

УДК 519.63

КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ¹⁾**С.И. СОЛОВЬЁВ***Казанский (Приволжский) федеральный университет**E-mail: sergei.solovyev@kpfu.ru***FINITE-DIMENSIONAL APPROXIMATION OF SPECTRAL PROBLEMS****S.I. SOLOV'EV***Kazan Federal University***Аннотация**

Спектральная задача в бесконечномерном гильбертовом пространстве аппроксимируется задачей в конечномерном подпространстве. Исследуется сходимость и погрешность приближенных собственных значений и собственных элементов. Общие результаты иллюстрируются на примере схемы метода конечных элементов с численным интегрированием для дифференциальной задачи на собственные значения второго порядка.

Ключевые слова: собственное значение, собственный элемент, задача на собственные значения, метод конечных элементов

Summary

A spectral problem in infinite-dimensional Hilbert space is approximated by a problem in finite-dimensional subspace. Convergence and error of the approximate eigenvalues and eigenelements are investigated. The general results are illustrated by a sample scheme of finite element method with numerical integration for a second-order differential eigenvalue problem.

Keywords: eigenvalue, eigenelement, eigenvalue problem, finite element method

1. Постановка задачи.

Пусть V – вещественное бесконечномерное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$, \mathbb{R} – числовая прямая. Введем симметричные билинейные формы $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Предположим, что билинейная форма $a(\cdot, \cdot)$ является положительно-определенной и ограниченной, т.е. существуют положительные постоянные α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1\|v\|^2 \leq a(v, v) \leq \alpha_2\|v\|^2$ для любого $v \in V$. Предположим также, что билинейная форма $b(\cdot, \cdot)$ является вполне непрерывной, т.е. $b(v_i, v_i) \rightarrow b(v, v)$ при $i \rightarrow \infty$ для $v_i \rightarrow v$ в V при $i \rightarrow \infty$. Символом \rightarrow обозначена слабая сходимость в гильбертовом пространстве V . Обозначим $K = \ker b$, $\ker b = \{v : v \in V, b(v, w) = 0 \forall w \in V\}$ и предположим $\text{codim } K = \infty$.

Симметричная билинейная форма $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ограниченной*, если существует постоянная $\gamma_2 > 0$ такая, что $|c(v, v)| \leq \gamma_2\|v\|^2$ для любого $v \in V$. Минимальная постоянная в неравенстве ограниченности называется *нормой* билинейной формы. Норма симметричной билинейной формы $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ вычисляется по правилу

$$\|c\| = \sup_{u, v \in V, \|u\| = \|v\| = 1} |c(u, v)| = \sup_{v \in V, \|v\| = 1} |c(v, v)|.$$

¹⁾Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-97026, 13-01-00908, 14-01-00755)

Для замкнутых подпространств V_1 и V_2 пространства V обозначим $c|_{V_1 \times V_2} : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ сужение билинейной формы $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ на множество $V_1 \times V_2$. Зададим норму билинейной формы $c|_{V_1 \times V_2} : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\|c|_{V_1 \times V_2}\| = \sup_{u \in V_1, v \in V_2, \|u\|=\|v\|=1} |c(u, v)|.$$

Из полной непрерывности билинейной формы $b(\cdot, \cdot)$ вытекает свойство ограниченности, т.е. существование положительной постоянной β_2 такой, что $|b(v, v)| \leq \beta_2 \|v\|^2$ для любого элемента $v \in V$.

Сформулируем задачу на собственные значения: найти $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V \setminus K$ такие, что

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in V. \quad (1)$$

Число λ , удовлетворяющее уравнению (1), называется *собственным значением* билинейной формы $a(\cdot, \cdot)$ относительно билинейной формы $b(\cdot, \cdot)$, а элемент u – отвечающим λ *собственным элементом*. Короче λ и u будем называть собственным значением и собственным элементом задачи (1). Множество $U(\lambda)$, состоящее из собственных элементов, отвечающих собственному значению λ , и нулевого элемента, образует замкнутое подпространство в V , которое называется *собственным подпространством*, соответствующим собственному значению λ . Размерность этого подпространства называется *кратностью* собственного значения λ . Если размерность собственного подпространства равна единице, то соответствующее собственное значение называется *простым*.

