УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ И НЕСОГЛАСОВАННЫХ СЕТОК ПРИ РЕШЕНИИ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РЕШЕНИЕ[1)]

М.А. ИГНАТЬЕВА[1], А.В. ЛАПИН[1], Е. ЛАТИНЕН[2]

[1] *Казанский (Приволжский) федеральный университет,*
[2] *Университет Оулу (Финляндия)*
E-mail avlapine@mail.ru

APPLICATION THE DOMAIN DECOMPOSITION METHODS AND NON-MATCHED GRIDS TO SOLVING THE VARIATIONAL INEQUALITIES WITH CONSTRAINTS ON THE SOLUTION

M.A. IGNATIEVA[1], A.V. LAPIN[1], E. LAITINEN[2]

[1] *Kazan Federal University,* [2] *University of Oulu (Finland)*

Аннотация

Предложены методы численного решения вариационных неравенств с ограничениями на решение. Предполагается, что известна подобласть, содержащая свободную границу. При переходе к конечномерной задаче в этой подобласти и оставшейся части области построены равномерные сетки с различными шагами и с узлами, частично несовпадающими на общих границах областей. Непрерывность решения на общих границах обеспечена введением множителей Лагранжа. Проведен сравнительный численный анализ двух итерационных методов решения построенной дискретной модели — метода расщепления и метода Удзавы.

Ключевые слова: Задача со свободной границей, вариационные неравенства, несогласованные сетки, множители Лагранжа, итерационные методы

Summary

A numerical method is proposed for solving a class of two-dimensional boundary value problems which are characterized by discontinuous gradients of solutions. The method is based on domain decomposition with the localization of a subdomain containing the free boundary, and corresponding splitting of the original boundary value problem into a system of problems in the subdomains. These problems in the subdomains are interconnected through the boundary conditions on the common boundaries. They are approximated by finite-difference schemes on different grids, partially matching on the common boundaries. For the constructed discrete model two iterative solution methods were used — splitting method and Uzawa method. A comparative analysis of the effectiveness of these methods was done on the basis of numerical experiments

Key words: Free-boundary problems, variational inequalities, non-matching grids, Lagrange multipliers, iterative methods.

Введение

Рассмотрена задача минимизации функционала, содержащего квадратичное слагаемое и выпуклую, не дифференцируемую часть. В зависимости от выбора этой недифференцируемой части мы получаем математические модели различных процессов со свободными границами [1—3]. Входные данные задачи таковы, что нам a priori известна подобласть, содержащая свободную границу. Для решения задачи использован метод декомпозиции области [4] и конечно-разностная аппроксимация. Сетка в подобласти со свободной границей выбрана в несколько раз мельче, чем в остальной области. На границе, разделяющей

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00368)

подобласти, сетки не совпадают, а условие сопряжения решений из подобластей обеспечивается с помощью введения множителей Лагранжа. Основным результатом работы является сравнительный численный анализ итерационных методов решения построенной дискретной модели. В качестве таких итерационных методов рассмотрены методы расщепления и Удзавы. Отметим, что эти итерационные методы могут быть использованы и для решения других сеточных задач, построенных любым из перечисленных выше сеточных методов. Это обусловлено тем, что сходимость и эффективность итерационных методов определяются лишь свойствами матриц и операторов дискретной задачи, которые могут быть подобными для различных дифференциальных задач и различных аппроксимаций.

1. Постановка задачи и ее аппроксимация.

Пусть $\Omega=(0,1)\times(0,1)$, $\Omega_2=(0.4,0.6)\times(0,1)$, $\Omega_1=\Omega\backslash\Omega_2$ и $S=\{x_1=0.4 \text{ и } x_1=0.6,\ 0<x_2<1\}$ – общая граница Ω_1 и Ω_2. Будем рассматривать следующую задачу: найти

$$\min_{u\in H_0^1(\Omega)}\{J(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2dx-\int\limits_{\Omega}fudx+\psi(u)\}. \tag{1}$$

