УДК 517.958

О ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА С НЕЛИНЕЙНЫМ НЕЛОКАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ[1)]

О.В. ГЛАЗЫРИНА, М.Ф. ПАВЛОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: glazyrina-olga@ya.ru; maria.pavlova@kpfu.ru

ON EXPLICIT DIFFERENCE SCHEME FOR EVOLUTION VARIATIONAL INEQUATION WITH NONLINEAR NONLOCAL SPACE OPERATOR

O.V. GLAZYRINA, M.F. PAVLOVA

Kazan Federal University

Аннотация

Рассматривается параболическое вариационное неравенство с монотонным по градиенту пространственным оператором, зависящем также от интегральной по пространственным переменным характеристики решения. Для этой задачи с использованием метода штрафа построена явная разностная схема. Выписаны условия, обеспечивающие сходимость полученного алгоритма. Теорема о сходимости явной разностной схемы со штрафом доказана при минимальных предположениях на гладкость исходных данных.

Ключевые слова: Вариационное неравенство, явная схема, метод штрафа, нелокальный пространственный оператор, монотонный оператор, устойчивость, сходимость.

Summary

We consider parabolic variational inequation with monotone with respect to gradient space operator, which also depends on integral solution characteristic on the space variables. For this problem we construct the explicit difference scheme with help of penalization method. We extract conditions, which provide the convergence of obtained algorithm. The convergence theorem of explicit difference scheme with penalty operator was proved with the minimum conditions for smoothness of the initial data.

Key words: Variational inequation, explicit scheme, penalty method, nonlocal space operator, monotone operator, stability, convergence.

---

1. Постановка задачи.

Пусть Ω — ограниченная область пространства R^n, $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Используя принятые обозначения функциональных пространств (см., напр., [1], [2]), определим множество

$$K = \left\{ v\ ,\ v \in L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_p\,(\Omega)) \bigcap L_\infty(0,T; L_2\,(\Omega)),\ v \geqslant 0 \text{ п.в. в } Q_T \right\},\ p > 1.$$

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u \in K$ такую, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_{p'}(0,T; W^{-1}_{p'}(\Omega)), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{п. в. в } \Omega\,, \tag{2}$$

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97022)

удовлетворяющую неравенству

$$\int\limits_0^T \langle \frac{\partial u}{\partial t}, v-u\rangle dt + \int\limits_0^T \langle Lu, v-u\rangle dt \geqslant \int\limits_0^T \langle f, v-u\rangle dt, \qquad \forall v \in K. \tag{3}$$

Здесь $p' = p/(p-1)$, $\langle w, v\rangle$ — значение функционала w из $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ на элементе v из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, L — оператор, определяемый формулой

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} k_i(x, u, \nabla u, Bu), \tag{4}$$

∇u — градиент u, k_i, u_0 и f — заданные функции, B — оператор вида

$$(Bu)(t) = \int\limits_{\Omega'} g(x, u(x,t))\, dt\,, \tag{5}$$

Ω' — область, принадлежащая Ω или совпадающая с ней, функция g — известная функция.

Пространственные операторы с нелокальностями вида (5) возникают, например, при математическом описании диффузии популяции бактерий, когда предполагается, что скорость распространения в точке определяется глобальным состоянием среды (см., напр., [3] — [5]).

В дальнейшем будем предполагать, что $k_i(x, \xi_0, \xi, \nu)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны по ξ_0, ν и ξ, измеримы по x и при любых значениях аргументов $x \in \Omega$, $\xi_0, \nu \in R$, $\xi^1, \xi^2, \xi \in R^n$ удовлетворяют условиям

$$|\, k_i(x, \xi_0, \xi, \nu) \,| \leqslant d_0 \sum_{j=1}^{n} |\, \xi_j \,|^{p-1} + d_1\,, \quad d_0 = \mathrm{const} > 0, \quad d_1 = \mathrm{const} \geqslant 0\,, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(x, \xi_0, \xi, \nu)\xi_i \geqslant d_2 \sum_{i=1}^{n} |\, \xi_i \,|^p - d_3, \quad d_2 = \mathrm{const} > 0, \quad d_3 = \mathrm{const} \geqslant 0, \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{n} k_i(x, \xi_0, \xi, \nu)\, \xi_i \,\geqslant\, 0, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i(x, \xi_0, \xi^1, \nu) - k_i(x, \xi_0, \xi^2, \nu))(\xi_i^1 - \xi_i^2) \geqslant 0, \tag{9}$$

функция $g(x, \xi)$, определяющая оператор B, измерима по x при любом $\xi \in R$, непрерывна по ξ для почти всех $x \in \Omega$ и удовлетворяет условию

$$|g(x,\xi)| \leqslant g_0(x) + c_g|\xi|^s \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in R, \tag{10}$$

здесь $c_g > 0$, $s > 0$ — заданные константы, g_0 — неотрицательная, интегрируемая по Ω функция.

