УДК 519.853

МЕТОД ОТЫСКАНИЯ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРОЦЕДУРАХ ОТСЕЧЕНИЙ

И.Я. ЗАБОТИН, О.Н. ШУЛЬГИНА, Р.С. ЯРУЛЛИН

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail IYaZabotin@mail.ru; ONShul@mail.ru; YarullinRS@gmail.com

A METHOD BASED ON CUTTING PROCEDURES FOR FINDING PROJECTION OF THE POINT

I.Ya. ZABOTIN, O.N. SHULGINA, R.S. YARULLIN

Kazan Federal University

Аннотация

Предлагается метод отыскания проекции точки на выпуклое множество. Приближения в методе строятся с помощью конечных процедур проектирования точки на вспомогательные многогранные множества, содержащие решение исходной задачи. Для упрощения задач построения приближений предусмотрена возможность периодического обновления вспомогательных множеств.

Ключевые слова: Проекция, выпуклое множество, метод отсечений, отсекающие плоскости, сходимость.

Summary

Propose a method for finding a projection of the point on the convex set. In the method iteration points are constructed by finite procedures of a projection of the point on the auxiliary polyhedral sets containg a solution of the initial problem. The method is characterized by possibility of periodically updating auxiliary sets to simplify a problem of finding iteration points.

Key words: Projection, a convex set, a cutting method, cutting planes, convergence.

Введение

Потребность в проектировании точки на множество возникает на практике довольно часто, например, в связи с использованием алгоритмов условной минимизации функций. Предлагаемый здесь метод отыскания проекции точки на выпуклое множество характерен следующим. Каждое из строящихся методом приближений получается путем проектирования точки на некоторое вспомогательное множество, содержащее решение задачи. Следующее вспомогательное множество строится на основе предыдущего с помощью отсечения найденного приближения некоторыми плоскостями. На тех шагах, когда итерационные точки становятся достаточно близки к исходному множеству, происходит обновление вспомогательных множеств, например, за счет отбрасывания любого числа любых построенных ранее отсекающих плоскостей. Такие обновления позволяют существенно упрощать задачи поиска итерационных точек. Аналогичная идея отбрасывания отсечений реализована ранее в методе условной минимизации [1] и алгоритме проектирования [2]. Отметим, что метод, предложенный здесь, существенно отличается от алгоритма [2], в частности, более общими способами задания вспомогательных множеств, более удобными способами построения отсечений, а также возможностью комбинирования этого метода с другими алгоритмами проектирования без дополнительного исследования сходимости таких комбинированных алгоритмов.

1. Постановка задачи

Пусть $F(x)$ — выпуклая в n-мерном евклидовом пространстве R_n функция, $D = \{x \in R_n : F(x) \leqslant 0\}$. Решается задача нахождения проекции точки $y \in R_n$ на множество D.

Положим $D_\varepsilon = \{x \in R_n : F(x) \leqslant \varepsilon\}$, где $\varepsilon \geqslant 0$, $\partial F(x)$ — субдифференциал функции $F(x)$ в точке x, $p^* = Pr(y, D)$ — проекция точки y на множество D, $r^* = ||p^* - y||$, $K = \{0, 1, \ldots\}$.

2. Метод и его обсуждение

Предлагаемый для решения поставленной задачи метод вырабатывает последовательность приближений p_k, $k \in K$, и заключается в следующем.

Строится выпуклое замкнутое множество $M_0 \subset R_n$, содержащее точку p^*. Задается число $\varepsilon_0 > 0$. Полагается $i = 0$, $k = 0$.

1. Отыскивается точка

$$y_i = Pr(y, M_i). \tag{1}$$

Если выполняется включение

$$y_i \in D, \tag{2}$$

то $p^* = y_i$, и процесс заканчивается.

2. Если $y_i \notin D_{\varepsilon_k}$, то выбирается выпуклое замкнутое множество $G_i \subset R_n$, содержащее точку p^*, полагается

$$Q_i = M_i \bigcap G_i, \tag{3}$$

$$u_i = y_i, \tag{4}$$

и следует переход к п. 4. В противном случае выполняется п. 3.

3. Полагается $i_k = i$,

$$x_k = y_{i_k}. \tag{5}$$

Выбирается выпуклое замкнутое множество $Q_i = Q_{i_k}$ такое, что

$$p^* \in Q_i. \tag{6}$$

Выбирается точка

$$p_k \in M_{i_k}, \tag{7}$$

удовлетворяющая условиям

$$||x_k - y|| \leqslant ||p_k - y|| \leqslant r^*. \tag{8}$$

Если $p_k \in D$, то $p^* = p_k$, и процесс заканчивается. В противном случае полагается

$$u_i = p_k, \tag{9}$$

задается число $\varepsilon_{k+1} > 0$, значение k увеличивается на единицу.

