

УДК 519.624.8

НЕПРЕРЫВНЫЙ МЕТОД ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СМЕШАННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.П. РЯЗАНЦЕВА

*Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева**E-mail: lryazantseva@applmath.ru*

CONTINUOUS SECOND-ORDER METHOD FOR MIXED VARIATIONAL INEQUALITIES IN HILBERT SPACE

I.P. RYAZANTSEVA

Nizhny Novgorod State Technical R.E. Alekseev University, Nizhny Novgorod

Аннотация

В вещественном гильбертовом пространстве для смешанных вариационных неравенств с непрерывным обратным сильно монотонным оператором и сильно выпуклым полунепрерывным снизу недифференцируемым функционалом построен непрерывный метод второго порядка, доказана сильная сходимость метода при любых начальных условиях к единственному решению задачи.

Ключевые слова: Обратно сильно монотонный оператор, сильно выпуклый полунепрерывный снизу недифференцируемый функционал, субдифференциал, резольвента, смешанное вариационное неравенство.

Summary

In real Hilbert space for mixed variational inequalities with continuous inversely strongly monotone operator and strongly convex lower semicontinuous nondifferentiable functional second-order continuous method are constructed. Strong convergence of the method for any initial conditions is proved to unique solution of the problem.

Key words: Inversely strongly monotone operator, strongly convex lower semicontinuous nondifferentiable functional, subdifferential, resolvent, mixed variational inequality.

Пусть H — вещественное гильбертово пространство, (u, v) — скалярное произведение элементов u и v из H , Ω — выпуклое замкнутое множество в H , $\text{int}\Omega \neq \emptyset$, и

(а) $A : H \rightarrow H$ — непрерывный обратным сильно монотонный оператор, т.е.

$$(Au - Av, u - v) \geq m\|Au - Av\|^2 \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in H, \quad m > 0; \quad (1)$$

(б) $\varphi : H \rightarrow R$ — сильно выпуклый полунепрерывный снизу функционал, т.е. имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \varphi(\eta u + (1 - \eta)v) &\leq \eta\varphi(u) + (1 - \eta)\varphi(v) - \\ &- M\eta(1 - \eta)\|u - v\|^2 \quad \forall \eta \in (0, 1), \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in H, \quad M > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

при этом дифференцируемость φ не предполагается.

Рассмотрим в H смешанное вариационное неравенство

$$(Ax - f, x - y) + \varphi(x) - \varphi(y) \leq 0, \quad x \in \Omega \quad \forall y \in \Omega. \quad (3)$$

К решению (3) сводится целый ряд задач естествознания (см., например, [1–4]). Построению методов решения (3) посвящены многочисленные работы. Укажем, например, [4–9]. В данной работе для решения (3) предлагается непрерывный метод второго порядка. Непрерывные методы первого порядка для смешанных вариационных неравенств изучались в [10]. Интерес к непрерывным методам вызван наличием мощного пакета программ для численного решения дифференциальных уравнений, а также возможностью учесть в начальных условиях априорную информацию о искомом решении.

Построим смешанное вариационное неравенство следующего вида

$$(Ax - f, x - y) + \varphi(x) + \chi_{\Omega}(x) - \varphi(y) - \chi_{\Omega}(y) \leq 0, \quad x \in H \quad \forall y \in H, \quad (4)$$

где $\chi_{\Omega} : H \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ – индикаторная функция множества Ω . Эквивалентность (3) и (4) легко устанавливается (см. [3, с.243]). В наших предположениях существует многозначный оператор $\partial\Phi : H \rightarrow 2^H$ – субдифференциал функционала $\Phi = \varphi + \chi_{\Omega}$ (см. [11, с.43]). Поскольку включение $g \in \partial\Phi(v)$ эквивалентно неравенству (см. [11, с.37])

$$\Phi(u) - \Phi(v) \geq (g, u - v) \quad \forall u \in H, \quad (5)$$

то смешанное вариационное неравенство (4) эквивалентно включению $f - Ax \in \partial\Phi(x)$. Следовательно, смешанное вариационное неравенство (3) эквивалентно уравнению

$$Ax + \partial\Phi(x) = f \quad (6)$$

в общем случае с многозначным максимальным монотонным оператором $A + \partial\Phi$ (см. [11, с.114, 120]), причем $D(\partial\Phi) = \Omega$. Пусть $I^{\gamma} = (\gamma\partial\Phi + E)^{-1}$ – резольвента оператора $\partial\Phi$, где $E : H \rightarrow H$ – единичный оператор, γ – положительная постоянная. Известно (см. [11, с.152]), что оператор $I^{\gamma} : H \rightarrow H$ является однозначным монотонным и нестягивающим. Значит, от (6) можем перейти к эквивалентному уравнению

$$x = I^{\gamma}(\gamma(f - Ax) + x) \quad (7)$$

с однозначными операторами A и I^{γ} .

