УДК 519.624.2

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА С АДАПТИВНОЙ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ[1)]

И.В. ПОПОВ, И.В. ФРЯЗИНОВ

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН
E-mail: piv2964@mail.ru, popov@imamod.ru; friazinov@imamod.ru

FINITE-DIFFERENCE METHOD FOR COMPUTATION OF THE 2D NAVIER–STOKES EQUATIONS WITH ADAPTIVE ARTIFICIAL VISCOSITY

I.V. POPOV, I.V. FRIAZINOV

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

Аннотация

В работе представлен новый численный метод решения задач вязкого сжимаемого газа на основе уравнений Навье–Стокса в двумерной системе координат в эйлеровых переменных. Предложенный метод реализован для областей произвольной формы на треугольных сетках. За основу разработанного численного метода был взят метод адаптивной искусственной вязкости, который обеспечивает монотонность решения, даже в случае наличия ударных волн. Искусственная вязкость, вводимая в разностную схему, сконструирована таким образом, чтобы она отсутствовала в пограничном слое, где действует динамическая вязкость. Вязкость находится из условий принципа максимума. Приводится расчёт тестовой задачи.

Ключевые слова: Численный метод, разностная схема, уравнения Навье–Стокса, адаптивная искусственная вязкость.

Summary

In this work the new numerical method for decision of the viscous compressed gas problem on a basis of 2D Navier-Stokes equations in Euler variables is presented. The offered method is realized for areas of complex form on triangular grids. The proposed method of adaptive artificial viscosity provides monotony of the solution even in case of existence of shock waves. The artificial viscosity entered into the differential scheme is designed so that it was absent in an interface where dynamic viscosity works. Viscosity is obtained from conditions of the principle of a maximum. Calculation of a test task is given.

Key words: Numerical method, finite-difference scheme, Navier-Stoks equations, adaptive artificial vicousity.

Введение

В работе предложен новый численный метод решения уравнений Навье–Стокса для сжимаемого вязкого газа. Этот новый численный метод основан на ранее разработанном методе адаптивной искусственной вязкости для газовой динамики. Основным отличием системы уравнений Эйлера является отсутствие динамической вязкости, в то время как в системе уравнений Навье–Стокса присутствуют вязкие члены. Поэтому при построении разностной схемы необходимо было обеспечить отсутствие искусственной вязкости в той области, где действует динамическая вязкость, чтобы не ухудшить точность решения в области пограничного слоя.

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00345-а).

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений Навье—Стокса в декартовой системе координат в операторном виде:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0,\\[2ex]
\dfrac{\partial \rho v_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}\rho v_\alpha - \mu\tau_{\alpha\beta}) + \operatorname{grad}_\alpha p = 0,\\[2ex]
\dfrac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}(E+p) - \mu(\vec{v},\tau_{\alpha\beta}) - \lambda \operatorname{grad} T) = 0,
\end{cases}
$$

где ρ — плотность, p — давление, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ — скорость, ρv_α — компоненты импульса, $E = 0.5\rho|v|^2 + \rho\varepsilon$ — полная энергия, ε — внутренняя энергия, $\tau_{\alpha\beta} = \left(\left(\dfrac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \dfrac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right) - \dfrac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\vec{v}\right)$ — тензор вязких напряжений, $\alpha = 1,2$, $\beta = 1,2$, μ — динамическая вязкость, $\lambda = \dfrac{\gamma R}{(\gamma-1)\mathrm{Pr}}$ — коэффициент теплопроводности, T — температура, Pr — число Прандтля. Эти уравнения решаются в области общего вида Ω, $t > 0$. Система уравнений замыкается либо уравнением состояния идеального газа $p = (\gamma-1)\rho\varepsilon$, либо заданием давления с помощью экспериментальных таблиц. Здесь γ — показатель адиабаты Пуассона. На границе области Ω и в начальный момент времени $t = 0$ задаются функции ρ, $\vec{v}$ и E (или p).

2. Аппроксимация системы уравнений

Исходную область Ω покроем произвольной треугольной сеткой, назовём треугольники ячейками расчётной сетки Ω_h. Для построенных треугольников найдём центры описанных окружностей. Если центр лежит строго внутри ячеек, то назовём его центром ячейки и обозначим точкой x_0 (см. рис. 1). Если же центр описанной окружности лежит на границе или вне треугольника, то центром ячейки назовём её центр тяжести. К центру ячейки отнесём все искомые значения сеточных функций ρ_0, $\vec{v}_0$, E_0, p_0. В рассмотрение ещё введём потоковые узлы $\tilde{x}_i$, получаемые как пересечение отрезка, соединяющего центры соседних ячеек и общего ребра или грани ячеек.