Из выше перечисленных предположений следует, что оператор L, действующий из пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ в $W_{p'}^{-1}(\Omega)$, является непрерывным, ограниченным, коэрцитивным и монотонным по градиенту.

В работе [6] для задачи (1)–(3) в случае, когда $g(x,\xi) = g_0(x)\xi$ (g_0 — известная функция), доказано существование обобщенного решения.

2. Обозначения, вспомогательные результаты.

В дальнейшем будем предполагать, что область Ω — n-мерный параллелепипед. На Ω построим равномерную сетку $\overline{\omega}_h$ с шагом h_i по направлению x_i, $\omega_h = \overline{\omega}_h \cap \Omega$, $\gamma_h = \overline{\omega}_h \backslash \omega_h$, и сетку по направлению t: $\overline{\omega}_\tau = \{t \in [0,T] : \ t = k\tau, \ k = 0, 1, \ldots, M = T/\tau\}$, Пусть H − пространство сеточных функций, определенных на $\overline{\omega}_h$, $\overset{\circ}{H}$ − множество сеточных функций, равных нулю на границе γ_h.

Введем $n-$мерный вектор $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$, координаты которого могут принимать значения ± 1. Для сеточной функции y определим разностные отношения $\partial_{r_i} y$ по формуле:

$$\partial_{r_i} y = \begin{cases} y_{x_i}, \ r_i = +1, \\ y_{\overline{x}_i}, \ r_i = -1; \end{cases} \qquad \nabla_r y = (\partial_{r_1} y, \partial_{r_2} y, ..., \partial_{r_n} y).$$

Обозначим через $H_r(x)$ ячейку сетки, содержащую все точки сетки, участвующие в записи выражения $\nabla_r y(x) = (\partial_{r_1} y(x), \partial_{r_2} y(x), ..., \partial_{r_n} y(x))$, ω_r − множество точек сетки $\overline{\omega}_h$, в которых определена операция ∇_r.

В H введем нормы

$$\|y\|_p = [|y|^p, 1]^{1/p},$$

$$\|y\|_{+p} = \left(2^{-n} \sum_r \left(\sum_{i=1}^n |\partial_{r_i} y|^p, 1\right)_r\right)^{1/p},$$

Для $z \in H$ через $\Pi_r z$ будем обозначать функцию, постоянную в каждой ячейке сетки, определенную следующим образом

$$\Pi_r z(x') = z(x), \quad \text{где} \quad x \in \omega_r : \ x' \in H_r(x).$$

Для сеточных функций аргумента t введем два кусочно-постоянных восполнения

$$(\Pi^- w)(t') = w(t), \quad \text{где} \quad t = k\tau : \quad (k-1)\tau < t' \leqslant k\tau,$$

$$(\Pi^+ w)(t') = w(t), \quad \text{где} \quad t = k\tau : \quad k\tau \leqslant t' < (k+1)\tau.$$

Если $z(x,t)$ − сеточная функция, определенная на $\overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, то для нее определим следующие восполнения

$$\Pi_r^{\pm} z(x,t) = (\Pi_r z(x,t))^{\pm} = \Pi_r z^{\pm}(x,t).$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $\{y_{h\tau}\}$ последовательность функций, определенных на $\bar{\omega} \times \bar{\omega}_\tau$, для которой справедливы оценки*

$$\sum_{i=0}^{M} \tau \|y_{h\tau}(t_i)\|_{+p} \leqslant c,$$

$$\|y_{h\tau}(t)\| \leqslant c \qquad \forall t \in \bar{\omega}_\tau,$$

$$\frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^{M-k} \tau \| \, y_\varepsilon(t_i + k\tau) - y_\varepsilon(t_i)\|^2 \leqslant const, \ \ \forall k = 1, 2, ..., M.$$[2)]

