УДК 519.6+517.9

АЖУРНАЯ СХЕМА МКЭ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ [1)]

А.В. КАЛИНИН, Д.Т. ЧЕКМАРЕВ

Нижегородский государственный университет
E-mail: avk@mm.unn.ru; 4ekm@mm.unn.ru

FEM RARE GRID SCHEME FOR 3D MAGNETOSTATIC PROBLEM

A.V. KALININ, D.T. CHEKMAREV

Nizhni Novgorod State University

Аннотация

На основе новой вариационной формулировки разработана эффективная численная схема МКЭ решения 3D задач магнитостатики. Схема строится на основе традиционной схемы линейного 4-узлового конечного элемента в виде тетраэдра с линейной аппроскимацией функций в элементе. При интегрировании в элементе используется одна точка интегрирования, что соответствует известному приему сокращенного интегрирования О. Зенкевича.

Ключевые слова: Трехмерная задача, ажурная схема, метод конечных элементов, магнитостатика

Summary

There is designed an effective numerical FEM scheme for magnetostatic 3D problem on the basis of a new variational formulation. The scheme is based on the traditional scheme of the linear 4-node finite element in the form of a tetrahedron with a linear approximation of functions on an element. When integrating on the element we use one integrating point that corresponds to the known O. Zenkevich reception of reduced integrating.

Key words: 3D problem, rare grid scheme, finite element method, magnetostatics.

Введение

В [1–3] предложена и описана реализация ажурных вариационно-разностных и КЭ схем решения трехмерных задач теории упругости и пластичности. Данные схемы зарекомендовали свою высокую эффективность. В данной работе рассматривается применение ажурных схем к решению задач об определении магнитных и электрических полей в проводящих средах. При постановке задачи для векторного магнитного потенциала используются специальные калибровочные соотношения [4]. Актуальность поставленной проблемы связана с решением инженерных задач прочности конструкций, находящихся под воздействием электромагнитных полей [5].

1. Вариационная формулировка задачи магнитостатики

Рассматривается задача об определении вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}(\vec{x})$ и напряженности электрического поля $\vec{E}(\vec{x})$, удовлетворяющих уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{x}) = \frac{4\pi\sigma}{c}\,\vec{E}(\vec{x}) + \frac{4\pi}{c}\,\vec{J}^{\text{ст}}(\vec{x}). \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{x}) = 0, \tag{2}$$

[1)] Работа выполнена при поддержке гранта (соглашение от 27 августа 2013 г. № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ)

$$\mathrm{div}\,(\mu\vec{H}) = 0 \tag{3}$$

и граничным условиям

$$\vec{H}(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x}) = 0,\ \vec{x} \in \Gamma. \tag{4}$$

Здесь $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω – открытая односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей Г, в каждой точке которой определен вектор внешней нормали $\vec{n}(\vec{x})$. Уравнения (2), (3) позволяют в качестве новых неизвестных величин ввести *векторный магнитный потенциал* $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x})$ и *скалярный электрический потенциал* $\varphi = \varphi(\vec{x})$ по формулам

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{x}), \quad \vec{E}(\vec{x}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{x}). \tag{5}$$

В этом случае уравнение (1) с краевыми условиями, соответствующими (4), записывается в виде

$$\mathrm{rot}\,\left(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\left(-\sigma\mathrm{grad}\,\varphi + \vec{J}^{\text{ст}}\right), \tag{6}$$

$$\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma. \tag{7}$$

Для задачи (6), (7) предлагаются калибровочные соотношения следующего вида

$$\varphi(\vec{x}) = -\varkappa\mathrm{div}\,\sigma\vec{A}(\vec{x}), \quad \sigma\vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) = 0, \tag{8}$$

где $\varkappa$ – произвольное положительное число.

Для строгой постановки задачи определим функциональные пространства

$$H\,(\mathrm{rot}\,;\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \mathrm{rot}\,\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\},$$

$$H\,(\mathrm{div}\,;\Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \mathrm{div}\,\vec{u} \in L_2(\Omega)\},$$

$H_0\,(\mathrm{div}\,;\Omega)$ – замыкание в $H\,(\mathrm{div}\,;\Omega)$ пространства пробных вектор-функций $\{D(\Omega)\}^3$,

$$W_0\,(\mathrm{div}\,\sigma;\Omega) = \{\vec{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega) : \sigma\vec{u} \in H_0(\mathrm{div};\Omega)\}$$

При калибровочных соотношениях (8) векторный магнитный потенциал удовлетворяет вариационному равенству

$$\int\limits_\Omega \left(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{A} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}\right) d\vec{x} + \frac{4\pi}{c}\,\varkappa\int\limits_\Omega \mathrm{div}\,\sigma\vec{A}\mathrm{div}\,\sigma\vec{v}d\vec{x} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{v}\right) d\vec{x} \tag{9}$$

и задача (6), (7) допускает следующую обобщенную формулировку: найти функцию $\vec{A} \in W_0\,(\mathrm{div}\,\sigma;\Omega)$, для которой при всех $\vec{v} \in W_0\,(\mathrm{div}\,\sigma;\Omega)$ выполнено равенство (9). Используемые функциональные пространства определены и изучены в [6–8].

