УДК 517.958

ОПТИМАЛЬНЫЙ МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОЙ КУСОЧНО ПОСТОЯННОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В.Г. КОРНЕЕВ

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

E-mail vad.korneev2011@yandex.ru

OPTIMAL DOMAIN DECOMPOSITION METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF ELLIPTIC EQUATION WITH DISCONTINUOUS

V.G. KORNEEV

St. Petersburg State University, St. Petersburg State Polytechnical University

Аннотация

Рассматривается эллиптическое уравнение второго порядка в области, составленной из конечного числа ячеек произвольной неравномерной ортогональной сетки, являющихся подобластями декомпозиции. В качестве модельного взято уравнение в дивиргентной форме с диагональной матрицей коэффициентов, которые принимают произвольные положительные конечные значения в каждой ячейке этой сетки. Переменная ортогональная дискретизационная конечно-элементная сетка удовлетворяет только одному условию: на каждой ячейке декомпозиционной сетки она равномерная. Для решения конечноэлементной задачи предлагается итерационный метод декомпозиции области типа Дирихле-Дирихле, имеющий линейную сложность. Наиболее трудной проблемой при его создании является получение эффективного предобусловливателя-солвера для интерфейсного дополнения Шура. Она тесно связана с получением граничных норм для дискретно-гармонических конечно-элементных функций в узких прямоугольниках.

Ключевые слова: Метод декомпозиции области, предобусловливание, эллиптическое уравнение с переменной ортотропией, метод конечных элементов, параллельные алгортмы, оптимальные итерационные методы

Summary

Second order elliptic equation is considered in the domain, which is the union of a finite number of cells of an arbitrary nonuniform orthogonal decomposition grid. For a model problem is taken the equation in the divergent form and the diagonal matrix of coefficients, which are arbitrary positive finite numbers in each cell. The variable orthogonal finite element discretization mesh has to satisfy only one condition: it is uniform in each cell. No other conditions on the coefficients of the elliptic equation and step sizes of the discretization and decomposition meshes are imposed. For the resulting finite element problem, we suggest the domain decomposition algorithm of linear total arithmetical complexity, not depending on any of the three factors contributing to the orthotropism of the discretization on subdomains. The main problem at designing such an algorithm is preconditioning of the inter-subdomain Schur complement. It is closely related to the derivation of boundary norms for discrete harmonic finite element functions on the shape irregular rectangles.

Key words: Method of domain decomposition, preconditioning, elliptic equation with piece wise constant orthotropism, finite element method, parallel algorithms, optimal iterative methods.

1. Модельная краевая задача.

В качестве модельной рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения 2-го порядка, в области $\Omega : \overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{J} \overline{\Omega}_j$, составленной из конечного числа J ячеек Ω_j произвольной ортогональной сетки, называем декомпозиционной. Ее обобщенная формулировка имеет вид

$$\alpha_\Omega(u,v) \equiv \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\rho}(x)\, \nabla v(x)\, dx = \langle f, v\rangle\,, \quad \forall\, v \in \mathring{H}^1(\Omega)\,, \tag{1}$$

причем диагональная 2×2 матрица $\boldsymbol{\rho} = \mathrm{diag}\,[\rho_1,\rho_2]$ коэффициентов уравнения на каждой ячейке сетки постоянна, т. е. $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_j = \mathrm{diag}\,[\rho_{1,j},\rho_{2,j}]$ при $x\in\Omega_j$, где $\rho_{k,j}$ – произвольные положительные числа. Относительно дискретной задачи

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{2}$$

предполагаем, что она получена посредством МКЭ с билинейными конечными элементами на неравномерной ортогональной сетке, удовлетворяющей двум условиям:

- декомпозиционная сетка вложена в дискретизационную,
- дискретизационная сетка равномерна на каждой подобласти. Сложность дискретнай задачи (2) обусловлена многочисленными независимыми факторами ортотропии: конфигурацией подобластей Ω_j и конечных элементов, на аспектные отношения сторон которых не накладывается никаких ограничений так же как на отношения $\rho_{2,j}/\rho_{1,j}$, $j=1,2,\ldots,J$, произвольно изменяющихся по величине от подобласти к подобласти. Для решения системы алгебраических уравнений (2) удается построить метод декомпозиции области (МДО) типа Дирихле-Дирихле с подобластями декомпозиции Ω_j, имеющий линейную вычислительную сложность.

