверхности, на которой заданы усилия,  $\vec{f}$ ,  $\vec{t}_n$  – векторы массовых и поверхностных сил. Переходя к приращениям, получим разрешающее уравнение, из которого найдем вектор перемещений для текущего шага

$$\Delta^k \vec{u} = \Delta^k x_i \vec{e}_i,$$

который определяет следующую конфигурацию:

$${}^{k+1} \vec{R} = {}^k \vec{R} + \Delta \vec{u}.$$

Тогда напряженное состояние находится по соотношению:

$$({}^{k+1} \Sigma) = \frac{2}{J} ({}^{k+1} B) \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial {}^{k+1} B} \right).$$

Рассмотрен пример построения физических соотношений для материала, заданного потенциалом упругих деформаций:

$$W = U_1(I_{1\hat{B}} - 3) + U_2(I_{2\hat{B}} - 3) + \frac{K}{2}(J - 1)^2,$$

где  $W_0(J) = \frac{K}{2}(J - 1)^2$ ,  $W'(I_{1\hat{B}}, I_{2\hat{B}}) = U_1(I_{1\hat{B}} - 3) + U_2(I_{2\hat{B}} - 3)$ ,  $U_1, U_2$  – постоянные материала.

Тензор напряжений Коши-Эйлера для этого материала имеет вид:

$$(\Sigma) = 2U_1 J^{-\frac{5}{3}} \left[ (B) - \frac{1}{3} I_{1B} (I) \right] + 2U_2 J^{-\frac{7}{3}} \left[ I_{1B} (B) - \frac{1}{3} I_{1B}^2 (I) - \frac{2}{3} (B^2) \right] + K (J - 1) (I).$$

Линеаризуя полученное соотношение, получим выражение для скорости изменения напряжений Коши-Эйлера:

$$(\Delta \Sigma) = (\Lambda_\Sigma) \cdot \cdot (d) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - (\Sigma) I_{1d},$$

где

$$(\Lambda_\Sigma) = (\Lambda_{\Sigma'}) + (\Lambda_{\sigma_0}), \quad \Lambda_{\Sigma'} = \frac{4}{J} (B) \cdot \left( \frac{\partial^2 W'}{\partial B \partial B} \right), \quad \Lambda_{\sigma_0} = \frac{4}{J} (B) \cdot \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial B \partial B} \right).$$

Таким образом, получена система уравнений для определения напряженного состояния, которая может быть дискретизирована методом конечных элементов для получения численных решений.

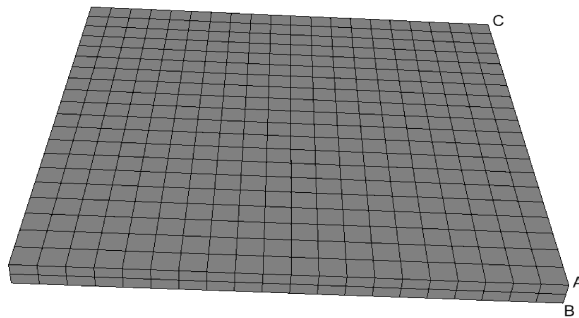


Рис. 1: Конечно-элементная модель плиты

#### 4. Численный пример.

Для проверки работоспособности методики был решен ряд задач, рассмотрим одну из них: Задача об упругом деформировании плиты под действием равномерного давления  $q = 85$  МПа. Верхнее ребро плиты