Обозначим через \mathbb{N} множество натуральных чисел, через \mathbb{N}_k – множество k первых натуральных чисел, через \mathbb{Z} – множество неотрицательных целых чисел, т.е. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 = \emptyset$, $\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots\}$. Пусть $J_- \in \{\mathbb{N}_m, \mathbb{N}\}$, $J_+ \in \{\mathbb{N}_n, \mathbb{N}\}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $J_- \cup J_+ = \mathbb{N}$. Для подпространства W пространства V положим $W^\perp = \{v : v \in V, a(v, w) = 0 \forall w \in W\}$. Определим $S(v) = b(v, v)/a(v, v)$ для любого $v \in V \setminus \{0\}$.

Теорема 1. *Задача (1) имеет счетное множество конечнократных собственных значений $\lambda_{\pm k}$, $k \in J_\pm$, $J_- \cup J_+ = \mathbb{N}$, занумерованных с учетом знака и кратности, т.е. $\dots \leq \lambda_{-k} \leq \dots \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, где каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Если $J_- = \mathbb{N}$, то $\lambda_{-k} \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Если $J_+ = \mathbb{N}$, то $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Собственным значениям $\lambda_{\pm k}$, $k \in J_\pm$ соответствует ортонормированная система собственных элементов $u_{\pm k}$, $k \in J_\pm$, такая, что $a(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}$, $b(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}/\lambda_{\pm i}$, $i, j \in J_\pm$, $a(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = b(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = 0$, $i \in J_\pm$, $j \in J_\mp$. Элементы $u_{\pm k}$, $k \in J_\pm$, образуют полную систему в пространстве K^\perp . Справедливы соотношения*

$$\lambda_{-k}^{-1} = S(u_{-k}) = \min_{v \in E_{1-k}^\perp \setminus \{0\}} S(v), \quad k \in J_-,$$

$$\lambda_k^{-1} = S(u_k) = \max_{v \in E_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} S(v), \quad k \in J_+,$$

где $E_0 = \text{span}\{0\}$, $E_0^\perp = V$, $E_{\pm k} = \text{span}\{u_{\pm 1}, u_{\pm 2}, \dots, u_{\pm k}\}$, $k \in J_\pm$.

Теорема 2. *Справедливы соотношения*

$$\lambda_{-k}^{-1} = \max_{v \in E_{-k} \setminus \{0\}} S(v), \quad k \in J_-,$$

$$\lambda_k^{-1} = \min_{v \in E_k \setminus \{0\}} S(v), \quad k \in J_+.$$

Теорема 3. *Имеют место равенства*

$$\lambda_{-k}^{-1} = \max_{W_{k-1} \in \mathcal{E}_{k-1}} \min_{v \in W_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} S(v) = \min_{W_k \in \mathcal{E}_k} \max_{v \in W_k \setminus \{0\}} S(v), \quad k \in J_-,$$

$$\lambda_k^{-1} = \min_{W_{k-1} \in \mathcal{E}_{k-1}} \max_{v \in W_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} S(v) = \max_{W_k \in \mathcal{E}_k} \min_{v \in W_k \setminus \{0\}} S(v), \quad k \in J_+.$$

Последующее изложение опирается на работы [1–8].

2. Аппроксимация задачи.

Для аппроксимации задачи (1) зададим конечномерные подпространства V_h пространства V , удовлетворяющие условию предельной плотности семейства подпространств V_h в пространстве V , т.е. для любого элемента v из V при $h \rightarrow 0$ имеет место соотношение

$$\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} \|v - v^h\| \rightarrow 0.$$

Определим отображения $a_h : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ и $b_h : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$, которые являются симметричными билинейными формами $a_h(\cdot, \cdot)$ и $b_h(\cdot, \cdot)$. Предположим, что выполнено условие аппроксимации для приближенных билинейных форм, т.е. $\delta_0^h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, где $\delta_0^h = \|(a_h - a)|_{V_h \times V_h}\| + \|(b_h - b)|_{V_h \times V_h}\|$. Обозначим $K_h = \ker b_h$, $\ker b_h = \{v^h : v^h \in V^h, b_h(v^h, w^h) = 0 \forall w^h \in V\}$, $N_h = \text{codim } K_h$. Заметим, что $N_h = \text{codim } K_h = \dim V_h / K_h = \dim V_h - \dim K_h$. Из условия предельной плотности выводим $N_h \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$.