Ниже для симметричных неотрицательных $n\times n$ матриц $\mathbf{A},\mathbf{B}$ неравенство $\mathbf{A}\leqslant\mathbf{B}$ подразумевает, что $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ неотрицательна, в то время как $\mathbf{A}\prec\mathbf{B}$ равносильно неравенству $\mathbf{B}-c\mathbf{A}\geqslant 0$ с постоянной $c>0$ независящей от n. Обозначение $\mathrm{ops}\,[\cdot]$ используется для числа арифметических действий операции, стоящей в квадратных скобках, $\mathrm{diag}\,[\mathbf{A}_l]_{l=1}^L$ – для блочно диагональной матрицы с блоками $\mathbf{A}_l$.

2. Предобусловливатель метода декомпозиции области.

Пусть U,U_I,U_B,U_V, соответственно, пространства всех степеней свободы, степеней свободы внутренних для подобластей Ω_j, степеней свободы интерфесной границы $B\subset\Omega$, сторон $E_q\subset B$ и вершин подобластей, из чего следует $U=U_I+U_B$, $U_B=U_E+U_V$. Матрица $\mathbf{K}$ может быть представлена в блочной форме

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_I & \mathbf{K}_{IB} \\ \mathbf{K}_{BI} & \mathbf{K}_B \end{pmatrix}, \tag{3}$$

с блоками на диагонали $\mathbf{K}_I : U_I\to U_I$ и $\mathbf{K}_B : U_B\to U_B$, первый из которых является блочно диагональным $\mathbf{K}_I = \mathrm{diag}\,[\,\mathbf{K}_{I,j}\,]_{j=1}^J$. Обращенный МДО предобусловливатель рассматриваемого типа имеет в общем случае вид

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\mathrm{DD}}^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{K}}_I^{+} + \mathbb{P}_B\boldsymbol{\mathcal{S}}_{B,\mathrm{it}}^{-1}\mathbb{P}_B^{\top}\,, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{K}}_I = \mathrm{diag}\,[\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_{I,j}\,]_{j=1}^J$ и $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{B,\mathrm{it}}$ – предобусловливатели для $\mathbf{K}_I$ и дополнения Шура $\mathbf{S}_B = \mathbf{K}_B - \mathbf{K}_{BI}\mathbf{K}_I^{-1}\mathbf{K}_{IB}$, $\mathbf{A}^+$ обозначает матрицу псевдообратную матрице $\mathbf{A}$, $\mathbb{P}_B = (\mathbb{P}_I^\top,\mathbf{I})^\top : U_B\to U$ – оператор продолжения $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Для локальных дискретных задач Дирихле с матрицами $\mathbf{K}_{I,j}$ имеется ряд многоуровневых итерационных методов линейной сложности, рассматривавшиеся, например, в [1] и во многих других работах. Их целесообразно применять как неточные солверы, неявно определяющие предобусловливатели $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{I,j} = \boldsymbol{\mathcal{K}}_{I,j,\mathrm{it}}$, спектрально эквивалентные матрицам $\mathbf{K}_{I,j}$. В частности, в [2] для регулярных дискретизаций МКЭ было показано, что достаточно одной итерации многосеточного метода, чтобы получить предобусловливатель спектрально эквивалентный матрице МКЭ равномерно по параметру сетки. Глобальный оператор продолжения $\mathbb{P}$ однозначно определяется локальными операторами продолжения $\mathbb{P}_{B_j} = (\mathbb{P}_{I_j}^\top,\mathbf{I_j})^\top : U_{B_j}\to U_j$, где U_j и U_{B_j} ограничения пространств U и U_B на $\overline{\Omega}_j$ и $\partial\Omega_j$. Локальным операторам продолжения, особенно для достаточно регулярных дискретизаций, также уделялось много внимания, см. [1, 3–6]. Это позволяет применять оптимальные операторы продолжения для подобластей

Ω_j. В связи со сказанным можно считать, что имеются локальные предобусловливатели и операторы продолжения, удовлетворяющие неравенствам

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{I,j} \prec \mathbf{K}_{I,j} \prec \boldsymbol{\mathcal{K}}_{I,j} \qquad \| \mathbb{P}_{B_j} \mathbf{v}_{B_j} \|_{\mathbf{K}_j} \prec \| \mathbf{v}_{B_j} \|_{\mathbf{S}_j} , \tag{5}$$

и

$$\mathrm{ops}\,[\boldsymbol{\mathcal{K}}_I^{-1} \mathbf{f}_I] \prec N_\Omega , \quad \forall \mathbf{f} \in U_I , \qquad \mathrm{ops}\,[\mathbb{P}\mathbf{v}_B] \prec N_\Omega , \quad \forall \mathbf{v}_B \in U_B , \tag{6}$$

в которых $\| \mathbf{v} \|_{\mathbf{A}}$ — норма вектора, порождаемая матрицей $\mathbf{A}$, N_Ω — число узлов дискретизационнй сетки на Ω.