4. Выбирается конечное множество $A_i \subset \partial F(u_i)$, полагается

$$M_{i+1} = Q_i \bigcap T_i, \tag{10}$$

где $T_i = \{x \in R_n : F(u_i) + \langle a, x - u_i \rangle \leqslant 0 \ \forall a \in A_i\}$, и следует переход к п. 1 при i, увеличенном на единицу.

Сделаем некоторые замечания относительно предложенного метода.

Для выбора множеств M_0, G_i, Q_i есть много возможностей. Можно, например, положить $M_0 = R_n$ и потому считать $y_0 = y$. Допустимо выбирать и $G_i = R_n$. Если при каждом $i \in K$, независимо от принадлежности точки y_i множеству D_{ε_k}, положить $Q_i = M_i$, считая $G_i = R_n$, то согласно (10) $M_{i+1} = M_i \bigcap T_i$, $i \in K$. В таком случае от шага к шагу происходит накопление отсекающих плоскостей, и обновлений множеств M_i в процессе решения не происходит. Упомянутые обновления можно производить за счет выбора множеств Q_i следующим образом.

Пусть при некотором $i = i_k$ выполнилось включение $y_i \in D_{\varepsilon_k}$. Положим $Q_{i_k} = M_{r_i}$, где $0 \leqslant r_i \leqslant i_k$. Тогда для всех $r_i = 0, \ldots, i_k$ условие (6) выполняется, и в качестве Q_{i_k} можно выбирать любое из построенных к i_k-му шагу множеств $M_0, \dots, M_{i_k}$. Если $Q_{i_k} = M_0$, то отбрасываются все накопленные к шагу i_k отсекающие плоскости.

Если множества M_0, G_i, Q_i выбирать многогранными, то задача нахождения точек y_i из условия (1) не представляет особого труда. Она является задачей квадратичного программирования, и может быть решена известными алгоритмами (см., напр., [3, 4]) за конечное число шагов.

Отметим, что для выбора точек p_k из условий (7), (8) также немало возможностей. Например, без дополнительных вычислений допустимо положить $p_k = x_k$. Можно искать точку p_k, привлекая другие методы проектирования. Тогда на основе предложенного метода для решения поставленной задачи будут построены комбинированные сходящиеся алгоритмы.

3. Обоснование сходимости метода

Лемма 1. *Для всех $i \in K$ справедливо включение*

$$p^* \in M_i. \tag{11}$$

Доказательство. При $i = 0$ включение (11) выполняется по условию выбора множества M_0. Пусть теперь (11) имеет место при $i = l \geqslant 0$. Докажем, что $p^* \in M_{l+1}$, тогда лемма будет доказана. Ввиду (3), (6) и индукционного предположения $p^* \in Q_l$. Кроме того, $p^* \in T_l$, так как $F(p^*) - F(u_l) \geqslant \langle a, p^* - u_l \rangle$ для всех $a \in A_l$ и $F(p^*) \leqslant 0$. Таким образом, в силу (10) включение (11) при $i = l + 1$, а с ним и лемма, доказаны.

С учетом леммы 1 обоснуем критерии остановки, заложенные в пп. 1, 3 метода.

Пусть выполняется (2). Согласно условию (1) выбора точки y_i и включению (11)

$$||y_i - y|| \leqslant r^*. \tag{12}$$

Отсюда с учетом (2) следует, что y_i — решение исходной задачи.

Пусть теперь точка p_k, выбранная из условий (7), (8), оказалась в D. Тогда $||p_k - y|| \geqslant ||p^* - y|| = r^*$, и из (8) следует, что $p_k = p^*$.

Лемма 2. *Последовательность $\{u_i\}$, $i \in K$, ограничена.*

Доказательство. Последовательность $\{y_i\}$, $i \in K$, ограничена, так как для каждого $i \in K$ выполняется неравенство (12). Кроме того, в силу (8) ограниченной является и последовательность $\{p_k\}$, $k \in K$. Отсюда и из условий (4), (9) задания точек u_i следует ограниченность последовательности $\{u_i\}$, $i \in K$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{u_i\}$, $i \in K$, построена предложенным методом с условием, что для всех $i \in K$, начиная с некоторого номера $\tilde{i} \geqslant 0$, множества Q_i выбраны согласно (3). Тогда любая предельная точка последовательности $\{u_i\}$, $i \in K$, принадлежит множеству D.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда существует такая сходящаяся подпоследовательность $\{u_i\}$, $i \in K_1 \subset K$, последовательности $\{u_i\}$, $i \in K$, что для ее предельной точки $\overline{u}$ выполняется неравенство $F(\overline{u}) > 0$. Положим $F(\overline{u}) = \gamma$. Так как функция $F(x)$ непрерывна, то найдется окрестность ω точки $\overline{u}$ такая, что $F(x) \geqslant \gamma/2$ для всех $x \in \omega$. Зафиксируем такой номер $\hat{i} \in K_1$, что $\hat{i} \geqslant \tilde{i}$ и для всех $i \in K_1$, $i \geqslant \hat{i}$ имеет место включение $u_i \in \omega$. Тогда

$$F(u_i) \geqslant \gamma/2 \quad \forall i \in K_1, \quad i \geqslant \hat{i}. \tag{13}$$