Исходную задачу на собственные значения (1) будем аппроксимировать конечномерной задачей: найти $\lambda^h \in \mathbb{R}$, $u^h \in V_h \setminus K_h$ такие, что

$$a_h(u^h, v^h) = \lambda^h b_h(u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h. \quad (2)$$

Число λ^h , удовлетворяющее уравнению (2), называется *приближенным собственным значением*, а элемент u^h — *приближенным собственным элементом*, отвечающим λ^h .

Обозначим через $\mathcal{E}_k(W_h)$ множество всех k -мерных подпространств W_{kh} пространства W_h , $k \in \mathbb{N}$. Множество $\mathcal{E}_0(W_h)$ состоит только из $E_{0h} = \text{span}\{0\}$. Положим $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k(V_h)$ при $k \in \mathbb{Z}$. Для подпространства W_h пространства V_h обозначим

$$W_h^\perp = \{v^h : v^h \in V_h, a_h(v^h, w^h) = 0 \forall w^h \in W_h\}.$$

Определим $S_h(v^h) = b_h(v^h, v^h) / a_h(v^h, v^h)$ для любого $v^h \in V_h \setminus \{0\}$.

Теорема 4. *При достаточно малых h задача (2) имеет N_h конечнократных собственных значений $\lambda_{\pm k}^h$, $k \in J_\pm^h$, $J_\pm^h = \mathbb{N}_m$, $J_+^h = \mathbb{N}_n$, $m+n = N_h$, $m, n \in \mathbb{Z}$, занумерованных с учетом знака и кратности, т.е. $\lambda_{-m}^h \leq \dots \leq \lambda_{-2}^h \leq \lambda_{-1}^h < 0 < \lambda_1^h \leq \lambda_2^h \leq \dots \leq \lambda_n^h$, где каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Собственным значениям $\lambda_{\pm k}^h$, $k \in J_\pm^h$ соответствует ортонормированная система собственных элементов $u_{\pm k}^h$, $k \in J_\pm^h$, такая, что $a_h(u_{\pm i}^h, u_{\pm j}^h) = \delta_{ij}$, $b_h(u_{\pm i}^h, u_{\pm j}^h) = \delta_{ij} / \lambda_{\pm i}^h$, $i, j \in J_\pm^h$, $a_h(u_{\pm i}^h, u_{\mp j}^h) = b_h(u_{\pm i}^h, u_{\mp j}^h) = 0$, $i \in J_\pm^h$, $j \in J_\mp^h$. Элементы $u_{\pm k}^h$, $k \in J_\pm^h$, образуют полную систему в пространстве K_h^\perp . Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} (\lambda_{-k}^h)^{-1} &= S_h(u_{-k}^h) = \min_{v^h \in E_{1-k, h}^\perp \setminus \{0\}} S_h(v^h) = \max_{v^h \in E_{-kh} \setminus \{0\}} S_h(v^h) = \\ &= \max_{W_{k-1, h} \in \mathcal{E}_{k-1, h}} \min_{v^h \in W_{k-1, h}^\perp \setminus \{0\}} S_h(v^h) = \min_{W_{k, h} \in \mathcal{E}_{kh}} \max_{v^h \in W_{kh} \setminus \{0\}} S_h(v^h), \quad k \in J_-^h, \\ (\lambda_k^h)^{-1} &= S_h(u_k^h) = \max_{v^h \in E_{k-1, h}^\perp \setminus \{0\}} S_h(v^h) = \min_{v^h \in E_{kh} \setminus \{0\}} S_h(v^h) = \\ &= \min_{W_{k-1, h} \in \mathcal{E}_{k-1, h}} \max_{v^h \in W_{k-1, h}^\perp \setminus \{0\}} S_h(v^h) = \max_{W_{kh} \in \mathcal{E}_{kh}} \min_{v^h \in W_{kh} \setminus \{0\}} S_h(v^h), \quad k \in J_+^h, \end{aligned}$$

где $E_{0h} = \text{span}\{0\}$, $E_{0h}^\perp = V_h$, $E_{\pm kh} = \text{span}\{u_{\pm 1}^h, u_{\pm 2}^h, \dots, u_{\pm k}^h\}$, $k \in J_\pm^h$.

3. Исследование сходимости.