Здесь $f\in L_2(\Omega)$ – заданная функция, $\psi(u)$ – выпуклая функция, в качестве примеров которой мы будем в дальнейшем рассматривать два варианта: $\psi(u)=\int\limits_{\Omega_2}|u(x)|dx$ или $\psi(u)$ – индикаторная функция выпуклого и замкнутого множества $K=\{u\in H_0^1(\Omega):\ u(x)\geqslant 0 \text{ в } \Omega_2\}$, т.е. $\psi(u)=\{0 \text{ если } u\in K; +\infty \text{ иначе}\}$. В первом случае (1) является моделью задачи о фазовых переходах в фиксированный момент времени при неявной по времени аппроксимации нестационарной задачи Стефана. В этом случае известна локализация (подобласть Ω_2) границы фазового перехода $\{x : u(x) = 0\}$ по информации с предыдущего расчетного слоя. Во втором случае (1) – это задача о препятствии, описывающая контакт упругого тела с жестким основанием в точках $x\in\Omega_2$ [1], [3]. Функция $u(x)$ описывает перемещение точек упругого тела, $u(x)\geqslant 0$ в точках Ω_2 и $\{x\in\Omega_2: u(x)=0\}$ – это множество точек контакта.

Формальная поточечная запись задачи (1) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}-\Delta u(x)=f(x) \text{ при } x\in\Omega_1\cup S,\\ -\Delta u(x)+\partial\psi(u(x))\ni f(x) \text{ при } x\in\Omega_2,\\ u(x)=0 \text{ при } x\in\partial\Omega.\end{gathered} \tag{2}$$

Пусть u – решение (2) и u_i –сужение u на Ω_i. Тогда u_i удовлетворяют соответствующим уравнениям в подобластях Ω_i и условиям непрерывности функции и потока на общей границе S этих подобластей: $u_1(x)=u_2(x)$ и $\dfrac{\partial u_1}{\partial\mathbf{n_1}}(x)=-\dfrac{\partial u_2}{\partial\mathbf{n_2}}(x)$ для $x\in S$, где $\mathbf{n_i}$ – единичный вектор нормали к S, внешний для Ω_i. Введя дополнительно функцию λ на S, равную общему значению нормальных производных от u_1 и u_2, получим следующую задачу для отыскания тройки функций (u_1,u_2,λ):

$$-\Delta u_1=f_1 \text{ при } x\in\Omega_1;\ u_1=0 \text{ при } x\in\partial\Omega_1\setminus S;\ \frac{\partial u_1}{\partial\mathbf{n_1}}=-\lambda \text{ при } x\in S; \tag{3}$$

$$-\Delta u_2+P(u_2)=f_2 \text{ при } x\in\Omega_2;\ u_2=0 \text{ при } x\in\partial\Omega_2\setminus S;\ \frac{\partial u_2}{\partial\mathbf{n_2}}=\lambda \text{ при } x\in S, \tag{4}$$

$$u_1=u_2 \text{ при } x\in S. \tag{5}$$

Аппроксимируем задачу (3)–(5) конечно-разностной схемой на сетке, равномерной на каждой из подобластей. Именно, пусть в $\bar\Omega_1$ построена квадратная сетка с шагом H, а в $\bar\Omega_2$ – квадратная сетка с шагом $h=H/m$, где $m>0$ – фиксированное целое число (рис. 1). Пусть ω_1 и ω_2 – множества внутренних узлов этих сеток, $\partial\omega_i$ – узлы, лежащие на границе области Ω_i, $s_i=\{x\in\partial\omega_i|\ x\in S\}$. Будем обозначать через y_i, $i=1,2$, сеточные функции, определенные на $\omega_i\cup\partial\omega_i$. Обозначение

λ сохраним за сеточной функцией, заданной на s_2 — более мелкой сетке границы S. Далее $\partial_1 y = \dfrac{y(x_1+h,x_2)-y(x_1,x_2)}{h}$, $\bar\partial_1 y = \dfrac{y(x_1,x_2)-y(x_1-h,x_2)}{h}$ — разностные производные, аппроксимирующие $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ в точке $x=(x_1,x_2)$, $\partial_{n_2} y = \dfrac{y(x)-y(x-\mathbf{n_2}h)}{h}$ — аппроксимация нормальной производной в точке $x\in\Omega_2$ и $\Delta_h y = \partial_1\bar\partial_1 y + \partial_2\bar\partial_2 y$ — сеточный оператор Лапласа на сетке шага h. Аналогичные обозначения используем для сетки шага H.