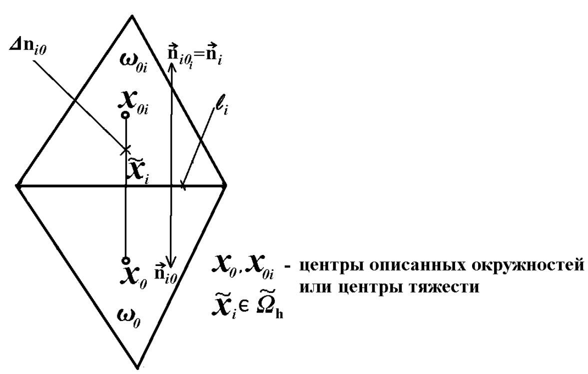

Рис. 1: Апроксимационная ячейка.

Рассмотрим аппроксимацию уравнения неразрывности. Для этого применим метод конечных объёмов построения разностных схем. Проинтегрируем дифференциальное уравнение неразрывности по площади ω_0 и получим

$$
\int\limits_{\omega}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v})\right)d\omega = 0, \qquad \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_0 \omega + \int\limits_{\omega}\operatorname{div}(\rho\vec{v})\,d\omega = 0,
$$

$$\int\limits_{\omega} \operatorname{div}(\rho\vec{v})\, d\omega = \oint\limits_{\partial\omega} (\vec{n}, \rho\vec{v})\, dl = \sum_i \frac{(\rho v_{n_i})_0 + (\rho v_{n_i})_{0_i}}{2}\, l_i.$$

После дискретизации по времени получим:

$$\rho_0^{n+1} = \rho_0^n - \frac{\tau}{\omega}\sum_i \frac{(\rho v_{n_i})_0 + (\rho v_{n_i})_{0_i}}{2}\, l_i.$$

Остальные уравнения аппроксимируются аналогично. Запишем окончательный результат

– уравнение импульса:

$$(\rho v_\alpha)_0^{n+1} = (\rho v_\alpha)_0^n - \frac{\tau}{\omega}\sum_i \left[A_{0i} - B_{0i} + C_{0i}\right] l_i,$$

$$A_{0i} = \frac{(\rho v_{n_i})_0 + (\rho v_{n_i})_{0_i}}{2}\frac{(v_\alpha)_0 + (v_\alpha)_{0_i}}{2}, \quad C_{0i} = \frac{p_0 + p_{0_i}}{2}\cos(n_i, x_\alpha),$$

$$B_{0i} = \frac{\mu_0 + \mu_{0_i}}{2}\left(\frac{1}{3D}\frac{(v_{n_i})_{0_i} - (v_{n_i})_0}{\Delta n_i}\cos(n_i, x_\alpha) + \frac{(v_\alpha)_{0_i} - (v_\alpha)_0}{\Delta n_i}\right);$$

– уравнение энергии:

$$E_0^{n+1} = E_0^n - \frac{\tau}{\omega}\sum_i \left[D_{0i} - E_{0i} - F_{0i}\right] l_i,$$

$$D_{0i} = \frac{(\rho v_{n_i})_0 + (\rho v_{n_i})_{0_i}}{2}\left(\frac{(v_1)_0 (v_1)_{0_i} + (v_2)_0 (v_2)_{0_i}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_0}{\rho_0} + \frac{p_{0_i}}{\rho_{0_i}}\right)\right),$$

$$E_{0i} = \frac{\mu_0 + \mu_{0_i}}{2}\left(\frac{1}{6D}\frac{(v_{n_i})_{0_i}^2 - (v_{n_i})_0^2}{\Delta n_i} + \frac{1}{2}\,\frac{(v_1)_{0_i}^2 - (v_1)_0^2 + (v_2)_{0_i}^2 - (v_2)_0^2}{\Delta n_i}\right),$$

$$F_{0i} = \frac{\lambda_0 + \lambda_{0_i}}{2}\,\frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{(p/\rho)_{0_i} - (p/\rho)_0}{\Delta n_i},$$

где l_i – длина i-ой стороны треугольника, Δn_i – длина проекции вектора $x_0 x_{0_i}$ на нормальный вектор $\vec{n}_i$ для i-ой стороны треугольника, Re – число Рейнольдса. Здесь предполагается, что динамическая вязкость $\mu = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}$, D – размерность пространства, в данном случае $D = 2$.