3. Предобусловливатель дополнения Шура.

Наиболее сложным является построение предобусловливателя-солвера $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{B,\,\mathrm{it}}$ для дополнения Шура $\mathbf{S}_B$. Матрица $\mathbf{S}_B$ — результат сборки локальных дополнений Шура $\mathbf{S}_{B_j}$, которые получаем из матриц жесткости $\mathbf{K}_j$ для подобластей $\overline{\Omega}_j$ исключением внутренних для Ω_j степеней свободы. Известно много итерационных методов линейной сложности для решения систем уравнений с матрицами $\mathbf{S}_{B_j}$, см., например, работы [6—8] и библиографию в них. Многоуровневые декомпозициии пространств МКЭ на подобластях, лежащие в основе этих методов, в рассматриваемом случае несовместны на интерфейсной границе $\Gamma_\Omega = \cup_j \partial\Omega_j \setminus \partial\Omega$. Поэтому получить с их использованием быстрый солвер для систем с глобальной матрицей $\mathbf{S}_B$ затруднительно. Это относится и к солверам, получаемым с помощью технологий H-матриц, граничных элементов, тензорных аппроксимаций матриц и др. Работы [9—12] — это только несколько представителей этой обширной области исследований.

Нами предлагается предобусловливатель—солвер $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{B,\,\mathrm{it}}$, определяемый неявно посредством неточного итерационного процесса. В итерационном процессе участвуют два предобусловливателя — предобусловливатель—мультипликатор $\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(1)}$ и предобусловливатель—солвер $\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(2)}$, удовлетворяющие следующим условиям:

i) предобусловливатель $\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(1)}$ спектрально эквивалентен дополнению Шура и почти оптимален в операции умножения на произвольный вектор,

ii) предобусловливатель $\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(2)}$ определяется как наиболее близкий по спектру дополнению Шура среди тех, для которых имеется быстрый метод обращения[1)].

При применении двухслойного итерационного процесса с чебышевскими итерационными параметрами σ_k предобусловливатель—солвер удовлетворяет формуле

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_{B,\,\mathrm{it}}^{-1} = [\mathbf{I_B} - \prod_{k=1}^{\nu_\epsilon} (\mathbf{I_B} - \sigma_k (\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(2)})^{-1} \boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(1)}] \, (\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(1)})^{-1} . \tag{7}$$

Число итераций ν_ϵ можно принять соответствующим достижению относительной погрешности $\epsilon = 0.5$ в норме, порождаемой матрицей $\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(1)}$, при любом векторе в правой части решаемой системы. Оно известным образом зависит от величин $\underline{\gamma}_S, \overline{\gamma}_S$ в неравенствах

$$\underline{\gamma}_S \boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(2)} \prec \boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(1)} \prec \overline{\gamma}_S \boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(2)} . \tag{8}$$

Предобусловливатель $\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(2)}$ определяется достаточно просто. Пространство всех степеней свободы на Γ_Ω можно представить прямой суммой $U_B = U_V + \Sigma_q U_{E_q}$ подпространства U_V степеней свободы в узлах декомпозиционной сетки и подпространств U_{E_q}, $q = 1, 2, \ldots, Q$ степеней свободы на ее отрезках, снабженных обозначением E_q. Блочно диагональную матрицу $\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(2)}$ получаем путем обнуления в $\mathbf{S}_B$ всех блоков, связывающих подпространства в прямой сумме, кроме блоков, связывающих пары длинных сторон каждой подобласти Ω_j. Указанный способ получния предобусловливателя—солвера для дополнения

[1)] Говоря для краткости об обращении матрицы, всегда имеем в виду процедуру решения системы линейных алгебраических уравнений с этой матрицей.

