

УДК 517.958

**ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ В ТЕОРИИ  
СЛАБОНАПРАВЛЯЮЩИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ<sup>1)</sup>**

**А.О. СПИРИДОНОВ, А.И. РЕПИНА, Е.М. КАРЧЕВСКИЙ**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет  
E-mail sasha\_ens@mail.ru; airepinas@gmail.com; ekarchev@yandex.ru*

**INVERSE SPECTRAL PROBLEMS AND COLLOCATION METHOD IN THE SPECTRAL THEORY OF  
WEAKLY GUIDING STEP-INDEX OPTICAL FIBRES**

**A.O. SPIRIDONOV, A.I. REPINA, E.M. KARCHEVSKI**

*Kazan Federal University*

**Аннотация**

Предлагается новый метод расчета диэлектрической проницаемости оптических волокон с использованием измерения постоянных распространения. Алгоритм основан на приближенном решении нелинейной несамосопряженной задачи на собственные значения для системы слабо сингулярных интегральных уравнений с помощью метода коллокации. Эффективность метода подтверждается результатами численных экспериментов.

**Ключевые слова:** обратные спектральные задачи, метод коллокации

**Summary**

We present new method for calculation of dielectric constants of optical fibers using propagation constants measurements. Our numerical algorithm is based on approximate solution of a nonlinear nonselfadjoint eigenvalue problem for a system of weakly singular integral equations by collocation method. Effectiveness of the method is confirmed by the results of numerical experiments.

**Key words:** inverse spectral problems, collocation method.

---

**Введение**

Разработка неразрушающих материал методов восстановления диэлектрической проницаемости привлекает большое внимание исследователей в последние годы (см., напр., [1], [2] и цитированную там литературу). Впервые задачи восстановления диэлектрической проницаемости по измерениям постоянных распространения были исследованы для закрытых прямоугольных волноводов [3]. Для открытых диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения [4] такие задачи могут быть сформулированы в виде обратных спектральных задач для интегральных операторов [5]. Методом интегральных уравнений хорошо изучена математическая модель оптического волновода с кусочно-постоянным показателем преломления [6]– [8]. В настоящей работе на ее основе формулируются обратные спектральные задачи восстановления диэлектрической проницаемости сердцевина и оболочки волновода. Для решения этих задач предлагаются новые численные алгоритмы, основанные на решении нелинейной несамосопряженной задачи на собственные значения для системы слабо сингулярных интегральных уравнений методом сплайн-коллокации нулевого порядка с подобластями. Для демонстрации практической эффективности

---

<sup>1)</sup>Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности. Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан, проект № 12-01-97012-р\_поволжье\_а.

метода приводятся результаты численных экспериментов, приближенные решения сравниваются с известным точным решением для волновода кругового сечения.

### 1. Постановка задачи

Пусть цилиндрический диэлектрический волновод является бесконечно длинным и находится в неограниченном однородном пространстве. Будем считать, что образующая цилиндра параллельна оси  $x_3$  декартовой системы координат. Пусть область поперечного сечения сердцевинки волновода  $\Omega_i$  ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром  $\gamma$ . Пусть  $\Omega_e = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_i$  — неограниченная область оболочки. Пусть диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  является кусочно-постоянной функцией, которая равна  $\varepsilon_\infty$  в области  $\Omega_e$  и равна  $\varepsilon_+ > \varepsilon_\infty$  в области  $\Omega_i$ . Задачи теории оптических волноводов [4] формулируются на основе однородной системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathcal{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  — векторы напряженности электрического и магнитного поля;  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные. Нетривиальные решения уравнений (1), имеющие вид

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{bmatrix} (x, x_3, t) = \operatorname{Re} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} (x) e^{i(\beta x_3 - \omega t)} \right), \quad (2)$$

называются собственными волнами волновода. Здесь  $\omega > 0$  — частота электромагнитных колебаний,  $\beta$  — постоянная распространения,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — комплексные амплитуды векторов  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ ,  $x = (x_1, x_2)$ .