Предложенная разностная схема имеет малую диссипацию, и если в решаемой задаче имеются разрывы решения, например, присутствует ударная волна, то требуется введение дополнительной искусственной вязкости.

3. Искусственная вязкость.

Введём искусственную вязкость η в систему уравнений Навье–Стокса аналогично тому, как это было сделано для уравнений Эйлера [1–3], получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \operatorname{div}(\eta\operatorname{grad}\rho), \\[2ex] \dfrac{\partial\rho v_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}\rho v_\alpha - \mu\tau_{\alpha\beta}) + \operatorname{grad}_\alpha p = \operatorname{div}(\eta\operatorname{grad}\rho v_\alpha), \\[2ex] \dfrac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}(E + p) - \mu(\vec{v}, \tau_{\alpha\beta}) - \lambda\operatorname{grad} T) = \operatorname{div}(\eta\operatorname{grad} E). \end{cases}$$

В разностном виде диссипативный оператор с искусственной вязкостью записывается в виде:

$$(\Lambda_h(\eta)\, q^n)_0 = \frac{1}{\omega_0}\sum_i \eta_i^n\, \frac{q_{0_i}^n - q_0^n}{\Delta n_i}\, l_i,$$

где $q = \rho, \rho v_\alpha, E$, $\alpha = 1, 2$.

Теперь найдём выражение для искусственной вязкости, для чего воспользуемся принципом максимума. Запишем разностное уравнение неразрывности в виде:

$$\rho_0^{n+1} = \rho_0^n \tilde{A}_0 + \frac{\tau}{\omega}\sum_i \tilde{B}_{0_i}\rho_{0_i}^n,$$

$$\tilde{A}_0 = \left[1 - \frac{\tau}{\omega}\sum_i \left(\frac{(v_{n_i})_0}{2} + \frac{\eta_i}{\Delta n_i}\right) l_i\right], \quad \tilde{B}_{0_i} = \left[\frac{n_i}{\Delta n_i} - \frac{(v_{n_i})_{0_i}}{2}\right] l_i.$$

Для того, чтобы принцип максимума был выполнен, необходима положительность коэффициентов

$$\tilde{A}_0 > 0, \quad \tilde{B}_{0_i} > 0.$$

Разрешая эти неравенства относительно искусственной вязкости, для первого неравенства имеем $\eta_i < \dfrac{\Delta n_i}{D}\,|v_{n_i}|$, а для второго $\eta_i > \dfrac{\Delta n_i}{D}\,|v_{n_i}|$, а следовательно $\eta_i = \dfrac{\Delta n_i}{D}\,|v_{n_i}|$. Полученная искусственная вязкость используется и для остальных уравнений.

4. Области введения искусственной вязкости.

Если всюду вводить предложенную выше искусственную вязкость, то будет сильное размывание численного решения, поэтому будем вводить вязкость только на ударной волне (волне сжатия) и на осцилляциях численного решения. Для определения области, занятой ударной волной, используется неравенство:

$$\frac{\partial v_{\vec{l}}}{\partial \vec{l}} < 0,$$

где $\vec{l} = \dfrac{\nabla\rho}{|\nabla\rho|}$ — единичный вектор по направлению градиента плотности, а $v_{\vec{l}}$ — проекция вектора скорости на направление вектора $\vec{l}$.

Вторая область введения вязкости это область осцилляции численного решения, когда значение функции плотности ρ_0 больше или меньше значений плотностей, примыкающих к данной ячейке ω_0, то есть проверяются два условия

$$\rho_0 < \max_{i=1,2,3}\rho_{0_i} \;\text{ и }\; \rho_0 < \max_{i=1,2,3}\rho_{0_i}.$$

Для уменьшения искусственной вязкости на ударной волне бралась минимальная искусственная вязкость, которая была получена для уравнений Эйлера [3], так как в области вне пограничного слоя динамическая вязкость стремится к нулю и уравнения импульса и полной энергии переходят в уравнения Эйлера. Второе соображение для введения искусственной вязкости именно по уравнению неразрывности для сжимаемого вязкого газа, основывалось на отсутствии в этом уравнении членов, содержащих динамическую вязкость.

Замечание: в уравнении для полной энергии вне пограничного слоя остается слагаемое, содержащее температуру, но в газе теплопроводность мала.