Шура был использован для близких по свойствам дискретизациий в [9, 13] и в [14–16]. Эффективность предобусловливателя характеризуется оценками

$$\frac{1}{\overline{N}+\log\overline{N}}\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(2)} \prec \mathbf{S}_B \prec \boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(2)}, \qquad \mathrm{ops}\,[(\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(2)})^{-1}\mathbf{f}_B] \prec N_{\Gamma_\Omega}(1+\log\overline{N}) + \Psi_V\,, \tag{9}$$

приведенными с целью большей наглядности для прямоугольной области. В этом случае, если J_k, N_k – числа внутренних узлов, соответственно, декомпозиционной и дискретизационной сеток на сеточной линии $x_{3-k} \equiv \mathrm{const}$, то $\overline{N} = \max_k N_k$, $N_{\Gamma_\Omega} = J_1N_2 + J_2N_1$ и Ψ_V – число действий, затрачиваемых на решение системы уравнений МКЭ на декомпозиционной сетке, когда на каждой подобласти Ω_j задан один билинейный конечный элемент. Так как $\dim U_V$ существенно меньше размерности N_Ω системы (2), то даже при решении системы относительно степеней свободы в вершинах декомпозиционной сетки прямым методом величина Ψ_V во второй оценке (sss2) будет второстепенной. Это предполагается в дальнейшем.

Построение предобусловливателя-мультипликатора $\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(1)}$ облегчается тем, что операции умножения можно выполнять независимо для каждой подобласти, собирая затем соответствующий глобальный вектор из векторов полученных для каждой подобласти. Это ослабляет роль условий совместности и позволяет определять эвффективные (для операций умножения) декомпозиции пространств МКЭ для каждой подобласти Ω_j независимо при условии, что преобразования к совместному базису МКЭ почти оптимальны по вычислительной работе. Основанием построения служит граничная норма для гармонических функций в произвольном прямоугольнике Ω_j, полученная в [16] и являющаяся обобщением известной нормы в пространстве $H^{1/2}(\pi_1)$ для единичного квадрата $\pi_1 = (0,1)\times(0,1)$. Было установлено, что на подпространстве конечно-элементных функций полученная норма сохраняет свой вид, то есть порождающая ее матрица спектрально эквивалентна матрице $\mathbf{S}_{B_j}$. Затем вид дискретной нормы был упрощен до практически явного ее выражения посредством конечно-разностных операторов, при сохранении спектральной эквивалентности и оптимальности операций умножения матрицы, порождающей норму, на вектор. Для этой матрицы согласно [16, 17] имеем

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(1)} \prec \mathbf{S}_B \prec \boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(1)}, \qquad \mathrm{ops}\,[\boldsymbol{\mathcal{S}}_B^{(1)}\mathbf{f}_B] \prec N_{\Gamma_\Omega}(1+\log\overline{N})\,. \tag{10}$$

Не трудно увидеть, что свойства компонент предобусловливателя МДО, отраженные в (5), (6), (9) и (10), достаточны для заключения о его спектральной эквивалентности матрице МКЭ и оптимальности по арифметической работе соответствующего МДО для системы (2). То есть

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}_{DD} \prec \mathbf{K} \prec \boldsymbol{\mathcal{K}}_{DD}\,, \qquad \mathrm{ops}\,[\boldsymbol{\mathcal{K}}_{DD}^{-1}\mathbf{f}] \prec N_\Omega\,,\ \forall \mathbf{f}\in U\,, \tag{11}$$

с постоянными, не зависящими от чисел $\rho_{k,j}$ и, в рамках сформулированных условий, от густоты и конфигураций декмпозиционной и дискретизационной сеток.

Пионерной в исследовании МДО для задач, подобных рассматриваемой, была работа [9], см. также [13]. В [18] к ним был применен несколько другой подход. В двух первых работах неточные солверы для предобусловливания дополнения Шура не применялись, в последней предобусловливателем–мультипликатором служила диагональная матрица. Как следствие оценки трудоемкости МДО зависели от аспектных отношений, характеризующих степень ортотропии дискретизаций на подобластях Ω_j. В [16] эту зависимость удалось устранить за счет более эффективного предобусловливания задачи на интерфейсной границе.

4. Заключение.