В прямых спектральных задачах диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  известна. Необходимо найти такие продольные волновые числа  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  и постоянные распространения  $\beta$ , при которых существуют собственные волны. Собственные волны должны удовлетворять условию сопряжения на границе  $\gamma$  и условию излучения на бесконечности. В обратных спектральных задачах необходимо восстановить неизвестную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$  по данным о собственных волнах, существующих при некоторых  $k$  и  $\beta$ . Главный вопрос в том, какой информации о спектре достаточно для единственного и устойчивого восстановления диэлектрической проницаемости.

### 2. Решение прямой задачи

В скалярном приближении слабонаправляющего волновода прямая задача сводится к отысканию таких значений поперечных волновых чисел  $\chi = \sqrt{k^2 \varepsilon_+ - \beta^2}$  и  $\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty} > 0$ , при которых существуют ненулевые классические решения  $u$  следующей задачи [6]:

$$\Delta u + \chi^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (3)$$

$$\Delta u - \sigma^2 u = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad (4)$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \gamma, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = e^{-\sigma r} O \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r = |x| \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где  $\partial u / \partial \nu$  — производная по нормали к контуру  $\gamma$ , внешней относительно области  $\Omega_i$ . Методом потенциалов простого слоя задача (3) — (6) сведена [6] к системе интегральных уравнений. Путем аппроксимации интегрального оператора методом сплайн-коллокации нулевого порядка с подобластями в [8] построена конечномерная нелинейная спектральная задача вида  $A_n(\chi) w_n = 0$ , где  $n$  — количество точек коллокации, а параметр  $\sigma$  фиксирован. Для ее решения мы используем метод обратных итераций с невязкой [9]. На рис. 1 слева представлены результаты численных экспериментов. Непрерывными линиями показано точное решения, кружками — приближенное. Дисперсионная кривая фундаментальной волны отмечена красным цветом (первая кривая снизу слева).

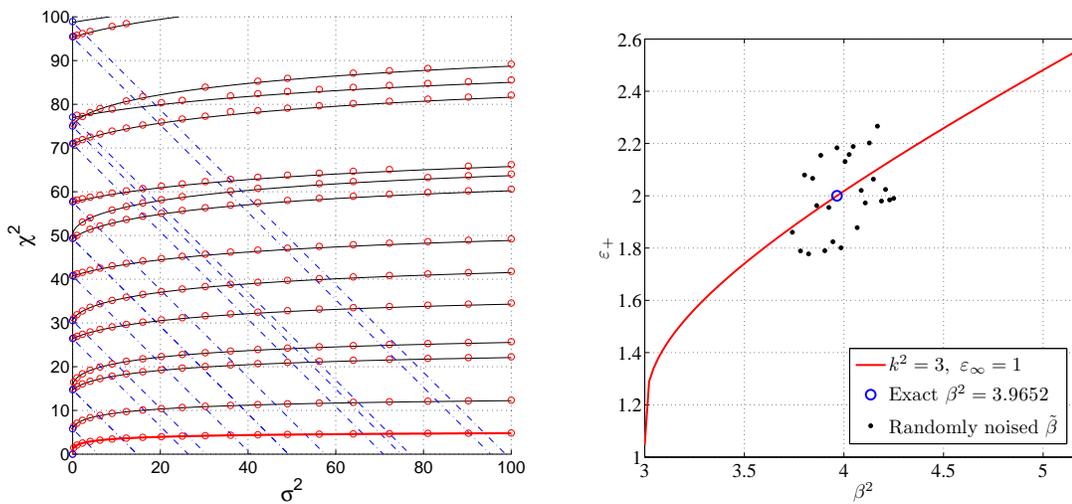


Рис. 1: Дисперсионные кривые для собственных волн волновода кругового поперечного сечения (слева). График функции  $\varepsilon_+ = \varepsilon_+(\beta^2)$  для фундаментальной волны и результаты численного восстановления проницаемости сердцевинки волновода (справа).