Таким образом, искусственная вязкость по областям имеет вид:

$$\eta_i = \begin{cases} \dfrac{\Delta n_i}{D}\,|v_{n_i}|, \quad x_0 \in \text{УВ}, \\[2ex] 0.5h\left|\sqrt{D}v_{n_i}\right|\left(1 - \dfrac{\tau}{h}\sqrt{Dv_{n_i}^2 + c^2}\right), \quad x_0 \in \text{УВ} \cup \text{ОЦК}, \\[2ex] 0, \quad x_0 \notin \text{УВ} \cup \text{ОЦК}. \end{cases}$$

где $h = \dfrac{\Delta n_i}{\sqrt{D}}$, c — скорость звука.

5. Этапы решения задачи.

На первом этапе ("этап предиктор") по значениям q^n в момент времени $t = t_n$, в отсутствие искусственной вязкости ($\eta = 0$) по явной разностной схеме находим предикторное решение $\tilde{q}^{n+1}$.

На втором этапе, по полученным предикторным значениям $\tilde{q}^{n+1}$ определяются ячейки и потоковые узлы, в которых следует ввести искусственную вязкость, и для найденных ячеек по значениям q^n найти искусственную вязкость $\eta^{n+1} = \eta(q^n)$. Определение областей, в которых вводится искусственная вязкость, описано выше.

На третьем этапе ("этап корректор") по значениям $\tilde{q}^{n+1}$ и искусственной вязкости η^{n+1} находим значения q^{n+1} на момент времени $t = t_{n+1}$.

6. Численные эксперименты.

Для тестирования предложенного метода было проведено численное моделирование отрывного течения несжимаемой вязкой жидкости в квадратной каверне с подвижной границей при различных числах Рейнольдса. В приводимом расчёте число Рейнольдса $\mathrm{Re} = 400$, число Прандтля $\mathrm{Pr} = 0.7$. В начальный момент времени плотность $\rho = 1$, все компоненты скорости равнялись нулю, давление вычислялось по формуле $p = \dfrac{1}{\gamma M^2}$, $\gamma = \dfrac{7}{5}$, число Маха $M = 0.01$ (при таком числе Маха среда становится практически несжимаемомой). Расчет проводился до момента времени $t = 25.8$. Все приведённые ниже величины безразмерные. На рисунке 2 слева приведен расчёт из работы [4] на ортогональной сетке 257×257, а на рисунке 2 справа по предложенному методу на 183 296 расчётных элементах (треугольниках). Как видно из рисунка, полученное по методу АИВ решение не уступает по точности и вычислительной емкости широко известным расчётам на ортогональной сетке.

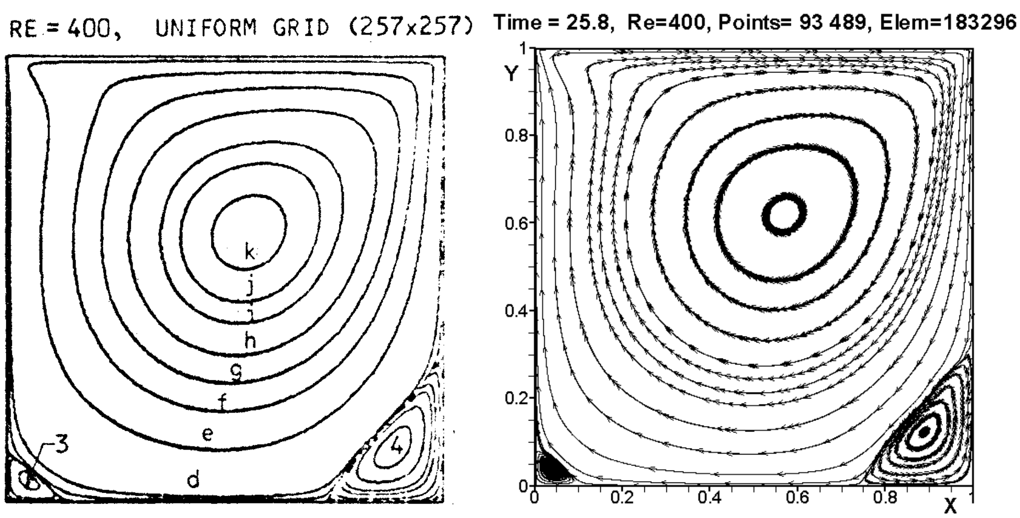

Рис. 2: Течение в каверне.