Укажем некоторые обобщения. Тот же предобусловливатель МДО с той же оценкой арифметической работы, очевидно, применим для решения уравнения, коэффициенты которого являются переменными на каждой подобласти, но несильно отличаются от постоянных. Число подобластей декомпозиции может расти с ростом числа степеней свободы, примеры таких вариантов рассмотренного алгоритма для сингулярных дискретизаций рассматривались в [19, 20].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Griebel M. and Oswald P.** Tensor product type subspace splittings and multilevel iterative methods for anisothropic problems// Advances Comput. Math. — 1995. — V. 4. — P. 171—201.
2. **Jung M. and Langer U.** Application of multilevel methods to practical problems // Surveys on Mathematics for Industry. — 1991. — V. 1. — P. 217—257.
3. **Nepomnyaschikh S.** Method of splitting into subspaces for solving elliptic boundary value problems in complex—form domains// Russian (cont. Sov.) Journal on Numerical Analysis and Mathematical Modeling. — 1991. — V. 6, № 2. — P. 151—168.
4. **Haase G., Langer U., Meyer A. and Nepomnyaschikh S.** Hierarchical extension operators and local multigrid methods in domain decomposition preconditioners// East-West Journal of Numerical Mathematics. — 1994. — V. 2. — P. 173—193.
5. **Haase G. and Nepomnyaschikh S.** Extension explicit operators on hierarchical grids// East-West Journal of Numerical Mathematics. — 1997. — V. 5. — P. 231—248.
6. **Oswald P.** Interface preconditioners and multilevel extension operators // C.-H. Lai, P. Bjørstad, M. Cross and O. Widlund (eds.), Proc. 11th Int. Conf. on Domain Decomposition Methods in Science and Engineering, Greenwich, July 20-24. — (ddm.org), 1998. — P. 96—103.
7. **Pflaum C.** Robust confergence of multilevel algorithms for convection-difusion equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2000 — V. 37, № 2. — P. 443—469.
8. **Schieweck N.** A multigrid convergence proof by a strengthened Cauchy inequality for symmetric elliptic boundary value problems // G. Telschow (ed.), Second Multigrid Seminar, Garzau. Report R—MATH—08/86. — Karl—Weierstrass—Institut, Berlin, 1985. — P. 289—309.
9. **Khoromskij B.N. and Wittum G.** Robust Schur complement method for strongly anisotropic elliptic equations // J. Numer. Linear Algebra with Appl. — 1999. — V. 6. — P. 1-33.
10. **Hsiao G.C., Khoromskij B.N., and Wendland W.L.** Preconditioning for Boundary Element Methods in Domain Decomposition // Eng. Analysis with Boundary Elements. — 2001. — V. 25. —P. 323-338.
11. **Hackbusch W., Khoromskij B.N. and Kriemann R.** Direct Schur complement method by domain decomposition based on H-matrix approximation // Computing and Visualization in the Sciences. — 2005. — P. 179-188.
12. **Dolgov S.V., Khoromskij B.N., Oseledets I. and Tyrtyshnikov E.E.** A reciprocal preconditioner for structured matrices arising from elliptic problems with jumping coefficients. // Linear Algebra Appl. — 2011 — DOI: 10.1016/j.laa.2011.09.010.
13. **Khoromskij B.N. and Wittum G.** Numerical Solution of Elliptic Differential Equations by Reduction to the Interface. — Research monograph, LNCSE, No. 36, Springer-Verlag, 2004.
14. **Корнеев В.Г.** Почти оптимальный метод решения задач Дирихле на подобластях декомпозиции иерархической hp-версии // Дифференциальные уравнения. — 2001. — Т. 37, № 7. — С. 959-968.
15. **Korneev V.G.** Local Dirichlet problems on subdomains of decomposition in hp discretizations and optimal algorithms for their solution // Математическое моделирование. — 2002. — V. 14, № 5. — P. 51-74.
16. **Korneev V., Poborchi S. and Salgado A.** Interface Schur complement preconditioning for piece wise orthotropic discretizations with high aspect ratios // Быстрые сеточные методы вычислительной механики сплошной среды, V.G. Korneev (ed). — Санкт—Петербург: Санкт—Петербургский гос. университет, Издательство «Золотое сечение», 2007. — С. 106—159.
17. **Korneev V.G., Langer U.** Dirichlet—Dirichlet domain decomposition methods for elliptic problems. — New Jersey-London-Beijing-Hong Kong:World Scientific Publishing Company, 2014. — 484 p.
18. **Kwak D., Nepomnyaschikh S. and Pyo H.** Domain decomposition for model heterogeneous anisotropic problem // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2004. — V. 10, № 1-2. — P. 129-157

19. **Korneev V.G.** Fast domain decomposition algorithms for stiffness matrices of reference p-elements // Computational methods in applied mathematics. – 2011. – V. 11, № 2. – P. 3-26.

20. **Korneev V.G.** Solving discrete Dirichlet problems on spectral finite elements by fast domain decomposition algorithm // Applied mechanics and materials. – 2014. – V. 587–589. – P. 2312–2329.