Для уравнения с многозначным оператором разрешимость задачи Коши, определяющей непрерывный метод, в классе функций $C^k[t_0, +\infty)$, $k \geq 1$ установить не удастся. Переход от (6) к эквивалентному уравнению (7) снимает указанную проблему.

Непрерывный метод второго порядка для (7) определим следующей задачей Коши:

$$u'' + \mu u'(t) + u(t) - I^{\gamma}(u(t) - \gamma[Au(t) - f]) = 0, \quad \mu > 0, \quad (8)$$

$$u(t_0) = u_0 \in H, \quad u'(t_0) = u'_0 \in H, \quad t \geq t_0 \geq 0. \quad (9)$$

Поскольку $R(I^{\gamma(t)}) = \Omega$, то из (8) вытекает включение $\xi(t) = u'' + \mu u'(t) + u(t) \in \Omega$.

Отметим, что из (1) следует справедливость условия Липшица для оператора A (см. [12, с.175])

$$\|Au - Av\| \leq \tilde{m}\|u - v\|, \quad \tilde{m} = 1/m. \quad (10)$$

Поскольку I^{γ} есть нестягивающий оператор, и справедливо неравенства (10), то результаты [13, с.399 – 401] позволяют установить однозначную разрешимость задачи (8), (9) в $C^2[t_0, +\infty)$.

Так как из (2) следует сильная монотонность оператора $\partial\varphi : H \rightarrow 2^H$ (см. [12, с.53]), а из (1) вытекает монотонность A , то в наших предположениях уравнение (6), а значит, и смешанное вариационное неравенство (3) имеют единственное решение x .

Перейдем от (8) к эквивалентному смешанному вариационному неравенству. В силу определения оператора I^{γ} из (8) имеем

$$\gamma\partial\Phi(\xi(t)) + \xi(t) = u(t) - \gamma[Au(t) - f].$$

Следовательно,

$$u''(t) + \mu u'(t) + \gamma\partial\Phi(\xi(t)) = \gamma[f - Au(t)].$$

Теперь, используя (5), от последнего уравнения приходим к эквивалентному смешанному вариационному неравенству следующего вида:

$$(u''(t) + \mu u'(t) + \gamma[Au(t) - f], \xi(t) - y) + \gamma[\varphi(\xi(t)) - \varphi(y)] \leq 0, \quad \xi(t) \in \Omega \quad \forall y \in \Omega. \quad (11)$$

Исследуем поведение $u(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Для этого умножим (3) при $y = \xi(t)$ на $\gamma(1 - \eta)$, $\eta \in (0, 1)$, а в (11) примем $y = \eta\xi(t) + (1 - \eta)x$. Сложив полученные результаты и учитывая (2), после сокращения на $1 - \eta$ и перехода к пределу при $\eta \rightarrow 1 - 0$ получим неравенство

$$(u''(t) + \mu u'(t), \xi(t) - x) + \gamma[(Au(t) - Ax, \xi(t) - x) + M\|\xi(t) - x\|^2] \leq 0. \quad (12)$$

Определим функцию

$$r(t) = \|u(t) - x\|^2/2, \quad (13)$$

тогда

$$r'(t) = (u'(t), u(t) - x), \quad r''(t) = (u''(t), u(t) - x) + \|u'(t)\|^2. \quad (14)$$

Очевидны равенства

$$\begin{aligned} \|\xi(t) - x\|^2 &= \|u''(t) + \mu u'(t) + u(t) - x\|^2 = \|u''(t) + \mu u'(t)\|^2 + \\ &+ 2r(t) + 2\mu r'(t) + 2r''(t) - 2\|u'(t)\|^2; \end{aligned} \quad (15)$$

$$(u''(t) + \mu u'(t), \xi(t) - x) = \|u''(t) + \mu u'(t)\|^2 + \mu r'(t) + r''(t) - \|u'(t)\|^2. \quad (16)$$