Эквивалентная вариационная задача для определения $\vec{A} \in W_0\,(\mathrm{div}\,\sigma;\Omega)$ записывается в виде:

$$I\,(\vec{u}) \to \inf, \vec{u} \in W_0\,(\mathrm{div}\,\sigma;\Omega)$$

$$I\,(\vec{u}) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{u}\right)\,d\vec{x} + \frac{2\pi}{c}\varkappa\int\limits_\Omega \left(\mathrm{div}\,\sigma\vec{u}\right)^2 d\vec{x} - \frac{4\pi}{c}\int\limits_\Omega \left(\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{u}\right) d\vec{x}. \tag{10}$$

Отметим, что калибровочные соотношения (8), предложенные в [4], позволяют избежать осложнений при численном решении, возникающих при классической кулоновской калибровке, связанных с погружением в пространство соленоидальных функций [4].

2. Численная схема

Схема строится на основе традиционной схемы линейного 4-узлового конечного элемента в виде тетраэдра с линейной аппроксимацией функций в элементе. При интегрировании в элементе используется одна точка интегрирования, что соответствует известному приему сокращенного интегрирования О. Зенкевича [9]. Будем считать исходную КЭ сетку составленной из гексаэдров, а элементы — вписанными в центр каждого гексаэдра так, что ребра тетраэдра являются диагоналями гексаэдра. Таким образом, в каждом гексаэдре базовой сетки находится один расчетный элемент. Незаполненный объем гексаэдра и содержащиеся в нем экстенсивные параметры задачи присоединяются к расчетному элементу.

Задача магнитостатики формулируется в виде вариационного уравнения (9). Заменяя интеграл суммой интегралов по элементам, после численного интегрирования придем к системе линейных алгебраических уравнений. Технология построения схемы в точности совпадает с описанной в [10]. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений векторного потенциала.

Рассмотрим вариант численной схемы для случая равномерной сетки (не обязательно ортогональной). Введем в рассмотрение базисные операторы для аппроксимации функций и производных в элементах. Неизвестные функции в линейном элементе представляются в виде

$$f(x^1,x^2,x^3) = c_0 + c_1(x^1 - x_c^2) + c_2(x^2 - x_c^2) + c_3(x^3 - x_c^3)$$

(здесь (x_c^1, x_c^3, x_c^3) — координаты центра элемента).
Коэффициенты c_0, c_1, c_2, c_3 выражаются через значения функции в узлах элемента с помощью формул

$$c_m = d_m^+ f_{ijk} = \sum_{(p,q,r)\in(} \beta_{p,q,r}^m f_{i+p,j+q,k+r}, m = 0,1,2,3. \tag{11}$$

Коэффициенты $\beta_{p,q,r}^m$ определяются шаблоном элемента и геометрией элемента. Рассматриваются также операторы $d_{m,l}^-$, равные с точностью до знака сопряженным к (9) операторам:

$$d_m^- f_{ijk} = (-1)^{K_m} d_m^+ f_{ijk} = (-1)^{K_m} \sum_{(p,q,r)\in(} \beta_{p,q,r}^m f_{i-p,j-q,k-r}, m = 0,1,2,3. \tag{12}$$

Здесь K_m — порядок производной, которую аппроксимирует оператор, Ш = {(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)} — шаблон операторов (множество расчетных узлов элемента).

Определим основные и сопряженные (с точностью до знака) сеточные операторы Гамильтона и ротора:

$$\begin{aligned} d_\nabla^+ &= (d_1^+, d_2^+, d_3^+) \\ d_\nabla^- &= (d_1^-, d_2^-, d_3^-) \\ d_{rot}^+ &= (d_2^+ - d_3^+, d_3^+ - d_1^+, d_1^+ - d_2^+) \\ d_{rot}^- &= (d_2^- - d_3^-, d_3^- - d_1^-, d_1^- - d_2^-) \end{aligned} \tag{13}$$

Сеточное вариационное уравнение, соответствующее (9), запишется в виде

$$\Delta V \left[\sum_{\Omega_h} d_0^+ \mu^{-1} d_{\text{rot}}^+ \overline{A} \delta \overline{A} + \frac{4\pi}{c} \varkappa \left(d_\nabla^+ \sigma d_0^+ \overline{A} + d_0^+ \sigma d_\nabla^+ \overline{A} \right) \left(d_\nabla^+ \sigma d_0^+ \delta \overline{A} + d_0^+ \sigma d_\nabla^+ \delta \overline{A} \right) \right]$$
$$-\Delta V \sum_{\Omega_h} d_0^+ j^{\text{ст}} d_0^+ \delta \overline{A} = 0. \tag{14}$$

После сеточного интегрирования по частям приравниваем нулю коэффициенты при независимых вариациях узловых значений неизвестной функции. В результате получим разностную схему

$$d_{\text{rot}}^- \left(d_0^+ \mu^{-1} d_{\text{rot}}^+ \overline{A} \right) + \frac{4\pi}{c} \varkappa \left[d_0^- \left(d_\nabla^+ \sigma \left(d_\nabla^+ \sigma d_0^+ \overline{A} + d_0^+ \sigma d_\nabla^+ \overline{A} \right) \right) - \right.$$
$$\left. - d_\nabla^- \left(d_\nabla^+ \sigma \left(d_\nabla^+ \sigma d_0^+ \overline{A} + d_0^+ \sigma d_\nabla^+ \overline{A} \right) \right) \right] - d_0^- d_0^+ j^{\text{ст}} = 0. \tag{15}$$

Данная схем имеет второй порядок точности. При точном интегрировании по элементам в рамках линейной интерполяции в схеме появятся дополнительные малые слагаемые.

