УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МКЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМ, МОНОТОННЫМ ПО ГРАДИЕНТУ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ[1)]

О.В. ГЛАЗЫРИНА, М.Ф. ПАВЛОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail glazyrina-olga@ya.ru; maria.pavlova@kpfu.ru

CONVERGENCE INVESTIGATION OF FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLUTION OF PARABOLIC EQUATIONS WITH NONLOCAL MONOTONE WITH RESPECT TO GRADIENT SPACE OPERATOR

O.V. GLAZYRINA, M.F. PAVLOVA

Kazan Federal University

Аннотация

В работе рассматривается параболическое уравнение, пространственный оператор которого нелинейно зависит не только от искомой функции и ее градиента, но и также от нелокальной (интегральной) характеристики решения. С помощью метода полудискретизации по переменной t и МКЭ по пространственным переменным строится приближенный метод решения с опусканием нелокальности на нижний слой. Доказывается теорема о сходимости построенного алгоритма при минимальных предположениях о гладкости исходных данных.

Ключевые слова: Нелинейные параболические уравнения, метод полудискретизации, МКЭ, метод монотонности, нелокальный оператор, устойчивость, сходимость.

Summary

In this paper we consider the parabolic equation where is the space operator depends nonlinearly on the desired function, functions gradient and also nonlocal (integral) solution characteristic. With help of semidiscretization method on the t variable and finite element method on the space valuables we construct the solution approximate method with omitting nonlocal property to the low layer. We proved the convergence theorem of constructed algorithm with the minimum conditions for smoothness of the initial data.

Key words: Nonlinear parabolic equations, semidiscretization method, finite element method, monotone method, nonlocal operator, stability, convergence.

1. Постановка задачи.

Пусть Ω — ограниченная область пространства R^n, Γ — граница Ω, $Q_T = \Omega \times (0,T)$. В области Q_T рассмотрим следующую начально—краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(k_i(x,u,\nabla u, Bu)\big) = f, \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \qquad u(x,t) = 0 \quad x \in \Gamma,\ \ t \in [0,T]. \tag{2}$$

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97022)

Здесь k_i, u_0 — заданные функции, ∇u — градиент u, B — оператор вида

$$Bu(t) = \int_{\Omega'} g\big(x, u(x,t)\big)\, dx\,, \tag{3}$$

g — известная функция, Ω' — область, принадлежащая Ω или совпадающая с ней.

Уравнения вида (1) возникают, например, при математическом описании диффузии популяции бактерий, когда предполагается, что скорость распространения в точке определяется глобальным состоянием среды (см. [1, 2]).

В дальнейшем будем предполагать, что $k_i(x,\xi_0,\xi,\nu)$, $i=1,\dots,n$, непрерывны по ξ_0, ν и ξ, измеримы по x и при любых значениях $x\in\Omega$, $\xi_0,\nu\in R$, $\xi^1,\xi^2,\xi\in R^n$ удовлетворяют условиям

$$|\ k_i(x,\xi_0,\xi,\nu)\ | \leqslant d_0 \sum_{j=1}^{n} |\ \xi_j\ |^{p-1} + d_1\,, \quad d_0>0, \quad d_1\geqslant 0\,, \quad p>1\,, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(x,\xi_0,\xi,\nu)\xi_i \geqslant d_2 \sum_{i=1}^{n} |\ \xi_i\ |^{p} - d_3, \quad d_2>0, \quad d_3\geqslant 0, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\big(k_i(x,\xi_0,\xi^1,\nu)-k_i(x,\xi_0,\xi^2,\nu)\big)(\xi_i^1-\xi_i^2)\geqslant 0. \tag{6}$$

Отметим, что из условия (4) следует, что оператор L, действующий из $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ в $W_{p'}^{-1}(\Omega)$, где $p' = \dfrac{p}{p-1}$, является ограниченным. Условия (5), (6) обеспечивают, соответственно, коэрцитивность и монотонность по градиенту оператора L.

Относительно функции $g(x,\xi)$, определяющей оператор B, предполагается, что она непрерывна по ξ, измерима по x и удовлетворяет следующему условию

$$|g(x,\xi)| \leqslant g_0(x) + |\xi|^s, \tag{7}$$

где g_0 — интегрируемая по Ω функция, $s\geqslant 0$.