Выберем номера $i', i'' \in K_1$ так, что $i'' > i' \geqslant \hat{i}$. Тогда согласно (10) и условию леммы $M_{i''} \subset M_{i'+1} \subset T_{i'}$, а в силу (1), (4) и (7), (9) $u_{i''} \in M_{i''}$. Следовательно, выполняется включение $u_{i''} \in T_{i'}$, и $F(u_{i'}) + \langle a, u_{i''} - u_{i'} \rangle \leqslant 0$ для всех $a \in A_{i'}$. Отсюда и из неравенства (13) при $i = i'$ имеем

$$\langle a, u_{i''} - u_{i'} \rangle \leqslant -\frac{\gamma}{2} \quad \forall a \in A_{i'}. \tag{14}$$

Далее, ввиду ограниченности последовательности $\{u_i\}$ найдется (см., напр., [5], с. 121) такое число $\theta > 0$, что для всех $a \in \partial F(u_i)$, $i \in K$, выполняется неравенство

$$||a|| \leqslant \theta. \tag{15}$$

Тогда из (14), (15) следует, что $\theta||u_{i''} - u_{i'}|| \geqslant \gamma/2$. Последнее неравенство противоречиво, поскольку последовательность $\{u_i\}$, $i \in K_1$, по выбору является сходящейся. Лемма доказана.

Покажем теперь, что вместе с последовательностью $\{y_i\}$, $i \in K$, будут построены и последовательности $\{x_k\}$, $\{p_k\}$, $k \in K$.

Лемма 4. *Если последовательность $\{y_i\}$, $i \in K$, построена предложенным методом, то для каждого $k \in K$ существует такой номер $i = i_k \in K$, что выполняется равенство (5).*

Доказательство. 1) Пусть $k = 0$. Если $y_0 \in D_{\varepsilon_0}$, то $i_0 = 0$, $x_0 = y_0$, и равенство (5) при $k = 0$ выполняется. Поэтому будем считать, что $y_0 \notin D_{\varepsilon_0}$. Докажем тогда существование такого номера $i = i_0 > 0$, что

$$y_{i_0} \in D_{\varepsilon_0}. \tag{16}$$

Допустим противное, то есть

$$y_i \notin D_{\varepsilon_0} \quad \forall k \in K, \quad i > 0. \tag{17}$$

Выделим из последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$, $i > 0$, сходящуюся подпоследовательность $\{y_i\}$, $i \in K' \subset K$, и пусть y' — ее предельная точка. Согласно п. 2 метода с учетом допущения (17) множество Q_i для всех $i \in K$, $i > 0$, имеет вид (3), и для тех же i выполняется равенство (4). Тогда по лемме 3 имеем включение $y' \in D$, и

$$F(y') \leqslant 0. \tag{18}$$

С другой стороны, в силу (17) $F(y_i) > \varepsilon_0$ для всех $i \in K'$. Переходя в последнем неравенстве к пределу по $i \in K'$, получим неравенство $F(y') \geqslant \varepsilon_0$, противоречащее (18). Таким образом, существование номера $i_0 > 0$, для которого справедливо (16), доказано, и равенство (5) при $k = 0$ имеет место.

2) Пусть теперь k — любой фиксированный неотрицательный номер, и $x_k = y_{i_k}$. По той же схеме, что и в случае $k = 0$, доказывается существование номера $i_{k+1} > i_k$, для которого $y_{i_{k+1}} \in D_{\varepsilon_{k+1}}$. Тогда $x_{k+1} = y_{i_{k+1}}$, и лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что для каждого $k \in K$ зафиксируется точка x_k, а значит, есть возможность выбора согласно (7), (8) и точки p_k.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{p_k\}$, $k \in K$, построена предложенным методом с условием, что*

$$\varepsilon_k \to 0, \quad k \to \infty. \tag{19}$$

Тогда любая предельная точка этой последовательности совпадает с p^*, а если при этом для каждого $k \in K$ выполняется неравенство

$$||p_{k+1} - y|| \geqslant ||p_k - y||, \tag{20}$$

то последовательность $\{p_k\}$, $k \in K$, сходится к точке p^*.