### 3. Решение обратных спектральных задач

В этом разделе предлагаются алгоритмы приближенного решения обратных спектральных задач. Они основаны на использовании предварительно вычисленных для  $\sigma$  из соответствующего интервала характеристических значениях  $\chi(\sigma)$  оператор-функции  $A_n(\chi)$ .

Пусть задан контур  $\gamma$  поперечного сечения волновода и известна диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_\infty$  окружающей среды. Предположим, что для некоторой частоты электромагнитных колебаний  $\omega$  измерена постоянная распространения  $\beta$  фундаментальной волны волновода. Необходимо найти диэлектрическую проницаемость сердцевинки  $\varepsilon_+$ . После того как решена прямая спектральная задача, решение обратной спектральной задачи может быть найдено следующим образом. Сначала по  $\beta$ ,  $\omega$  и  $\varepsilon_\infty$  вычисляется число  $\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 \varepsilon_\infty}$ . Затем находится значение поперечного волнового числа  $\chi(\sigma)$  для фундаментальной волны, отвечающего этому  $\sigma$ . Это число рассчитывается путем интерполяции функции  $\chi(\sigma)$  для фундаментальной волны по точкам, которые были получены при решении прямой спектральной задачи с помощью метода сплайн-коллокации. И наконец, искомая диэлектрическая проницаемость вычисляется по формуле  $\varepsilon_+ = (\chi^2 + \beta^2)/k^2$ . В наших расчетах по аналогии с [2] мы ввели случайный шум в постоянную распространения:  $\tilde{\beta} = \beta(1 + p\alpha)$ . Здесь  $\alpha \in (-1, 1)$  генерируются случайным образом,  $p = 0.05$  — уровень шума. На рис. 1 справа представлены результаты численных экспериментов, проведенных описанным методом для волновода кругового поперечного сечения. Кружочком показано численное решение при точно заданном  $\beta$ , точками — приближенные решения для возмущенных  $\tilde{\beta}$ . Видно, что метод устойчив к возмущениям постоянной распространения. Таким образом, для того чтобы однозначно и устойчиво восстановить диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_+$  сердцевинки волновода, достаточно измерить постоянную распространения  $\beta$  его фундаментальной волны лишь на одной частоте.

Пусть теперь диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_+$  сердцевинки волновода известна. Предположим, что для некоторой частоты электромагнитных колебаний  $\omega$  измерена постоянная распространения  $\beta$  фундаментальной волны волновода. Необходимо найти диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_\infty$  оболочки. Решение этой обратной спектральной задачи может быть найдено следующим образом. Прежде всего, по известным  $\beta$ ,  $\omega$  и  $\varepsilon_+$  вычисляется  $\chi = \sqrt{k^2 \varepsilon_+ - \beta^2}$ . С помощью метода сплайн-коллокации для фундаментальной волны вычисляется значение  $\sigma(\chi)$ , отвечающего этому  $\chi$ , и наконец, по форму-

ле  $\varepsilon_\infty = (\beta^2 - \sigma^2)/k^2$  находится искомая диэлектрическая проницаемость оболочки волновода. На рис. 2 слева представлены результаты численных экспериментов, проведенных описанным методом для волновода кругового поперечного сечения. Как и в предыдущей серии экспериментов, кружочком показано численное решение задачи при точно заданном  $\beta$ , точками — приближенные решения для возмущенных  $\tilde{\beta}$ . Видно, что приближенные решения даже для случайно возмущенных  $\tilde{\beta}$  с уровнем шума 5% были стабильными. Следовательно, для однозначного и устойчивого восстановления диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_\infty$  оболочки волновода тоже достаточно измерить постоянную распространения  $\beta$  фундаментальной волны только для одной частоты  $\omega$ .