Кроме того, пользуясь неравенством

$$(Av - Az, z - w) \leq \lambda \|v - w\|^2 \quad \forall z, v, w \in H, \quad \lambda = \frac{1}{4m}, \quad (17)$$

вытекающим из (1) (см. [12, с.175]), имеем

$$(Au(t) - Ax, \xi(t) - x) \geq -\lambda \|u''(t) + \mu u'(t)\|^2. \quad (18)$$

Легко проверить справедливость равенства

$$\|u''(t) + \mu u'(t)\|^2 = \|u''(t)\|^2 + \mu \frac{d(\|u'(t)\|^2)}{dt} + \mu^2 \|u'(t)\|^2. \quad (19)$$

Теперь, приняв во внимание (13) – (19), из (12) получаем неравенство

$$\begin{aligned} [1 + \gamma(M - \lambda)]\|u''(t)\|^2 + [\mu^2(1 + \gamma(M - \lambda)) - 1 - 2M\gamma]\|u'(t)\|^2 + \\ + \mu[1 + \gamma(M - \lambda)]\frac{d(\|u'(t)\|^2)}{dt} + [1 + 2M\gamma]r''(t) + \\ + \mu[1 + 2M\gamma]r'(t) + 2M\gamma r(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть выполнены условия:

$$1 + \gamma(M - \lambda) = a_0 > 0, \quad (21)$$

$$\mu > \max \left\{ 1, \frac{a_1}{2a_0}, \sqrt{\frac{a_1}{a_0}} \right\}, \quad a_1 = 1 + 2M\gamma, \quad (22)$$

тогда $a_2 = \mu^2 a_0 - a_1 > 0$.

Отбросив последнее слагаемое в левой части (20), придем к неравенству

$$a_0 \|u''(t)\|^2 + a_2 \|u'(t)\|^2 + \mu a_0 \frac{d(\|u'(t)\|^2)}{dt} + a_1 r''(t) + \mu a_1 r'(t) \leq 0. \quad (23)$$

Проинтегрировав (23) на $[t_0, t]$, имеем

$$a_0 \int_{t_0}^t \|u''(t)\|^2 dt + a_2 \int_{t_0}^t \|u'(t)\|^2 dt + \mu a_0 \|u'(t)\|^2 + a_1 r'(t) + \mu a_1 r(t) \leq c_1, \quad (24)$$

где c_1 — положительная постоянная, зависящая от начальных условий (9).

Далее все величины c_k будем считать положительными постоянными.

Так как (см. (14))

$$|r'(t)| \leq \|u'(t)\|^2/2 + r(t), \quad (25)$$

то от (24) приходим к неравенству

$$\tilde{a}_0 \int_{t_0}^t \|u''(t)\|^2 dt + \tilde{a}_2 \int_{t_0}^t \|u'(t)\|^2 dt + (\mu \tilde{a}_0 - 1/2) \|u'(t)\|^2 + (\mu - 1)r(t) \leq c_2, \quad (26)$$

здесь $\tilde{a}_0 = a_0/a_1$, $\tilde{a}_2 = a_2/a_1$, $c_2 = c_1/a_1$. Согласно (22), из (26) вытекает сходимость несобственных интегралов

$$\int_{t_0}^{\infty} \|u''(t)\|^2 dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} \|u'(t)\|^2 dt.$$

Отсюда следует существование последовательности $\{t_k\}$ такой, что

$$t_k \rightarrow +\infty, \quad u'(t_k) \rightarrow 0, \quad u''(t_k) \rightarrow 0, \quad t_k \geq t_0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Предположения (21), (22) и неравенство (26) обеспечивают ограниченность $u(t)$ и $u'(t)$ на $[t_0, \infty)$. Полагая в (20) $t = t_k$ и переходя в полученном неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, с учетом (13), (14), (21), (22), (27) и ограниченности $u(t)$ на $[t_0, +\infty)$ заключаем, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} r(t_k) = 0. \quad (28)$$

При наших условиях (21), (22) из (20) вытекает неравенство

$$\mu a_0 \frac{d(\|u'(t)\|^2)}{dt} + a_1[r''(t) + \mu r'(t)] \leq 0.$$

Проинтегрировав это неравенство на $[t_k, t]$, $t \in (t_k, t_{k+1})$, получаем, что

$$\mu a_0 \|u'(t)\|^2 + a_1[r'(t) + \mu r(t)] \leq \mu a_0 \|u'(t_k)\|^2 + a_1[r'(t_k) + \mu r(t_k)].$$