Доказательство. Пусть $\{p_k\}$, $k \in K' \subset K$, — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{p_k\}$, $k \in K$, и $\overline{p}$ — ее предельная точка. Покажем, что

$$\overline{p} = p^*, \tag{21}$$

тогда первая часть теоремы будет доказана.

Выделим из последовательности $\{x_k\}$, $k \in K'$, сходящуюся подпоследовательность $\{x_k\}$, $k \in K'' \subset K'$. Пусть $\overline{x}$ — ее предельная точка. Так как согласно (5) $x_k \in D_{\varepsilon_k}$ и $x_k \notin D$ для всех $k \in K$, то

$0 < F(x_k) \leqslant \varepsilon_k$, $k \in K$. Перейдем в этих неравенствах к пределу по $k \in K''$ с учетом (19). Тогда $F(\overline{x}) = 0$, и, значит,

$$\overline{x} \in D. \tag{22}$$

С другой стороны, из условий (8) имеем $||\overline{x} - y|| \leqslant ||\overline{p} - y|| \leqslant r^*$. Но в силу (22) $||\overline{x} - y|| \geqslant r^*$. Отсюда следует, что $||\overline{p} - y|| = r^*$, и равенство (21) доказано.

Пусть теперь для последовательности $\{p_k\}$ выполняется условие (20). Тогда ввиду ограниченности $\{p_k\}$ последовательность $\{||p_k - y||\}$, $k \in K$, сходится, и по доказанному выше $\lim\limits_{k \in K} ||p_k - y|| = r^*$. Поэтому в силу известной теоремы (см., напр., [3], с. 62) второе утверждение теоремы также доказано.

Отметим, что условие (20) имеет место, если, например, для всех $k \in K$ выполняются включения $M_{i_{k+1}} \subset M_{i_k}$.

Опишем еще одну процедуру построения отсекающих множеств T_i, которую можно использовать в п. 4 при построении M_{i+1}. Пусть $F(x) = \max\limits_{j \in J} f_j(x)$, где $J = \{1, \ldots, m\}$, функции $f_j(x)$ для всех $j \in J$ выпуклы, $D_j = \{x \in R_n : f_j(x) \leqslant 0\}$. Тогда на шаге 4 метода вместо множества A_i выбираются конечные множества $A_i^j \subset \partial f_j(u_i)$ для всех $j \in J_i = \{j \in J : u_i \notin D_j\}$, и полагается $T_i = \bigcap\limits_{j \in J_i} \{x \in R_n : f_j(u_i) + \langle a, x - u_i \rangle \leqslant 0 \; \forall a \in A_i^j\}$. Нетрудно проверить, что при таком способе задания множеств T_i все утверждения, касающиеся предложенного метода, остаются в силе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Заботин И.Я., Яруллин Р.С.** Метод отсечений с обновлением погружающих множеств и оценки точности решения // Ученые записки Казанского университета. Сер. физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 54–64.
2. **Заботин И.Я., Яруллин Р.С.** Алгоритм проектирования точки, использующий аппроксимирующие множества // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы 9-й Всеросс. конф. (17–22 сент, 2012 г.). – Казань: Отечество. – 2012. – С. 139-143.
3. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: В 2-х кн. – М.: МЦНМО, 2011. – Кн. 1. – 620 с.
4. **Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.** Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
5. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

REFERENCES

1. **Zabotin I.Ya., Yarullin R.S.** A cutting-plane method with updating of approximating sets and estimates of the solution accuracy [Metod otsechenii s obnovleniem pogruzhajuschikh mnozhestv i otcenki tochnosti reshenija]// Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2013. – V. 155, № 2. – P. 54–64. (in Russian)
2. **Zabotin I.Ya., Yarullin R.S.** An algorithm for the projection of the point using approximation sets [Algoritm proektirovanija tochki, ispol'zujuschii approksimirujucshie mnozhestva] // Mesh methods for boundary problems and applications. Proceedings of the Russian conference. (September 17, 2012 – September 22, 2012). – Kazan: Otechestvo, 2012. – P. 139–143. (in Russian)
3. **Vasil'ev F.P.** Optimization methods [Metody optimizatcii]. – Moscow: MCCME, 2011. – 620 p. (in Russian)
4. **Pshenichni B.N., Danilin Yu.M.** Numerical methods in extremal problems [Chislennye metody v ekstremal'nykh zadachakh]. – Moscow: Nauka, 1975. – 320 p. (in Russian)
5. **Polyak B.T.** Introduction to optimization [Vvedenie v optimizatciju]. – Moscow: Nauka, 1983. – 384 p. (in Russian)