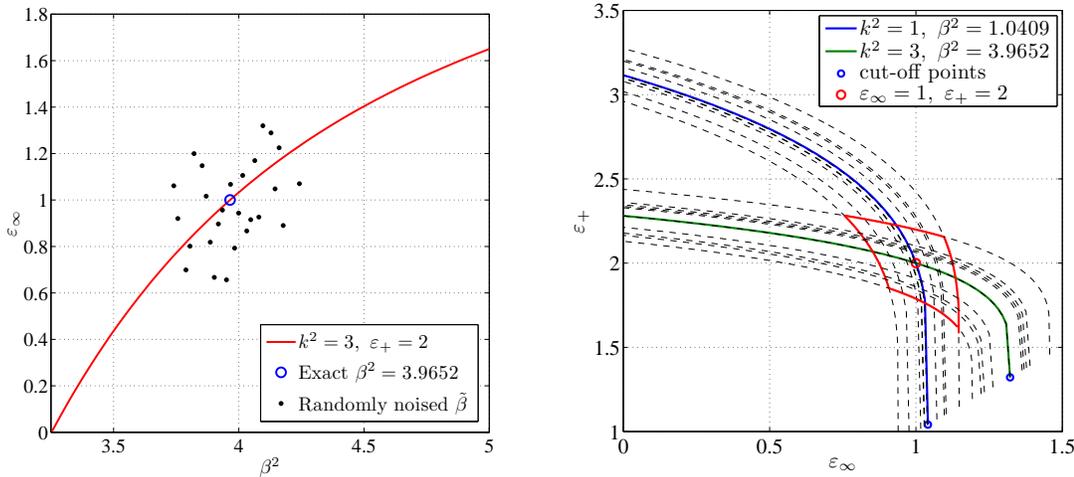


Рис. 2: График функции  $\varepsilon_\infty = \varepsilon_\infty(\beta^2)$  для фундаментальной волны и результаты численного восстановления проницаемости оболочки волновода (слева). Результаты численных экспериментов по одновременному восстановлению диэлектрической проницаемости сердцевины и оболочки (справа).

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть необходимо одновременно найти и диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_+$  сердцевины волновода, и диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_\infty$  его оболочки. Предположим, что для двух разных частот электромагнитных колебаний  $\omega$  измерены постоянные распространения  $\beta$  фундаментальной волны волновода. Для каждого фиксированного значения продольного волнового числа  $k$  и постоянной распространения  $\beta$  решение прямой спектральной задачи (3) – (6) для фундаментальной волны определяет неявную функцию  $\varepsilon_+$  переменной  $\varepsilon_\infty$ . На рис. 2 справа непрерывными линиями показаны графики функции  $\varepsilon_+ = \varepsilon_+(\varepsilon_\infty)$  для двух пар фиксированных значений параметров  $\beta$  и  $k$ . Пересечение этих кривых однозначно определяет значения  $\varepsilon_+$  и  $\varepsilon_\infty$ . Значит, после того как решена прямая спектральная задача, и найдена дисперсионная кривая для фундаментальной волны, решение обратной спектральной задачи может быть получено как решение системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \chi^2(\beta_1^2 - k_1^2 \varepsilon_\infty) = k_1^2 \varepsilon_+ - \beta_1^2, \\ \chi^2(\beta_2^2 - k_2^2 \varepsilon_\infty) = k_2^2 \varepsilon_+ - \beta_2^2. \end{cases}$$

Здесь  $k_1$  и  $k_2$  — заданные различные значения продольного волнового числа,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — соответствующие им измеренные постоянные распространения,  $\chi$  — функция переменной  $\varepsilon_\infty$  при фиксированных  $k_j$  и  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2$ . Приближенное решение, полученное методом коллокации, отмечено на рис. 2 справа красным кружком для точных значений постоянной распространения  $\beta$ . Как было описано выше, мы ввели случайный шум в постоянную распространения. Приближенные решения для возмущенных  $\beta$  являются пересечениями пунктирных линий. Мы видим, что приближенные решения для случайно возмущенных  $\beta$  принадлежат красному ромбу и устойчивы. Поэтому, для однозначного и устойчивого одновременного

восстановления диэлектрической проницаемости волновода  $\varepsilon_+$  и диэлектрической проницаемости окружающей среды  $\varepsilon_\infty$  достаточно измерить постоянные распространения  $\beta$  фундаментальной волны только для двух различных частот  $\omega$ .