Теорема 5. Пусть $\lambda_{\pm k}^h$, $k \in J_{\pm}^h$, $J_{\pm}^h = \mathbb{N}_m$, $J_{\pm}^h = \mathbb{N}_n$, $m+n = N_h$, $m, n \in \mathbb{Z}$, – собственные значения приближенной схемы (2), занумерованные с учетом знака и кратности, т.е. $\lambda_{-m}^h \leq \dots \leq \lambda_{-2}^h \leq \lambda_{-1}^h < 0 < \lambda_1^h \leq \lambda_2^h \leq \dots \leq \lambda_n^h$, которым соответствуют собственные элементы $u_{\pm k}^h$, $k \in J_{\pm}^h$, такие, что $a_h(u_{\pm i}^h, u_{\pm j}^h) = \delta_{ij}$, $b_h(u_{\pm i}^h, u_{\pm j}^h) = \delta_{ij}/\lambda_{\pm i}^h$, $i, j \in J_{\pm}^h$, $a_h(u_{\pm i}^h, u_{\mp j}^h) = b_h(u_{\pm i}^h, u_{\mp j}^h) = 0$, $i \in J_{\pm}^h$, $j \in J_{\mp}^h$. Тогда имеет место сходимость $\lambda_{\pm k}^h \rightarrow \lambda_{\pm k}$ при $h \rightarrow 0$, из каждой последовательности $h' \rightarrow 0$ можно выбрать подпоследовательность $h'' \rightarrow 0$ такую, что $u_{\pm k}^{h''} \rightarrow u_{\pm k}$ в V при $h = h'' \rightarrow 0$, где $\lambda_{\pm k}$, $u_{\pm k}$, $k \in J_{\pm}$, – собственные значения и собственные элементы задачи (1), удовлетворяющие соотношениям $\dots \leq \lambda_{-k} \leq \dots \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_l \leq \dots$, $a(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}$, $b(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}/\lambda_{\pm i}$, $i, j \in J_{\pm}$, $a(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = b(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = 0$, $i \in J_{\pm}$, $j \in J_{\mp}$. Если $\lambda_{\pm k}$ – простое собственное значение и знаки собственных элементов $u_{\pm k}^h$ выбраны так, что $a_h(u_{\pm k}^h, P_h u_{\pm k}) > 0$, то $u_{\pm k}^h \rightarrow u_{\pm k}$ в V при $h \rightarrow 0$, $k \in J_{\pm}^h$.

Расстояние между подпространствами будем измерять с помощью раствора. Пусть W_1 и W_2 – два замкнутых подпространства гильбертова пространства V с нормой $\|\cdot\|$, $\dim W_1 = \dim W_2 < \infty$, P_i – ортопроектор на W_i , $i = 1, 2$. Раствор подпространств W_1 и W_2 гильбертова пространства V определяется по правилу

$$\vartheta(W_1, W_2) = \|P_1 - P_2\| = \sup_{w \in W_2, \|w\|=1} \|w - P_1 w\| = \sup_{w \in W_1, \|w\|=1} \|w - P_2 w\|.$$

В этом соотношении через $\|\cdot\|$ обозначена также норма операторов из V в V .

Теорема 6. Пусть $\lambda_{\pm k}$ – собственное значение задачи (1) кратности s такое, что $\lambda_{\pm k} = \lambda_{\pm i}$, $i \in J_k$, $J_k = \mathbb{N}_{k+s-1} \setminus \mathbb{N}_{k-1}$, $U_{\pm k} = U(\lambda_{\pm k})$ – собственное подпространство, отвечающее $\lambda_{\pm k}$, $\dim U_{\pm k} = s$, $U_{\pm k}^h = \text{span}\{u_{\pm i}^h, i \in J_k\}$, $u_{\pm i}^h$, $i \in J_k$, – собственные элементы приближенной схемы (2). Тогда имеет место сходимость $\vartheta(U_{\pm k}, U_{\pm k}^h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

4. Исследование погрешности.

Через c будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от h . Введем оператор $P_h : V \rightarrow V_h$ по правилу $a(u - P_h u, v^h) = 0$ для любого $v^h \in V_h$, где $u \in V$, $P_h u \rightarrow u$ в V при $h \rightarrow 0$.