Определение 1. *Функцию* $u\in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))\bigcap L_\infty(0,T;L_\alpha(\Omega))$ *такую, что*

$$u(x,0)=u_0(x) \quad \text{п. вс. в } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\in L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega)), \tag{8}$$

назовем обобщенным решением задачи (1), (2)*, если для любой функции* v *из пространства* $L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$ *справедливо следующее интегральное тождество*

$$\int_0^T \Big\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v\Big\rangle dt + \int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^n k_i\big(x,u,\nabla u, Bu\big)\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dxdt \;=\; \int_0^T\int_\Omega \sum_{i=0}^n f_i\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dxdt, \tag{9}$$

здесь $\langle g,v\rangle$ *— значение функционала* g *из пространства* $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ *на элементе* v *из* $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$*, функции* f_i, $i=1,\dots,n$, *такие, что* $f=-\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial}{\partial x_i} f_i$.

Заметим, что из [3] следует существование обобщенного решения задачи (1), (2) при любых $f\in L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega))$ и $u_0\in L_2(\Omega)\bigcap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. В [4] была доказана единственность обобщенного решения задачи (1), (2) при условии, что оператор L — сильно-монотонный и k_i не зависят от u.

2. Описание приближенного метода. Теорема о сходимости.

Для задачи (1)–(2) с помощью метода полудискретизации по переменной t и МКЭ по пространственным переменным строится двухслойная схема, неявная по градиенту и явная по решению и нелокальной характеристике. Для этого на $[0,T]$ задается равномерная сетка $\overline{\omega}_\tau$, τ –шаг сетки, $\omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \setminus \{0\}$, $M\tau = T$. Область Ω аппроксимируется n-мерным многогранником Ω_h так, чтобы для любой точки $x \in \Gamma$ нашлась точка $\xi \in \Gamma_h$ (Γ_h – граница Ω_h), находящаяся от x на расстоянии не большем h, и наоборот: для любой точки $x \in \Gamma_h$ существовала точка $\xi \in \Gamma$, находящаяся от x на расстоянии не большем h. Триангуляцию Ω_h проводится с помощью симплексов. Если множество $\Omega_h \setminus \Omega$ имеет ненулевую меру, задача (1)–(2) продолжается на Ω_h следующим образом: на множестве $\Omega_h \setminus \Omega$ функции u_0 и f_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, полагаются равными нулю, а функции $k_i(x, \xi_0, \xi, \nu)$, $i = 1, \ldots, n$, на конечном элементе Δ, пересечение которого с этим множеством имеет ненулевую меру, задаются равными $k_i(x', \xi_0, \xi, \nu)$, где x' – любая точка из множества $\Delta \cap \Omega$. Приближенное решение на каждом слое по $t \in \omega_\tau$ ищется из множества функций $V_h \in W_p^1(\Omega_h) \cap L_2(\Omega_h)$, сужение которых на каждый конечный элемент – линейная функция, $\overset{\circ}{V}_h \in V_h$ – равные нулю на Γ_h функции.

Определение 2. *Функцию $y(t) \in \overset{\circ}{V}_h$ для $t \in \omega_\tau$ назовем приближенным решением задачи (1)–(2), если*

$$\int\limits_{\Omega_h} y(x,0) w dx = \int\limits_{\Omega_h} u_0(x) w dx \qquad \forall\, w \in \overset{\circ}{V}_h \tag{10}$$

и для всех $t \in \{0, \tau, \ldots, T-\tau\}$ выполнены равенства

$$\int\limits_{\Omega_h} \left(\frac{\hat{y} - y}{\tau} w + \sum_{i=1}^{n} k_i\big(x, y, \nabla \hat{y}, By\big) \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx = \int\limits_{\Omega_h} \sum_{i=1}^{n} f_{i,\tau}(t) \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx \qquad \forall\, w \in \overset{\circ}{V}_h, \tag{11}$$

где $f_{i,\tau}(x,t) = \dfrac{1}{\tau} \displaystyle\int\limits_t^{t+\tau} f_i(x,\xi) d\xi$, $\hat{y}(t) = y(t+\tau)$.

Для задачи (10)–(11) доказана однозначная разрешимость, получены для множеств $\{\Pi^\pm y\}$ [2)] равномерные по h и τ оценки в пространствах $L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_h))$, $L_\infty(0,T; L_2(\Omega_h))$, а также оценка вида

$$\frac{1}{k\tau} \sum_{i=0}^{M-k} \tau \int\limits_{\Omega_h} \big(\Pi^+ y(t_i + k\tau) - \Pi^+ y(t_i)\big)^2 dx\, dt \leqslant \text{ const} \qquad \forall \mathrm{k} = 1, 2, ..., \mathrm{M}, \tag{12}$$