Тогда существует функция $u \in L_p(0,T; W_p^1(\Omega)) \bigcap L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$ и последовательности шагов $\{\tau\}$ и $\{h\}$ такие, что

$$\Pi_r^{\pm} y_{h\tau} \rightharpoonup u, \qquad \Pi_r^{\pm} \partial_{r_i} y_{h\tau} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{в} \ L_p(Q_T), \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$\Pi_r^{\pm} y_{h\tau} \ast\!\rightharpoonup u \quad \text{в} \ L_\infty(0,T; L_2(\Omega)),$$

$$\Pi_r^{\pm} y_{h\tau} \to u \qquad \text{в} \ L_{p^*}(Q_T),$$

$$\Pi_r^{+} y_{h\tau} \to u \quad \text{п.в. в} \ Q_T,$$

здесь символом $\ast\!\rightharpoonup$ обозначена $*-$слабая сходимость, $p^* = \min\{2, p\}$.

[2)] Здесь для компактности записи у функции $y_{h\tau}$ не указан аргумент x. Это сокращение будет использовано и в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть* Ω — *ограниченная область пространства* R^n, *последовательность* $\{u_m\} \subset L_{q_1}(0,T;L_{p_1}(\Omega))$ *сходится к* u *сильно в* $L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(\Omega))$ *и слабо в* $L_{q_1}(0,T;L_{p_1}(\Omega))$, $1 < p_0 < p_1 < \infty$, $1 < q_0 < q_1 < \infty$. *Тогда* $\{u_m\}$ *сходится сильно к* u *в* $L_q(0,T;L_p(\Omega))$ *при любых* $p_0 \leqslant p < p_1$, $q_0 \leqslant q < q_1$.

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ *сходится к* u *в пространстве* $L_1(0,T;L_{p_1}(\Omega))$, $p_1 > 1$, *функция* $g(x,\xi)$, *определяющая оператор* B, *измерима по* x *при любом* $\xi \in R$, *непрерывна по* ξ *для почти всех* $x \in \Omega$ *и удовлетворяет условию*

$$|g(x,\xi)| \leqslant g_0(x) + c_g\,|\xi|^s \qquad \forall\, x \in \Omega, \quad \forall\, \xi \in R, \tag{11}$$

здесь $c_g > 0$, $s \in [0,p_1]$ — *заданные константы,* g_0 — *неотрицательная, интегрируемая по* Ω *функция. Тогда* Bu_m *сходится сильно к* Bu *в* $L_1(0,T)$.

3. Исследование сходимости явной разностной схемы.

Для задачи (1)–(3) рассматривается явная разностная схема со штрафом вида

$$(y_\varepsilon)_t(x,t) + Ay_\varepsilon(x,t) + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta\hat{y}_\varepsilon = \varphi(x,t), \qquad x \in \overline{\omega}_h\backslash\gamma_h, \;\; t \in \overline{\omega}_\tau\backslash\{T\}, \tag{12}$$

$$y_\varepsilon(x,0) = y_0(x) \quad x \in \overline{\omega}_h, \qquad y_\varepsilon(x,t) = 0 \quad x \in \gamma_h,$$

где A — разностная аппроксимация оператора L, построенная с помощью метода сумматорных тождеств. Значение Ay во внутренних точках сетки определяется следующим образом

$$Ay_\varepsilon(x) = -\frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{i=1}^{n}\partial_{ri}(k_i(x,y_\varepsilon,\nabla_r y_\varepsilon,B_h y_\varepsilon)), \tag{13}$$

где B_h — разностный аналог оператора B, при построении которого интеграл по каждой ячейки сетки области Ω приближенно вычисляется с помощью n-мерной квадратурной формулы трапеций, параметр β — оператор штрафа, определяемый равенством $\beta w = -\mid w^- \mid^{q-2} w^-$, $q > 1$, $w^- = (\mid w \mid - w)/2$.