Второй расчёт относится к задаче обтекания цилиндра единичного радиуса сверхзвуковым потоком. В этом расчёте брались значения функций, как и в первом расчёте, за исключением числа Маха ($M = 2$) и числа Рейнольдса ($rmRe = 10^4$). На рисунке 3 сверху линии — это линии тока, а цвет — распределение давления в газе. На рисунке 3 снизу белым цветом изображены области введения искусственной вязкости. Расчёт проводился на 325 884 элементах (треугольниках). В данной задаче также удалось получить точность решения, аналогичную расчётам на ортогональной сетке с примерно таким же числом узлов.

7. Заключение.

В работе предложен новый численный метод решения уравнений Навье—Стокса для сжимаемого вязкого газа в областях сложной двумерной геометрии на нерегулярных треугольных сетках. Метод построен

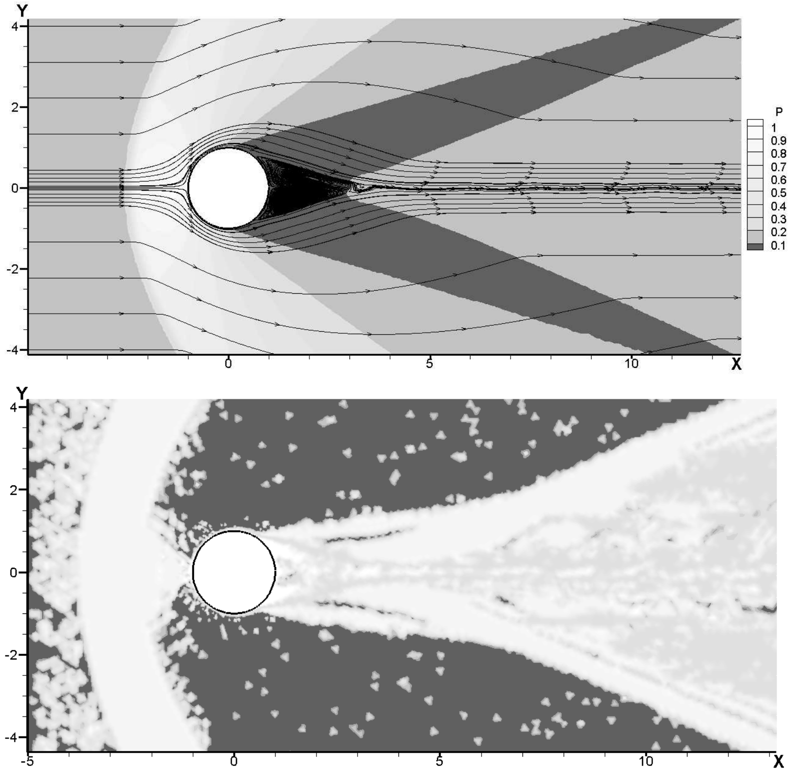

Рис. 3: Обтекание цилиндра.

по принципу "предиктор-корректор". В качестве инструмента регуляризации метод использует адаптивную искусственную вязкость. Искусственная вязкость выводится из принципа максимума и вводится в тех областях, где естественная динамическая вязкость не позволяет получить ограниченное решение задачи. Проведенные численные эксперименты подтвердили эффективность разработанного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Попов И.В., Фрязинов И.В.** Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. – 2008. – Т. 20, № 8. – С. 48-60.
2. **Попов И.В., Фрязинов И.В.** Адаптивная искусственная вязкость для многомерной газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, № 1. – С. 32-45.
3. **Попов И.В., Фрязинов И.В.** Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 6. – С. 109-127.
4. **Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.** High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method // Journal of Computational Physics. – 1982. – V. 48. – P. 387-411.

REFERENCES

1. **Popov I.V., Friazinov I.V.** Finite-difference method for solving gas dynamics equations using adaptive artificial viscosity // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2009. – V. 1, № 3. –P. 493-502.

2. **Popov I.V., Friazinov I.V.** Adaptive artificial viscosity for multidimensional gas dynamics for Euler variables in Cartesian coordinates // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2010. – V. 2, № 4. –P. 429-442.
3. **Popov I.V., Friazinov I.V.** Method of adaptive artificial viscosity for gas dynamics equations on triangular and tetrahedral grids // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2013. – V. 5, № 1. –P. 50-62.
4. **Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.** High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method // Journal of Computational Physics. – 1982. – V. 48. –P. 387-411.