REFERENCES

1. **Griebel M. and Oswald P.** Tensor product type subspace splittings and multilevel iterative methods for anisothropic problems// Advances Comput. Math. – 1995. – V. 4. – P. 171–201.
2. **Jung M. and Langer U.** Application of multilevel methods to practical problems // Surveys on Mathematics for Industry. – 1991. – V. 1. – P. 217–257.
3. **Nepomnyaschikh S.** Method of splitting into subspaces for solving elliptic boundary value problems in complex–form domains// Russian (cont. Sov.) Journal on Numerical Analysis and Mathematical Modeling. – 1991. – V. 6, N 2. – P. 151–168.
4. **Haase G., Langer, U., Meyer A. and Nepomnyaschikh S.** Hierarchical extension operators and local multigrid methods in domain decomposition preconditioners// East-West Journal of Numerical Mathematics. – 1994. – V. 2. – P. 173–193.
5. **Haase G. and Nepomnyaschikh S.** Extension explicit operators on hierarchical grids// East-West Journal of Numerical Mathematics. – 1997. – V. 5. – P. 231–248.
6. **Oswald P.** Interface preconditioners and multilevel extension operators // C.-H. Lai, P. Bjørstad, M. Cross and O. Widlund (eds.), Proc. 11th Int. Conf. on Domain Decomposition Methods in Science and Engineering, Greenwich, July 20-24. – (ddm.org), 1998. – P. 96–103.
7. **Pflaum C.** Robust confergence of multilevel algorithms for convection-difusion equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2000 – V. 37, № 2. – P. 443–469.
8. **Schieweck, N.** A multigrid convergence proof by a strengthened Cauchy inequality for symmetric elliptic boundary value problems // G. Telschow (ed.), Second Multigrid Seminar, Garzau. Report R–MATH–08/86. – Karl–Weierstrass–Institut, Berlin, 1985. – P. 289–309.
9. **Khoromskij B.N. and Wittum G.** Robust Schur complement method for strongly anisotropic elliptic equations // J. Numer. Linear Algebra with Appl. – 1999. – V. 6. – P. 1-33.
10. **Hsiao G.C., Khoromskij B.N., and Wendland W.L.** Preconditioning for Boundary Element Methods in Domain Decomposition // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2001. – V. 25. –P. 323-338.
11. **Hackbusch W., Khoromskij B.N. and Kriemann R.** Direct Schur complement method by domain decomposition based on H-matrix approximation // Computing and Visualization in the Sciences. – 2005. – P. 179-188.
12. **Dolgov S.V., Khoromskij B.N., Oseledets I. and Tyrtyshnikov E.E.** A reciprocal preconditioner for structured matrices arising from elliptic problems with jumping coefficients. // Linear Algebra Appl. – 2011 – DOI: 10.1016/j.laa.2011.09.010.
13. **Khoromskij B.N. and Wittum G.** Numerical Solution of Elliptic Differential Equations by Reduction to the Interface. – Research monograph, LNCSE, No. 36, Springer-Verlag, 2004.
14. **Korneev V.G.** An almost optimal method for Dirichlet problems on decomposition subdomains of the hierarchical hp-version // Differential equations. – 2001. – V. 37, № 7. – P. 1008-1018.
15. **Korneev V.G.** Local Dirichlet problems on subdomains of decomposition in *hp* discretizations and optimal algorithms for their solution // Matematicheskoe Modelirovanie. – 2002. – V. 14, № 5. – P. 51-74.
16. **Korneev V., Poborchi S. and Salgado A.** Interface Schur complement preconditioning for piece wise orthotropic discretizations with high aspect ratios // Fast grid computing methods in continuum mechanics, V.G. Korneev (ed). – Saint-Petersburg: St.-Petersburg State University, Publisher «Zolotoe sechenie», 2007. – P. 106–159.

17. **Korneev V.G., Langer U.** Dirichlet–Dirichlet domain decomposition methods for elliptic problems. – New Jersey-London-Beijing-Hong Kong:World Scientific Publishing Company, 2014. – 484 p.
18. **Kwak D., Nepomnyaschikh S. and Pyo H.** Domain decomposition for model heterogeneous anisotropic problem // Numerical Linear Algebra with Applications. – 2004. – V. 10, № 1-2. – P. 129-157
19. **Korneev V.G.** Fast domain decomposition algorithms for stiffness matrices of reference p-elements // Computational methods in applied mathematics. – 2011. – V. 11, № 2. – P. 3-26.
20. **Korneev V.G.** Solving discrete Dirichlet problems on spectral finite elements by fast domain decomposition algorithm // Applied mechanics and materials. – 2014. – V. 587–589. – P. 2312–2329.