Используя (25) при $t \in (t_k, t_{k+1})$ и $t = t_k$, из последнего неравенства имеем

$$\left(\mu a_0 - \frac{a_1}{2}\right) \|u'(t)\|^2 + a_1(\mu - 1)r(t) \leq \left(\mu a_0 + \frac{a_1}{2}\right) \|u'(t_k)\|^2 + a_1(\mu + 1)r(t_k). \quad (29)$$

В силу (22) первое слагаемое в левой части (29) можно опустить, поэтому справедлива оценка

$$r(t) \leq \frac{2\mu a_0 + a_1}{2a_1(\mu - 1)} \|u'(t_k)\|^2 + \frac{\mu + 1}{\mu - 1} r(t_k).$$

Тем самым, согласно (27) и (28), доказано, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Пусть H — вещественное гильбертово пространство, Ω — выпуклое замкнутое множество в H , $\text{int } \Omega \neq \emptyset$, оператор $A : H \rightarrow H$ и функционал $\varphi : H \rightarrow R$ обладают свойствами а), б) соответственно, $\gamma > 0$, и справедливы условия (21), (22). Тогда задача Коши (8), (9) имеет единственное решение $u(t)$ класса $C^2[t_0, +\infty)$, и $u(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ стабилизируется по норме H к единственному решению x смешанного вариационного неравенства (3) при любых элементах u_0 и u'_0 из H .

Замечание 1. В условиях теоремы из (29) с учетом (22), (27), (28) заключаем, что $u'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Из (7) и (8), приняв во внимание нерастяжимость Γ^γ и (10), имеем

$$\begin{aligned} \|u''(t) + \mu u'(t)\| &\leq \|\Gamma^\gamma(u(t) - \gamma[Au(t) - f]) - \Gamma^\gamma(x - \gamma[Ax - f])\| + \\ &+ \|u(t) - x\| \leq (2 + \gamma\tilde{m})\|u(t) - x\|. \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку установлено, что $u(t) \rightarrow x$, $u'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то теперь из (30) имеем сходимость $u''(t)$ к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, в условиях теоремы доказано, что $u'(t) \rightarrow 0$, $u''(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Замечание 2. Укажем способ построения оценки сверху для $\|u(t) - x\|$. Из (8) вычтем (7), результат умножим скалярно на $u'(t)$, и приняв во внимание (30) и равенство $(u''(t), u'(t)) = \|u'(t)\| d\|u'(t)\|/dt$, получим дифференциальное неравенство

$$\frac{d\|u'(t)\|}{dt} + \mu\|u'(t)\| \leq \tilde{\gamma}\|u(t) - x\|, \quad \tilde{\gamma} = 2 + \gamma\tilde{m}.$$

Теперь по лемме из [14, с.264] с учетом второго начального условия из (9) приходим к следующей оценке

$$\|u'(t)\| \leq \|u'_0\| \exp[-\mu(t - t_0)] + \tilde{\gamma} \exp(-\mu t) \int_{t_0}^t \|u(s) - x\| \exp(\mu s) ds, \quad t \geq t_0. \quad (31)$$

Поскольку при $t \rightarrow +\infty$

$$\exp(-\mu t) \int_{t_0}^t \|u(s) - x\| \exp(\mu s) ds \sim \frac{\|u(t) - x\|}{\mu},$$

то из (31) имеем

$$\|u'(t)\| \leq \|u'_0\| \exp[-\mu(t - t_0)] + \frac{\tilde{\gamma}\omega}{\mu} \|u(t) - x\|, \quad \omega > 1. \quad (32)$$

Далее, из (12), не раскрывая $\|u''(t) + \mu u'(t)\|^2$, получим неравенство

$$a_0\|u''(t) + \mu u'(t)\|^2 + a_1 r''(t) + a_1 \mu r'(t) + 2M\gamma r(t) \leq a_1\|u'(t)\|^2.$$