Пусть $\lambda_{\pm k}$ – собственное значение задачи (1) кратности s такое, что $\lambda_{\pm k} = \lambda_{\pm i}$, $i \in J_k$, $J_k = \mathbb{N}_{k+s-1} \setminus \mathbb{N}_{k-1}$, $U = U_{\pm k} = U(\lambda_{\pm k})$ – собственное подпространство, отвечающее $\lambda_{\pm k}$, $\dim U_{\pm k} = s$, $U_{\pm k}^h = \text{span}\{u_{\pm i}^h, i \in J_k\}$, $u_{\pm i}^h$, $i \in J_k$, – собственные элементы приближенной схемы (2). Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon^h = \sup_{u \in U, \|u\|=1} \varepsilon_h(u),$$

$$\delta_1^h = \|(a_h - a)|_{P_h U \times V_h}\| + \|(b_h - b)|_{P_h U \times V_h}\|,$$

$$\delta_2^h = \|(a_h - a)|_{P_h U \times P_h U}\| + \|(b_h - b)|_{P_h U \times P_h U}\|.$$

Теорема 7. Для достаточно малых h выполняется оценка $\vartheta(U_{\pm k}, U_{\pm k}^h) \leq c(\varepsilon^h + \delta_1^h)$, $k \in J_{\pm}$.

Теорема 8. Пусть $u_{\pm i}^h$, $i \in J_{\pm}^h$ – собственные элементы приближенной задачи (2) такие, что $a_h(u_{\pm i}^h, u_{\pm j}^h) = \delta_{ij}$, $b_h(u_{\pm i}^h, u_{\pm j}^h) = \delta_{ij}/\lambda_{\pm i}^h$, $i, j \in J_{\pm}^h$, $a_h(u_{\pm i}^h, u_{\mp j}^h) = b_h(u_{\pm i}^h, u_{\mp j}^h) = 0$, $i \in J_{\pm}^h$, $j \in J_{\mp}^h$. Тогда при фиксированном $k \in J_{\pm}$ и достаточно малом h существуют собственные элементы $u_{\pm i}$, $i \in J_{\pm}$ задачи (1), $a(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}$, $b(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}/\lambda_{\pm i}$, $i, j \in J_{\pm}$, $a(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = b(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = 0$, $i \in J_{\pm}$, $j \in J_{\mp}$, для которых выполняются оценки погрешности $\|u_{\pm i}^h - u_{\pm i}\| \leq c(\varepsilon^h + \delta_1^h)$, $i \in \mathbb{N}_k$.

Теорема 9. Для достаточно малых h справедлива оценка $|\lambda_{\pm k}^h - \lambda_{\pm k}| \leq c[\delta_2^h + (\varepsilon^h + \delta_1^h)^2]$, $k \in J_{\pm}$.

5. Дифференциальная задача.

Пусть $\Omega = (0, l)$, $\bar{\Omega} = [0, l]$. Зададим достаточно гладкие функции $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, для которых существуют положительные постоянные p_1 , p_2 , q_2 , r_2 такие, что $p_1 \leq p(x) \leq p_2$, $0 \leq q(x) \leq q_2$, $|r(x)| \leq r_2$ для $x \in \bar{\Omega}$. Рассмотрим дифференциальную задачу на собственные значения: найти числа λ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, такие, что $-(pu')' + qu = \lambda ru$, $x \in (0, l)$, $u(0) = u(l) = 0$.

Вариационная постановка дифференциальной задачи на собственные значения имеет вид (1). Билинейная форма a является положительно-определенной и ограниченной, а форма b является вполне непрерывной. Поэтому для дифференциальной задачи справедливы теоремы 1–3.

Разобьем отрезок $[0, l]$ равноотстоящими точками $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, m$, на элементы $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $h = l/m$. Обозначим через V_h подпространство пространства V , состоящее из функций v^h , принадлежащих пространству полиномов n -й степени на каждом элементе $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\dim V_h = mn - 1$. Определим билинейные формы a_h и b_h с помощью составной квадратурной формулы точной для многочленов степени $2n - \nu - 1$ при $\nu = 0, 1$, на каждом элементе $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Вариационная постановка дифференциальной задачи аппроксимируется по методу конечных элементов с численным интегрированием (2). Для приближенной задачи справедливы теоремы 4–9 при $\varepsilon^h \leq ch^n$, $\delta_0^h \leq ch^{2-\nu}$, $\delta_1^h \leq ch^{n-\nu+1}$, $\delta_2^h \leq ch^{2n-\nu}$, $\nu = 0, 1$.