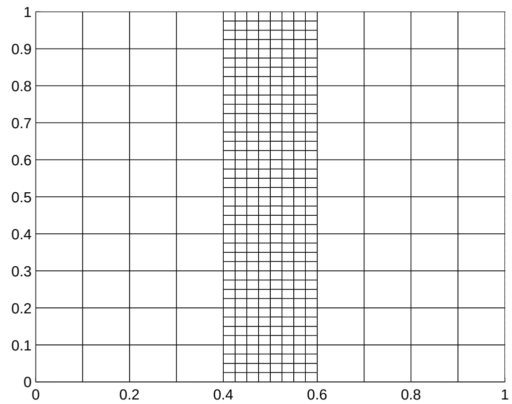

Рис. 1: Расчетная сетка

Сеточная схема для (3)–(5) имеет вид

$$\begin{gathered}-\Delta_H y_1 = f_1 \text{ при } x\in\omega_1,\ y_1=0 \text{ при } x\in\partial\omega_1\setminus s_1,\\ \partial_{n_1}y_1 - \frac{H}{2}\partial_2\bar\partial_2 y_1 = -B\lambda + \frac{H}{2}f_1 \text{ при } x\in s_1,\end{gathered}\tag{6}$$

$$\begin{gathered}-\Delta_h y_2 + \partial\psi(y_2) = f_2 \text{ при } x\in\omega_2,\ y_2=0 \text{ при } x\in\partial\omega_2\setminus s_2,\\ \partial_{n_2}y_2 - \frac{h}{2}\partial_1\bar\partial_1 y_2 = \lambda + \frac{h}{2}f_2 \text{ при } x\in s_2,\end{gathered}\tag{7}$$

$$B^T y_1 - y_2 = 0,\tag{8}$$

где $(B\lambda)(x_i) = \left(\lambda(x_i) + \sum\limits_{j=1}^{m-1}\left(\lambda(x_i-jh)+\lambda(x_i+jh)\right)(1-j/m)\right)/m$.

Ее векторно-матричная форма:

$$\begin{aligned} A_1y_1 + F_1\lambda &= f_1,\\ A_2y_2 + P(y_2) + F_2\lambda &= f_2,\\ F_1^Ty_1 + F_2^Ty_2 &= 0,\end{aligned}\tag{9}$$

где симметричные и положительно определенные матрицы A_1 и A_2 соответствуют сеточным операторам Лапласа в задачах (6) и (7), F_1 и F_2 — прямоугольные матрицы соответствующих размеров.

2. Итерационные методы.

Для решения системы (6), (7) применялись два итерационных метода: метод расщепления (обобщенный метод Дугласа-Рэкфорда) [5–7] и обобщенный метод Удзавы [3, 7, 8].

2.1. Метод расщепления

Задаются начальные приближения $(y_1^0, y_2^0, \lambda^0)$. Для известных $(y_1^n, y_2^n, \lambda^n)$ значения $(y_1^{n+1}, y_2^{n+1}, \lambda^{n+1})$ находятся в два шага:

$$\begin{cases} y_1^{n+1/2} = y_1^n + \tau_1(f_1 - A_1 y_1^n - F_1^T \lambda^n), \\ y_2^{n+1/2} + \tau_2 \partial\psi(y_2^{n+1/2}) \ni y_2^n + \tau_2(f_2 - A_2 y_2^n - F_2^T \lambda^n), \\ \lambda^{n+1/2} = \lambda^n + \tau_3(F_1^T y_1^n + F_2^T y_2^n), \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_1^{-1}E_1 + A_1 & 0 & F_1 \\ 0 & \tau_2^{-1}E_2 + A_2 & F_2 \\ F_1^T & F_2^T & -\tau_3^{-1}E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{n+1} - y_1^n \\ y_2^{n+1} - y_2^n \\ \lambda^{n+1} - \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^{-1}(y_1^{n+1/2} - y_1^n) \\ \tau_2^{-1}(y_2^{n+1/2} - y_2^n) \\ \tau_3^{-1}(\lambda^n - \lambda^{n+1/2}) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Здесь $\tau_i > 0$ – итерационные параметры, E_i – единичные матрицы соответствующих размеров. Как видно из (10), векторы $y_1^{n+1/2}$ и $\lambda^{n+1/2}$ находятся по явным формулам, а для отыскания $y_2^{n+1/2}$ требуется решить систему включений с диагональным оператором $\partial\psi$, поэтому система распадается на независимые скалярные уравнения относительно координат вектора $y_2^{n+1/2}$. Для рассматриваемых в статье задач решения этих уравнений выписываются в явном виде. Второй шаг метода состоит в решении системы линейных алгебраических уравнений относительно векторов $y_1^{n+1} - y_1^n$, $y_2^{n+1} - y_2^n$, $\lambda^{n+1} - \lambda^n$. Матрица этой системы – так называемая седловая матрица. Для решения систем уравнений с седловыми матрицами разработаны эффективные итерационные методы [9].