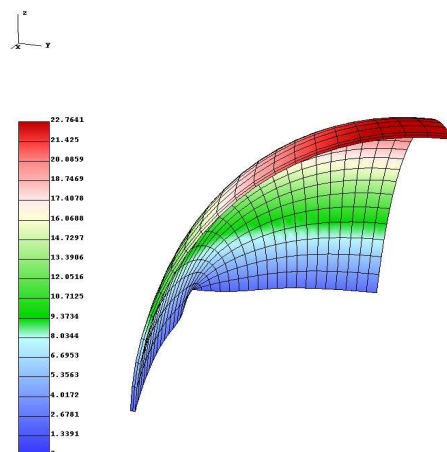


Рис. 2: Поле вертикальных перемещений плиты

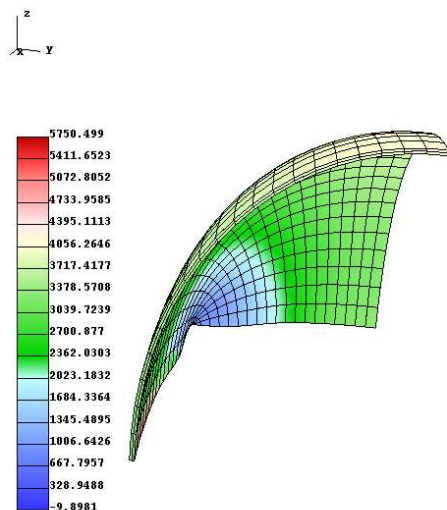


Рис. 3: Поле касательных напряжений плиты

не имеет вертикального смещения. Плита – квадратная со стороной  $a = 0.02$  м и толщиной  $h = 0.01$  м.  $K = 2000$  GPa. На рис. 1 изображено недеформированное состояние плиты. На рис. 2, 3 изображено поле вертикальных перемещений и поле касательных напряжений.

Таким образом, была построена методика численного исследования гиперупругих слабосжимаемых материалов с использованием меры деформации Фингера, для которых физические соотношения задаются с помощью упругого потенциала. Получены линейризованные определяющие соотношения и разрешающее уравнение для потенциала Муни – Ривлина. Численная реализация основана на методе конечных элементов на базе восьмиузлового полилинейного элемента. Решенные задачи демонстрируют работоспособность полученной методики исследования нелинейно упругих задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. — 465 с.
2. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М.: Мир, 1976. — 464 с.
3. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. — Л.: Машиностроение, 1986. — 336 с.
4. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. — М.: Мир, 1965. — 455 с.
5. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. — Новосибирск, 2000. — 262 с.
6. Трудселл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 592 с.
7. Елисеев В.В. Механика упругих тел. — С.-Петербург, СПбГТУ, 1999. — 341 с.
8. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. — Cambridge University Press, 1997. — 283 p.
9. Голованов А.И., Султанов Л.У. Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. — Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2008. — 165 с.
10. Голованов А.И., Султанов Л.У. Исследование закритического упругопластического состояния трехмерных тел с учетом конечных деформаций // Известия вузов. Авиационная техника. — 2008. — № 4. — С. 13–16.
11. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. — 2008. — Т. 150, Кн 1. — С. 29–37.
12. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. — 2008. — Т. 150, Кн 3. — С. 122–132.
13. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел III. Постановки задачи и алгоритмы решения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. — 2009. — Т. 151, Кн 3. — С. 108–120.
14. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел IV. Конечнoэлементная реализация. Примеры решения задач // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. — 2010. — Т. 152, Кн 4. — С. 115–126.
15. Давыдов Р.Л., Султанов Л.У. Численный алгоритм решения задачи о больших упругопластических деформациях МКЭ // Вестник ПНИПУ. Механика. — Пермь: Изд-во ПНИПУ — 2013. — № 1. — С. 81–93.
16. Султанов Л.У. Давыдов Р.Л. Численное исследование больших деформаций методом конечных элементов // Инженерно-строительный журнал. — Санкт-Петербург: СПбГУ. — 2013. — № 9(44). — С. 64–68.
17. Golovanov A.I., Sultanov L.U. Numerical investigation of large elastoplastic strains of three-dimensional bodies // International Applied Mechanics. — 2005. — V. 41, № 6. — P. 614–620.

## REFERENCES

1. Golovanov A.I., Sultanov L.U. Mathematical models of computational nonlinear mechanics of deformable medium [Matematicheskiye modeli vychislitel'noy nelineynoy mekhaniki deformiruyemykh sred]. — Kazan: KSU, 2009. — 465 p. (in Russian)
2. Oden J.T. Finite elements of nonlinear continua. — New York: McGraw-Hill, 1972.