из которых, очевидно, вытекает, что для функции y, продолженной нулем на область $\Omega \setminus \Omega_h$, справедливы равномерные по h и τ оценки в $L_p(0,T; W_p^1(\Omega))$, $L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$ и аналогичное (12) (с интегрированием по Ω) неравенство. Из этих результатов и теоремы о компактности (см. [5], лемма 2) следует существование функции $u \in L_p(0,T; W_p^1(\Omega)) \bigcap L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$ и подпоследовательности $\{\Pi^\pm y_k\}_{k=0}^\infty \subset \{\Pi^\pm y\}$ такие, что при $\tau \to 0$ и $k \to +\infty$

$$\Pi^\pm y_k \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L_p(0,T; W_p^1(\Omega)), \tag{13}$$

$$\Pi^\pm y_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в } L_\infty(0,T; L_2(\Omega)), \tag{14}$$

$$\Pi^\pm y_k \to u \quad \text{в } L_{p^*}(Q_T), \tag{15}$$

$$\Pi^\pm y_k \to u \quad \text{п.в. в } Q_T, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} &p^* = 2, \quad \text{если} \quad \big(p \geqslant n\big) \vee \big((pn/(n-p) > 2) \wedge (p < n)\big), \\ &p^* \in [1, pn/(n-p)), \quad \text{если} \quad (pn/(n-p) \leqslant 2) \wedge (p < n). \end{aligned} \tag{17}$$

Устанавливается также, что определенная соотношениями (13)–(16) предельная функция u принадлежит пространству $L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))$.

Дальнейшие рассуждения опираются на следующие результаты.

[2)] $\Pi^+ z$ и $\Pi^- z$ – кусочно-постоянные восполнения сеточной функции z, равные значению $z(t^*)$ на множестве $[t^*, t^* + \tau]$ и $[t^* - \tau, t^*]$) соответственно.

Лемма 1. *Пусть* Ω *— ограниченная область* R^n*, последовательность* $\{u_m\}$ *ограничена в* $L_{q_1}(0,T;L_{p_1}(\Omega))$ *и сходится к* u *сильно в* $L_{q_0}(0,T;L_{p_0}(\Omega))$*,* $1<p_0<p_1<\infty$*,* $1<q_0<q_1<\infty$*. Тогда* $\{u_m\}$ *сходится сильно к* u *в* $L_q(0,T;L_p(\Omega))$ *при любых* $p_0\leqslant p<p_1$*,* $q_0\leqslant q<q_1$*.*

Лемма 2. *(см. [5]) Пусть последовательность* $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ *сходится к* u *в пространстве* $L_1(0,T;L_{p_1}(\Omega))$*,* $p_1>1$*, функция* $g(x,\xi)$*, определяющая оператор* B*, измерима по* x *при любом* $\xi\in R$*, непрерывна по* ξ *для почти всех* $x\in\Omega$ *и удовлетворяет условию*

$$|g(x,\xi)|\leqslant g_0(x)+c_g\,|\xi|^s\qquad\forall\,x\in\Omega,\quad\forall\,\xi\in R,\tag{18}$$

здесь $c_g>0$*,* $s\in[0,p_1]$ *— заданные константы,* g_0 *— неотрицательная, интегрируемая по* Ω *функция. Тогда* Bu_m *сходится сильно к* Bu *в* $L_1(0,T)$*.*

Из априорных оценок и леммы 1 вытекает, что последовательность $\{\Pi^{\pm}y_k\}$ сходится сильно в $L_{p^*}(0,T;L_{\tilde p}(\Omega))$, при этом

$$\begin{gathered}\tilde p<2,\quad\text{если}\quad(n>p)\wedge(np/(n-p)\leqslant 2),\\ \tilde p=np/(n-p),\quad\text{если}\quad(n>p)\wedge(np/(n-p)>2),\\ \tilde p\in[2,+\infty),\quad\text{если}\quad n\leqslant p.\end{gathered}\tag{19}$$

Условия означают, что $\tilde p<q_{max}$, где q_{max} — максимальный параметр, при котором

$$L_q(\Omega)\supset\big(\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\cap L_2(\Omega)\big).$$

Из леммы 2 и предыдущих рассуждений следует, что Bu_m сходится сильно к Bu в $L_1(0,T)$, если $s\in[0,\tilde p)$, где $\tilde p$ — параметр, определенный в (19).