#### **4. Заключение.**

В этой работе мы показали, что предложенные нами обратные спектральные задачи корректно поставлены. Важно отметить, что никакой информации о конкретных значениях собственных функций не требуется. Для решения этих обратных задач достаточно знать, что возбуждается именно фундаментальная волна, а затем измерить ее постоянную распространения для одной или для двух частот.

Такой подход соответствует практике физических экспериментов, потому что, как правило, для практических целей возбуждается именно фундаментальная волна [4]. Более того, для достаточно широкого интервала частот может возбуждаться только фундаментальная волна [6].

Для приближенного решения обратных задач мы предлагаем сначала решить прямую спектральную задачу поиска поперечных волновых чисел и построить дисперсионную кривую для фундаментальной волны волновода. Эти расчеты делаются достаточно точно методом коллокации. Затем можно однозначно и устойчиво восстановить диэлектрическую проницаемость сердцевины волновода и его оболочки с помощью предложенных обратных алгоритмов.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. **Havrilla M., Bogle A., Hyde IV, M., Rothwell E.** EM material characterization of conductor backed media using a NDE microstrip probe // *Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics*. – 2014. – V. 38, № 2. – P. 210–218.
2. **Beilina L., Klibanov M.V.** A new approximate mathematical model for global convergence for a coefficient inverse problem with backscattering data // *Inverse and Ill-Posed Problems*. – 2012. – V. 20. – P. 513–565.
3. **Janezic M.D., Jargon J.A.** Complex permittivity determination from propagation constant measurements // *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. – 1999. – V. 9, № 2. – P. 76–78.
4. **Snyder A.W., Love J.D.** *Optical Waveguide Theory*. – Chapman and Hall, London, 1983.
5. **Chu M.T., Golub G.H.** *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*. – Oxford University Press, 2005.
6. **Karchevskii E.M.** Analysis of the eigenmode spectra of dielectric waveguides // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. – 1999. – V. 39, № 9. – P. 1493–1498.
7. **Karchevskii E.M.** The fundamental wave problem for cylindrical dielectric waveguides // *Differential Equations*. – 2000. – V. 36, № 7. – P. 1109–1111.
8. **Spiridonov A.O., Karchevskiy E.M.** Projection methods for computation of spectral characteristics of weakly guiding optical waveguides // *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2013, DD 2013*. – 2013. – P. 131–135.
9. **Neumaier A.** Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1985. – V. 22, № 5. – P. 914–923.

#### **REFERENCES**

1. **Havrilla M., Bogle A., Hyde IV, M., Rothwell E.** EM material characterization of conductor backed media using a NDE microstrip probe // *Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics*. – 2014. – V. 38, № 2. – P. 210–218.

2. **Beilina L., Klibanov M.V.** A new approximate mathematical model for global convergence for a coefficient inverse problem with backscattering data // *Inverse and Ill-Posed Problems*. – 2012. – V. 20. – P. 513–565.
3. **Janezic M.D., Jargon J.A.** Complex permittivity determination from propagation constant measurements // *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. – 1999. – V. 9, № 2. – P. 76–78.
4. **Snyder A.W., Love J.D.** *Optical Waveguide Theory*. – Chapman and Hall, London, 1983.
5. **Chu M.T., Golub G.H.** *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*. – Oxford University Press, 2005.
6. **Karchevskii E.M.** Analysis of the eigenmode spectra of dielectric waveguides // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. – 1999. – V. 39, № 9. – P. 1493–1498.
7. **Karchevskii E.M.** The fundamental wave problem for cylindrical dielectric waveguides // *Differential Equations*. – 2000. – V. 36, № 7. – P. 1109–1111.
8. **Spiridonov A.O., Karchevskiy E.M.** Projection methods for computation of spectral characteristics of weakly guiding optical waveguides // *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2013, DD 2013*. – 2013. – P. 131–135.
9. **Neumaier A.** Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1985. – V. 22, № 5. – P. 914–923.