3. **Chernykh K.F.** Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations [Nelineynaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh raschetakh]. – St. Petersburg: Mashinostroyeniye, 1986. – 336 p. (in Russian)
4. **Green A., and Adkins J.E.** Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics. – Oxford: Clarendon Press, 1960.
5. **Korobeynikov S.N.** Nonlinear deformation of solids [Nelineynoye deformirovaniye tverdykh tel]. – Novosibirsk, 2000. – 262 p. (in Russian)
6. **Truesdell C.** Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechanics. – New York: Academic Press, 1977.
7. **Yeliseyev V.V.** Mechanics of elastic bodies [Mekhanika uprugikh tel]. – S.-Peterburg: SPbGTU, 1999. – 341 p. (in Russian)
8. **Bonet J., Wood R.D.** Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. – Cambridge University Press, 1997. – 283 p.
9. **Golovanov A.I., Sultanov L.U.** Theoretical Foundations of Computational Nonlinear Mechanics of Deformable Medium [Teoreticheskiye osnovy vychislitel'noy nelineynoy mekhaniki deformiruyemykh sred]. – Kazan: KSU, 2008. – 165 p. (in Russian)
10. **Golovanov A.I., Sultanov L.U.** Postbuckling elastoplastic state analysis of three-dimensional bodies taking into account finite strains // Russian Aeronautics. – 2008. – V. 51 – № 4. – P. 362–368.
11. **Golovanov A.I., Konoplev YU.G., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large deformations of hyperelastic solids. I. Kinematics and variational equations [Chislennoye issledovaniye konechnykh deformatsiy giperuprugikh tel. I. Kinematika i variatsionnyye uravneniya] // Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki. – 2008. – V. 150, Book 1. – P. 29–37. (in Russian)
12. **Golovanov A.I., Konoplev YU.G., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large deformations of hyperelastic solids. II. Stress-strain relationships [Chislennoye issledovaniye konechnykh deformatsiy giperuprugikh tel. II. Fizicheskiye sootnosheniya ] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki. – 2008. – Vol. 150, Book 3. – P. 122–132. (in Russian)
13. **Golovanov A.I., Konoplev YU.G., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large deformations of hyperelastic solids. III. Statements of Problem and Solution Algorithms [Chislennoye issledovaniye konechnykh deformatsiy giperuprugikh tel III. Postanovki zadachi i algoritmy resheniya] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki. – 2009. – Vol. 151, Book 3. – P. 108–120. (in Russian)
14. **Golovanov A.I., Konoplev YU.G., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large deformations of hyperelastic solids. IV. Finite Element Realization [Chislennoye issledovaniye konechnykh deformatsiy giperuprugikh tel IV. Konechnoelementnaya realizatsiya. Primery resheniya zadach] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki. – 2010. – Vol. 152, Book 4. – P. 115–126. (in Russian)
15. **Davydov R.L., Sultanov L.U.** Numerical algorithm of solving the problem of large elastic-plastic deformation by FEM // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2013. – № 1. – P. 81–93.
16. **Sultanov L.U., Davydov R.L.** Numerical analysis of large deformation by finite element method [Chislennoye issledovaniye bol'shikh deformatsiy metodom konechnykh elementov] // Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal. – St.Petersburg: SPbGU. – 2013. – № 9(44). – P. 64–68. (in Russian)
17. **Golovanov A.I., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large elastoplastic strains of three-dimensional bodies // International Applied Mechanics. – 2005. – V. 41. – № 6. – P. 614–620.
18. **Golovanov A.I., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large elastoplastic strains of three-dimensional bodies // Prikladnaya Mekhanika. – 2005. – V. 41. – № 6. – P. 36–43.
19. **Sultanov L.U., Davydov R.L.** Mathematical modeling of large elastic-plastic deformations // Applied Mathematical Sciences. – V. 8, № 57-60. – 2014. – P. 2991–2996.