Для решения явной разностной схемы получены априорные оценки

Лемма 4. *Пусть* $u_0 \in L_2(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$ *п.вс. в* Ω, $f \in L_{p'}(Q_T)$. *Тогда при любых* $\varepsilon > 0$ *и любых* τ, h *удовлетворяющих условиям*

$$\tau \leqslant \begin{cases} c\,\dfrac{h^2}{4n^{2/p}}, & 1 < p < 2, \\[2ex] c\,\dfrac{h^{p+n(p-2)/2}}{2^p n}, & p \geqslant 2. \end{cases} \tag{14}$$

для решения разностной схемы (12) имеют место следующие априорные оценки вида

$$\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y_\varepsilon\|_{+p}^{p} \leqslant c \quad \forall t' \in \bar{\omega}_\tau, \tag{15}$$

$$\max_{t' \in \bar{\omega}_\tau}\|y_\varepsilon(t')\|^2 \leqslant c \quad \forall t' \in \bar{\omega}_\tau, \tag{16}$$

$$\sum_{t=0}^{t'}\|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|^2 \leqslant c \quad \forall t' \in \bar{\omega}_\tau\backslash\{T\}, \tag{17}$$

Лемма 5. *Пусть выполнены оценки (15), (16),* $u_0 \in L_2(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$ *п.в в* Ω, $f \in L_{p'}(Q_T)$. *Тогда при* τ, h, ε, *удовлетворяющих соотношениям*

$$\frac{\tau\lambda^2}{\varepsilon^{1/(p-1)}} \leqslant c < 1, \text{ если } 1 < p < 2, \quad \frac{\tau\lambda^p}{\varepsilon} \leqslant c < 1, \text{ если } p \geqslant 2, \tag{18}$$

здесь $\lambda = \dfrac{c\sqrt[p]{n}}{h}$, *если* $1 < p < 2$, *и* $\lambda = \dfrac{c\sqrt[p]{n}}{h^{(1+n(p-2)/2p)}}$, *если* $p \geqslant 2$, *для решения разностной схемы (12) имеет место следующая априорная оценка*

$$\frac{1}{\varepsilon^{p'}} \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|\hat{y}_\varepsilon^-\|_p^p \leqslant const. \tag{19}$$

Лемма 6. *Пусть справедливы соотношения (14) и (18), тогда для решения разностной схемы (12) справедлива априорная оценка*

$$J = \frac{1}{k\tau} \sum_{t=0}^{T-k\tau} \tau \| y_\varepsilon(t+k\tau) - y_\varepsilon(t)\|^2 \leqslant const, \ \ \forall k = 1, 2, ..., M. \tag{20}$$

Из априорных оценок (15)–(17), (20) и леммы 1 следует существование подпоследовательностей $\{h\}$, $\{\tau\}$ и $\{\varepsilon\}$[3)], для которых выполнены предельные соотношения вида

$$\Pi_r^{\pm} y \rightharpoonup u \ \text{ в } \ L_p(Q_T), \tag{21}$$

$$\Pi_r^{\pm} \partial_{r_i} y \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \text{ в } \ L_p(Q_T), \tag{22}$$

$$\Pi_r^{\pm} y \to u \ \text{ *-слабо в } \ L_\infty(0,T; L_2(\Omega)). \tag{23}$$

$$\Pi_r^{\pm} y_\varepsilon \to u \ \text{ в } \ L_{p^*}(Q_T), \quad p^* = \min\{2, p\}. \tag{24}$$

$$\Pi_r^{\pm} y_\varepsilon \to u \ \text{ п. в. в } \ Q_T. \tag{25}$$

Воспользовавшись оценкой

$$\|y\|_q \leqslant c\|y\|_{+p}, \quad q > p, \tag{26}$$

справедливой для $\forall\, q \leqslant \overline{q}$, где

$$\overline{q} = \begin{cases} \dfrac{np}{n-p}, & p < n, \\ \infty, & p \geqslant n, \end{cases} \tag{27}$$

нетрудно убедиться в ограниченности множества $\{\Pi_r^{\pm} y_\varepsilon\}$ в пространстве $L_p(0,T; L_q(\Omega))$. Поэтому найдутся последовательности $\{h\}$, $\{\tau\}$ и $\{\varepsilon\}$, для которых при $h, \tau, \varepsilon \to 0$ наряду с (21) − (25) будет справедливо предельное соотношение

$$\Pi_r^{\pm} y \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L_p(0,T; L_{\overline{q}}(\Omega)), \quad \text{если} \quad \overline{q} < +\infty, \tag{28}$$

$$\Pi_r^{\pm} y \to u \ \text{ *-слабо в } \ L_p(0,T; L_\infty(\Omega)), \quad \text{если} \quad \overline{q} = +\infty. \tag{29}$$

Из (23), (28), (29) и леммы 2 вытекает, что $\Pi_r^{\pm} y \to u$ в $L_{p_1}(0,T; L_{p_2}(\Omega))$, где $p_1 < p^*$, $p_2 < \max\{2, \overline{q}\}$. Из свойства (**??**) и леммы 3 следует, что $\Pi^+ B_h(y_\varepsilon) \to Bu$ в $L_1(0,T)$ при $s < \max\{2, \overline{q}\}$.