Теорема 10. Пусть $k \in J_{\pm}^h$, $\nu = 0, 1$. Тогда для достаточно малых h выполняются оценки погрешности $|\lambda_{\pm k}^h - \lambda_{\pm k}| \leq ch^{2n-\nu}$, $\vartheta(U_{\pm k}, U_{\pm k}^h) \leq ch^n$. Существуют ортонормированные собственные элементы $u_{\pm i}$, $i \in J_{\pm}$, $u_{\pm i}^h$, $i \in J_{\pm}^h$, для которых справедливы оценки погрешности $\|u_{\pm i}^h - u_{\pm i}\| \leq ch^n$, $i \in \mathbb{N}_k$, при фиксированном $k \in J_{\pm}$ и достаточно малом h , где $a_h(u_{\pm i}^h, u_{\pm j}^h) = \delta_{ij}$, $b_h(u_{\pm i}^h, u_{\pm j}^h) = \delta_{ij}/\lambda_{\pm i}^h$, $i, j \in J_{\pm}^h$, $a_h(u_{\pm i}^h, u_{\mp j}^h) = b_h(u_{\pm i}^h, u_{\mp j}^h) = 0$, $i \in J_{\pm}^h$, $j \in J_{\mp}^h$, $a(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}$, $b(u_{\pm i}, u_{\pm j}) = \delta_{ij}/\lambda_{\pm i}$, $i, j \in J_{\pm}$, $a(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = b(u_{\pm i}, u_{\mp j}) = 0$, $i \in J_{\pm}$, $j \in J_{\mp}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьёв С.И. Метод конечных элементов для несамосопряженных спектральных задач // Ученые записки Казанского государственного университета. Сер. Физ.-матем. науки. — 2006. — Т. 148, кн. 4. — С. 51–62.
2. Соловьёв С.И. Аппроксимация вариационных задач на собственные значения // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 1022–1032.
3. Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближенные методы. — Saargbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.
4. Соловьёв С.И. Аппроксимация неотрицательно-определенных спектральных задач // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 8. — С. 1075–1082.
5. Соловьёв С.И. Аппроксимация знаконеопределенных спектральных задач // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 7. — С. 1042–1055.
6. Соловьёв С.И. Аппроксимация дифференциальных задач на собственные значения // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 7. — С. 936–944.
7. Соловьёв С.И. Аппроксимация дифференциальных задач на собственные значения с нелинейной зависимостью от параметра // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 7. — С. 955–962.
8. Solov'ev S.I. Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // Applied Numerical Mathematics. — 2014. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2014.02.009>

REFERENCES

1. **Solov'ev S.I.** Finite element method for non-selfadjoint spectral problems [Metod konechnukh elementov dlja nesamocoprjzhennykh spektral'nykh zadach] // *Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauki.* – 2006. – V. 148, Book 4. – P. 51–62 (in Russian).
2. **Solov'ev S.I.** Approximation of variational eigenvalue problems // *Differential Equations.* – 2010. – V. 46, № 7. – P. 1030–1041.
3. **Solov'ev S.I.** Non-linear Eigenvalue Problems. Approximate Methods [Nelineinye zadachi na sobstvennye znacheniya. Priblizhennye metody]. – Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 256 p. (in Russian)
4. **Solov'ev S.I.** Approximation of Positive Semidefinite Spectral Problems // *Differential Equations.* – 2011. – V. 47, № 8. – P. 1188–1196.
5. **Solov'ev S.I.** Approximation of Sign-Indefinite Spectral Problems // *Differential Equations.* – 2012. – V. 48, № 7. – P. 1028–1041.
6. **Solov'ev S.I.** Approximation of Differential Eigenvalue Problems // *Differential Equations.* – 2013. – V. 49, № 7. – P. 908–916.
7. **Solov'ev S.I.** Approximation of differential eigenvalue problems with a Nonlinear Dependence on the Parameter // *Differential Equations.* – 2014. – V. 50, № 7. – P. 947–954.
8. **Solov'ev S.I.** Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // *Applied Numerical Mathematics.* – 2014. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2014.02.009>