Рассмотренный подход позволяет получить эффективную численную схему решения задач магнитостатики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чекмарев Д.Т.** Численные схемы метода конечного элемента на «ажурных» сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. — 2009. Вып. 2. — С. 49—54.
2. **Жидков А.В., Зефиров С.В., Кастальская К.А. Спирин С.В., Чекмарев Д.Т.** Ажурная схема численного решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности // Вестник ННГУ. — 2011. — № 4. — С. 1480—1482.
3. **Жидков А.В., Спирин С.В., Чекмарев Д.Т.** Ажурная схема метода конечных элементов решения статических задач теории упругости // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. — 2012. — Т. 154, Кн 4. — С. 26—32.
4. **Калинин А.В., Калинкина А.А.** Оценки векторных полей и стационарная система уравнений Максвелла // Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2012. — Вып. 1. — С. 95—107.
5. **Кулон Ж.-Л. Сабоннадьер Ж.-К.** САПР в электротехнике. — М.: Мир, 1988. — 208 с.
6. **Girault V., Raviart P.** Finite element methods for Navier—Stokes Equations. — Berlin/ Heidelberg/ New-York/ Tokyo: Springer-Verlag, 1986. — 374 p.
7. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
8. **Темам Р.** Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М: Мир,1981. — 408 с.
9. **Zienkiewich O.C., Too J., Taylor R.L.** Reduced integration technique in general analysis of plates and shells // Int.J. Num.Meth.Engng. — 1971. — V. 3, № 4. — P. 275—290.
10. **Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т.** Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом. — Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2000. — 118 с.

REFERENCES

1. **Chekmarev D.T.** Finite element numerical schemes on rare meshes [Chislennye schemy metoda konechnogo elementa na «azhurniyh» setkah] // Voprosi atomnoy nauki, Ser. Matematicheskoye modelirovanie physicheskikh processov. — 2009. — Is. 2. — P. 49—54. (in Russian)
2. **Zhidkov A.V., Zefirov S.V., Kastalskaya K.A., Spirin S.V., Chekmarev D.T.** The rare mesh numerical scheme for 3D dynamic elasticity and plasticity problems solution [Azhurnaya schema chislennogo resheniya trekhmernikh dynamicheskikh zadach teorii uprugosty i plastichnosty] // Vestnik of Lobachevsky state university of Nizhni Novgorod. — 2011. — № 4(4). — P. 1480—1482. (in Russian)
3. **Zhidkov A.V., Spirin S.V., Chekmarev D.T.** The Rare Mesh Finite Element Scheme for Static Elasticity Problems Solving [Azhurnaya schema metoda konechnykh elementov resheniya staticheskikh zadach teorii uprugosty] // Ucenye zapiski of state university of Kazan. Ser. Physico-mathematicheskiye nauki. — 2012. — V. 154, B 4. — P. 26—32. (in Russian)
4. **Kalinin A.V., Kalinkina A.A.** Estimates for vector fields and stationary Maxwell's equations [Otzenki vectorniykh poley i statsionarnaya systema uravnenii Maxwella] // Vestnik of Lobachevsky state university of Nizhni Novgorod. Ser. Mathematicheskoye modelirovanie i optimal'noye upravlenie — 2002, Is. 1. — P. 95—107. (in Russian)
5. **Coulomb J. L., Sabonnadiere J. C.** C. A. O. en electrotechnique. — Hermes, 1984.— 208 p.
6. **Girault V., Raviart P.** Finite element methods for Navier—Stokes Equations. — Berlin—Heidelberg—New-York— Tokyo: Springer-Verlag, 1986. — 374 p.
7. **G. Duvaut, J.L. Lions** Les inéquations en mécanique et en physique. — Paris: Dunod, 1972. — 407 p.

8. **Temam R.** Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. — Amsterdam: North-Holland, 1977. — 504 p.
9. **Zienkiewich O.C., Too J., Taylor R.L.** Reduced integration technique in general analysis of plates and shells // Int.J. Num.Meth.Engng. — 1971. — V. 3, № 4. — P. 275–290.
10. **Bazhenov V.G., Chekmarev D.T.** Dynamic plates and shells problems solving by variational-difference method [Reshenie zadach nestacionarnoj dinamiki plastin i obolochek variacionno-raznostnym metodom]. — Nizhni Novgorod: UNN, 2000. — 118 p. (in Russian)