Другой вариант метода расщепления состоит из шага (10) и решения системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \tau_1^{-1}E_1 + A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2^{-1}E_2 + A_2 & 0 \\ F_1^T & F_2^T & -\tau_3^{-1}E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{n+1} - y_1^n \\ y_2^{n+1} - y_2^n \\ \lambda^{n+1} - \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^{-1}(y_1^{n+1/2} - y_1^n) \\ \tau_2^{-1}(y_2^{n+1/2} - y_2^n) \\ \tau_3^{-1}(\lambda^n - \lambda^{n+1/2}) \end{pmatrix} \tag{12}$$

Основным преимуществом метода (10),(12) по сравнению с методом (10),(11) является то, что система (12) расщепляется на независимые системы уравнений для векторов y_1^{n+1} и y_2^{n+1}, которые могут решаться параллельно. При этом λ^{n+1} находится по явным формулам.

2.2. Обобщенный метод Удзавы

Задается начальное приближение λ^0. Для известного λ^n сначала находятся (y_1^{n+1}, y_2^{n+1}):

$$A_1 y_1^{n+1} = f_1 - F_1 \lambda^n, \tag{13}$$

$$A_2 y_2^{n+1} + \partial\psi(y_2^{n+1}) \ni f_2 - F_2 \lambda^n. \tag{14}$$

Отметим, что задачи для y_1^{n+1} и y_2^{n+1} независимы. Решение (14) с симметричной и положительно определенной матрицей A_2 и диагональным оператором P эффективно осуществляется методом верхней релаксации [7].

На втором шаге метода Удзавы определяется вектор λ^{n+1} по явным формулам:

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \tau(F_1^T(y_1^{n+1}) + F_2^T(y_2^{n+1})).$$

3. Вычислительные эксперименты.

Был проведен ряд вычислительных экспериментов, в которых сеточная схема (7) решалась методом расщепления (10)–(11) и методом Удзавы (13)–(14).

В первой тестовой задаче (задаче Стефана) $\partial\psi(u) = \{-1$ при $u < 0$; $[-1, 1]$ при $u = 0$; 1 при $u > 0.\}$ Правая часть $\{f_{1,2}(x, y) = 400$ если $x < 0.57 - 0.6(y - 0.5)^2; -400$ иначе$\}$. Во второй тестовой задаче (задаче о препятствии) $\partial\psi(u) = \{(-\infty, 0]$ при $u \leqslant 0$; 0 при $u > 0\}$. Правая часть $f_{1,2}(x, y) = \{400$ если $x \leqslant 0.4$; -750 если $0.4 < x < 0.6$; 200 если $x \geqslant 0.6\}$. В области Ω_1 была построена квадратная сетка шага H, в области Ω_2 шаг построенной сетки $h = H/4$.

При практическом использовании рассматриваемых здесь методов критерием точности является норма невязки в сеточных уравнениях. Этот критерий особенно прост в использовании при решении дискретной задачи методом Удзавы, поскольку задачи для y_1 и y_2 на каждой итерации решаются точно, и требуется контролировать лишь их разность на общей границе подобластей — в точках сетки на S. В проведенных экспериментах вычисления проводились пока L_2-норма невязки схемы (7) не станет меньше $\varepsilon = 0.01$. Начальное приближение было выбрано в виде $y_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$. В методе расщепления итерационный параметр τ_3 подбирался экспериментально, параметры τ_1 и τ_2 были определены как теоретически оптимальные [7]. В методе Удзавы параметр τ также был найден экспериментально. Найденные значения параметров показаны в табл. 1 и 2. Видно, что значения параметров не зависят от шага сетки. Зависимость числа итераций от шага сетки в методах расщепления и Удзавы представлена в табл. 1 и 2.