Приняв во внимание (32) и отбросив первое слагаемое в левой части, отсюда выводим неравенство $r''(t) + \mu r'(t) + \tilde{a}_3 r(t) \leq \tilde{a}_4 \exp(-2\mu t)$; здесь $\tilde{a}_3 = 2[M\gamma/a_1 - a_4(a_4 + a_3)]$, $\tilde{a}_4 = a_3(a_3 + a_4)$, $a_3 = \|u'_0\| \exp(\mu t_0)$, $a_4 = \tilde{\gamma}\omega/\mu$. Используя [15], п.24.3 и последнее неравенство, можно получить оценку скорости сходимости непрерывного метода (8), (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 588 с.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. — М.: Мир, 1980.
3. Байокки К., Капелло А. Вариационные и квазивариационные неравенства Приложения к задачам со свободной границей. — М.: Наука, 1988. — 448 с.
4. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Изв. вузов. Математика. — 2003. — № 1. — С. 20–28.
5. Коннов И.В. Комбинированный релаксационный метод для обобщенных вариационных неравенств // Изв. вузов. Математика. — 2001. — № 12. — С. 46–54.
6. Коннов И.В., Пинягина О.В. Метод спуска по интервальной функции для негладких задач равновесия // Изв. вузов. Математика. — 2003. — № 12. — С. 71–77.

7. **Коннов И.В., Пинягина О.В.** Метод спуска с неточным линейным поиском для негладких равновесных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, № 10. — С. 1812–1818.
8. **Noor M.A., Rassias T.M.** Resolvent equations for set-valued mixed variational inequalities // Nonlinear Analysis. — 2000. — V. 42, № 1. — P. 71–83.
9. **Alber Ya., Ryazantseva I.** Nonlinear ill-posed problems of monotone type. — Dordrecht: Springer, 2006.
10. **Рязанцева И.П.** О непрерывных методах первого порядка и их регуляризованных вариантах для смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 7. — С. 1020–1032.
11. **Рязанцева И.П.** О Избранные главы теории операторов монотонного типа. — Нижний Новгород: НГТУ, 2008.
12. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988.
13. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. — М.: Наука, 1988.
14. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
15. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — СПб., 2003.

REFERENCES

1. **Lions J.-L.** Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. — Paris: Dunod, 1969. — 554 p.
2. **Duvaut G., Lions J.-L.** Les inéquations en mécanique et en physique. — Paris: Dunod, 1972.
3. **Baiocchi C., Capelo A.** Variational and Quasivariational Inequalities. Applications to Free Boundary Problems. — New York: John Wiley & Sons, 1984.
4. **Badriev I.B. and Zadvornov O.A.** Iterative methods for solving variational inequalities of the second kind with inversely strongly monotone operators // Russian Mathematics. — 2003. — V. 47, № 1. — P. 18–26.
5. **Konnov I.V.** A combined relaxation method for generalized variational inequalities // Russian Mathematics. — 2001. — V. 45, № 12. — P. 43–51.
6. **Konnov I.V. and Pinyagina O.V.** The method of descent over an interval function for nonsmooth equilibrium problems // Russian Mathematics. — 2001. — V. 47, № 11. — P. 67–73.
7. **Konnov I.V. and Pinyagina O.V.** A descent method with inexact linear search for nonsmooth equilibrium problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2008. — V. 48, № 10. — P. 1777–1783.
8. **Noor M.A., Rassias T.M.** Resolvent equations for set-valued mixed variational inequalities // Nonlinear Analysis. — 2000. — V. 42, № 1. — P. 71–83.
9. **Alber Ya., Ryazantseva I.** Nonlinear ill-posed problems of monotone type. — Dordrecht: Springer, 2006.
10. **Ryazantseva I.P.** On continuous first-order methods and their regularized versions for mixed variational inequalities // Differential Equations. — 2012. — V. 48, № 7. — P. 1005–1017.
11. **Ryazantseva I.P.** Selected Topics of the Theory of Operators of Monotone Type [Izbrannye glavy teorii operatorov monotonnogo tipa]. — Nizhni Novgorod: NGTU, 2008. (in Russian)
12. **Vasil'ev F.P.** Numerical Methods for Solving Extremal Problems [Chislennyye metody resheniya ekstremal'nykh zadach]. — Moscow: Nauka, 1988. (in Russian)
13. **Trenogin V.A.** Functional Analysis [Functional'nyi analiz]. — Moscow: Nauka, 1988. (in Russian)
14. **Vasil'ev F.P.** Methods for Solving Extremal Problems [Metody resheniya ekstremal'nykh zadach]. — Moscow: Nauka, 1981. (in Russian)
15. **Kamke E.** Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. — Leipzig, 1977.