Используя свойство слабой полунепрерывности снизу нормы в пространстве $L_p(Q_T)$, оценку (19) и вытекаемое из (21) и (25) предельное соотношение вида $\Pi^{\pm}(y_\varepsilon^-) \rightharpoonup u^-$ в $L_p(Q_T)$ нетрудно показать, что

$$\|u^-\|_{L_p(Q_T)} \leqslant \varliminf_{\tau,\varepsilon\to 0} \|\Pi^-(y_\varepsilon^-)\|_{L_p(Q_T)} \leqslant \varliminf_{\tau,\varepsilon\to 0} (c\varepsilon^{p'/p}) = 0,$$

то есть $u \in K$.

Далее с помощью метода монотонности устанавливается, что предельная функция u удовлетворяет неравенству (3). Таким образом, доказана

[3)] В дальнейшем за выбранными подпоследовательностями будем сохранять обозначения самих последовательностей.

Теорема 1. *Пусть функции k_i удовлетворяют условиям (6)−(9), функция $f \in L_{p'}(Q_T)$, $p > 1$, $u_0 \in L_2(\Omega) : u_0(x) \geqslant 0$ п.в. в Ω, $s < \max\{2, \overline{q}\}$ (см. (27)). Тогда существует последовательность кусочно-постоянных восполнений решений схемы (12), сходящаяся сильно в $L_{p_1}(0,T; L_{p_2}(\Omega))$ к обобщенному решению задачи (1)−(3) с $p_1 < p^*$ и $p_2 < \max\{2, \overline{q}\}$. При условии единственности решения задачи (1)−(3) любая последовательность кусочно-постоянных восполнений решений задачи (12) будет обладать этим свойством.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
2. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир. — 1978. — 336 с.
3. **Chipot M., Molinet L.** Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems // Applicable Analysis. — 2001. — V. 80, № 3/4. — P. 279—315.
4. **Chipot M., Lovat B.** Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic problems, advances in quenching //Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal. — 2001. — № 8(1). — P. 35—51.
5. **Simon L.** On quasilinear parabolic functional differential equation with discontinuous terms // Annales Univ. Shi. Budapest. — 2004. — № 47. — P. 211—229.
6. **Глазырина О.В., Павлова М.Ф.** О разрешимости эволюционного вариационного неравенства с нелокальным пространственным оператором // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 7. — P. 884—898.
7. **Карчевский М.М., Павлова М.Ф.** Уравнения математической физики. — Казань: Изд-во Казан. ун-та. — 2008. — 228 с.

REFERENCES

1. **Lions J.-L.** Quelque problemes methodes de resolution des problemes aux limites nonlineaires. — Paris: Dunod, 1969. — 554 p.
2. **Gajewskii H., Groger K., Zacharias K.** Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. — Berlin: Akademie-Verlag, 1974. — 281 p.
3. **Chipot M., Molinet L.** Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems //Applicable Analysis. — 2001. — Vol. 80. — № 3/4. — P. 279—315.
4. **Chipot M., Lovat B.** Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic problems, advances in quenching //Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal. — 2001. — № 8(1). — P. 35—51.
5. **Simon L.** On quasilinear parabolic functional differential equation with discontinuous terms // Annales Univ. Shi. Budapest. — 2004. — № 47. — P. 211—229.
6. **Glazyrina O.V., Pavlova M.F.** On the solvability of an evolution variational inequality with a nonlocal space operator // Differential equations. — 2014. — V. 50, № 7. — P. 873—887.
7. **Karchevskiy M.M., Pavlova M.F.** Equations of mathematical physics [Uravneniya matematicheskoy fiziki]// Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta. — 2008. — 228 p.(in Russian)