H	метод расщепления		метод Удзавы	
	τ_3	итер.	τ	итер.
0.05	10	148	1.5	463
0.025	10	308	1.5	669
0.0125	10	641	1.5	869
0.00625	10	1217	1.5	881

Табл. 1: Число итераций в задаче Стефана

H	метод расщепления		метод Удзавы	
	τ_3	итер.	τ	итер.
0.05	5	173	5	122
0.025	10	269	5	154
0.0125	10	495	5.3	175
0.00625	10	741	5	180

Табл. 2: Число итераций в задаче о препятствии

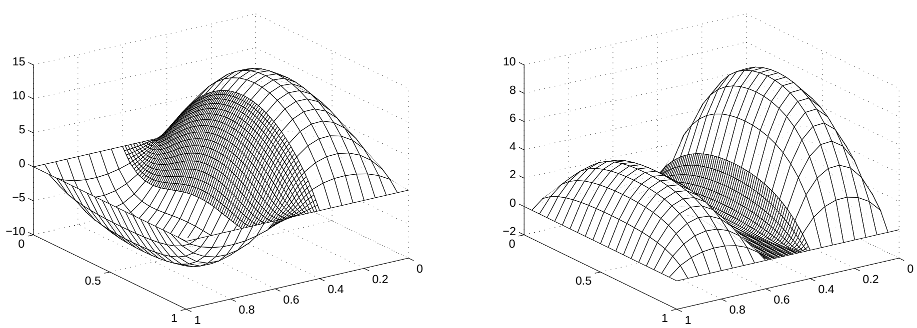

Рис. 2: Слева — решение первой задачи, справа — второй задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.
2. **Crank J.** Free and moving boundary problems. — Calderon Press, 1987.
3. **Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.** Численное исследование вариационных неравенств. — М.: Мир, 1979.

4. **Toselli A., Widlund O.** Domain decomposition methods – algoritms and theory // Springer Series in Comput. Math. – 2005. – V.34.
5. **Lions P.L., Mercier B.** Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators// SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – V. 16. – P. 964–979.
6. **Glowinski R., Le Tallec P.** Augmented Lagrangan and operator-splitting methods in nonlinear mechanics. – Philadelphia, PA: SIAM studies in applied mathematics. – 1989.
7. **Лапин А.В.** Итерационные методы решения сеточных вариационных неравенств. – Казань: Изд-во КГУ, 2008. – 132 с.
8. **Lapin A.** Preconditioned Uzawa-type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems// Lobachevskii J. Math. – 2010. – V. 31, № 4. – P. 309-322.
9. **Быченков Ю., Чижонков Е.В.** Итерационные методы решения седловых задач. – М: Бином, 2010.

REFERENCES

1. **Duvaut G., Lions J.-L.** Les inéquations en mécanique et en physique. – Paris: Dunod, 1972.
2. **Crank J.** Free and moving boundary problems. – Calderon Press, 1987.
3. **Glowinski R., Lions J.-L. and Tremolieres R.** Analyse numérique des inéquations variationnelles. – Paris: Dunod, 1976.
4. **Toselli A., Widlund O.** Domain decomposition methods – algoritms and theory. – Springer Series in Comput. Math. – V. 34, 2005.
5. **Lions P.L., Mercier B.** Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – V. 16. – P. 964-979.
6. **Glowinski R. and LeTallec P.** Augmented Lagrangan and operator-splitting methods in nonlinear mechanics. – Philadelphia, PA: SIAM studies in applied mathematics, 1989.
7. **Lapin A.** Iterative methods for solving mesh variational inequalities [Iteratcionnye metody resheniya setochnykh variatcionnykh neravenstv]. – Kazan: Kazan State University, 2008. – 132 p. (in Russian).
8. **Lapin A.** Preconditioned Uzawa-type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems // Lobachevskii J. Math. – 2010. – V. 31, No 4. – P. 309-322.
9. **Bychenkov Iu., Chizhonkov E.** Iterative solution methods for saddle point problems [Iteratcionnye metody resheniya sedlovykh zadach]. – Moscow: Binom, 2010 (in Russian).