Далее устанавливается, что предельная функция u является обобщенным решением задачи (1), (2). С этой целью для произвольного элемента $w\in C_0^\infty(\Omega)$, продолженного нулем вне Ω, строится интерполянт $w_h\in V_h$, который в общем случае не равен нулю в точках $x\in\Gamma_h\cap\Omega$. Поэтому через $\tilde w_h$ обозначается функция из $\overset{\circ}{V}_h$, совпадающая с w_h во всех точках сетки на Ω_h, кроме точек, принадлежащих $\Gamma_h\cap\Omega$. Равенство (11) записывается при $w=\tilde w_h\,\eta_\tau$, где η_τ — определенная на $\overline{\omega}_\tau$ функция, равная на этом множестве значению гладкой функции $\eta\in C^\infty(0,T):\ \eta(T)=0$. Результат преобразуется с помощью формулы суммирования по частям и интегрирования по переменной t к следующему виду

$$\begin{gathered}-\int_0^T\int_{\Omega_h}\Pi^+(\hat y(t))\;\tilde w_h\,\Pi^+\eta_{\tau\bar t}\,dxdt-\int_{\Omega_h}u_0(x)\,\tilde w_h\,\eta(0)\,dx+\\ +\int_0^T\int_{\Omega_h}\sum_{i=1}^n\Pi^+k_i\big(x,\,y,\nabla\hat y,\,By\big)\,\frac{\partial\tilde w_h}{\partial x_i}\,\Pi^+\eta_\tau\,dxdt=\int_0^T\int_{\Omega_h}\sum_{i=1}^n f_i(t)\frac{\partial\tilde w_h}{\partial x_i}\,\Pi^+\eta_\tau\,dxdt.\end{gathered}\tag{20}$$

Основная часть дальнейшего доказательства — обоснование предельного перехода в равенстве (20). Методика исследования в целом стандартна: используется метод монотонности. Некоторые особенности появляются вследствие проведенного при построении приближенного метода продолжения задачи на Ω_h. Например, возникает необходимость убедиться в том, что при $\tau\to 0$ и $h\to 0$ стремятся к нулю слагаемые следующих видов

$$\int_0^T\int_{\Omega_h\setminus\Omega}\Pi^+(\hat y(t))\;\tilde w_h\,\Pi^+\eta_{\tau\bar t}\,dxdt\quad\longrightarrow\quad 0,$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_h} \Pi^+(\hat{y}(t))\,(\tilde{w}_h - w_h)\,\Pi^+ \eta_{\tau\bar{t}}\,dxdt \quad \longrightarrow \quad 0\,.$$

В заключении сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия на функции* k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, $f \in L_{p'}(0, T; W_{p'}^{-1}(\Omega))$. *Тогда при любом* $s \in [0, \tilde{p})$ *существует последовательность кусочно-постоянных по* t *восполнений приближенного решения задачи (1),(2), сходящаяся сильно в* $L_{p^*}(0, T; L_{\tilde{p}}(\Omega))$ *к обобщенному решению задачи (1),(2), здесь* p^* *и* $\tilde{p}$ *— параметры, определенные соотношениями (17), (19). При условии единственности обобщенного решения любая последовательность кусочно-постоянных восполнений приближенного решения будет обладать этим свойством.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chipot M., Molinet L.** Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems //Applicable Analysis. — 2001. — V. 80, № 3/4. — P. 279—315.
2. **Chipot M., Lovat B.** Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic problems, advances in quenching // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal. — 2001. — V. 8, № 1. — P. 35—51.
3. **Pavlova M.F.** On the solvability of nonlocal nonstationary problems with double degeneration //Differential Equations. — 2011. — V. 47, № 8. — P. 1161—1175.
4. **Glazyrina O.V., Pavlova M.F.** The unique solvability of a certain nonlocal nonlinear problem with a spatial operator strongly monotone with respect to the gradient // Russian Mathematics. — 2012. — № 3. — P. 83—86.
5. **Глазырина О.В., Павлова М.Ф.** О разрешимости эволюционного вариационного неравенства с нелокальным пространственным оператором // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 7. — P. 884 — 898.

REFERENCES

1. **Chipot M., Molinet L.** Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems //Applicable Analysis. — 2001. — V. 80, № 3/4. — P. 279—315.
2. **Chipot M., Lovat B.** Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic problems, advances in quenching // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal. — 2001. — V. 8, № 1. — P. 35—51.
3. **Pavlova M.F.** On the solvability of nonlocal nonstationary problems with double degeneration //Differential Equations. — 2011. — V. 47, № 8. — P. 1161—1175.
4. **Glazyrina O.V., Pavlova M.F.** The unique solvability of a certain nonlocal nonlinear problem with a spatial operator strongly monotone with respect to the gradient // Russian Mathematics. — 2012. — № 3. — P. 83—86.
5. **Glazyrina O.V., Pavlova M.F.** On the solvability of an evolution variational inequality with a nonlocal space operator // Differential equations. — 2014. — V. 50, № 7. — P. 873—887.