

УДК 539.3

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБДЕЛКИ ТОННЕЛЯ МЕТРОПОЛИТЕНА,
РАСПОЛОЖЕННОЙ В ГРУНТЕ СЛОЖНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ¹⁾**

И.С. БАЛАФЕНДИЕВА, Д.В. БЕРЕЖНОЙ, М.К. САГДАТУЛЛИН, Л.Р. СЕКАЕВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail Bereznoi.Dmitri@mail.ru; LRSekaeva@kpfu.ru

**SIMULATION OF DEFORMING OF LINING OF THE TUNNEL OF THE SUBWAY, THE DIFFICULT
PHYSICAL NATURE LOCATED IN SOIL**

I.S. BALAFENDIEVA, D.V. BEREZHNOI, M.K. SAGDATULLIN, L.R. SEKAIEVA

Kazan Federal University

Аннотация

В работе предложена конечно-элементная методика расчета деформирования обделки тоннеля метрополитена, расположенного в сухом и водонасыщенном грунте. Для моделирования взаимодействия между элементами деформируемых конструкций и грунтовыми средами используется специальный "контактный" конечный элемент, позволяющий учесть все случаи взаимодействия контактирующих поверхностей. Решен ряд задач деформирования кольца обделки тоннеля метрополитена, расположенного в грунте сложной физической природы.

Ключевые слова: метод конечных элементов, контактные проблемы, конечные деформации, грунты

Summary

In operation the finite and element method of calculation of deforming of an lining of a tunnel of the subway located in dry and water-saturated soil is offered. For simulation of interaction between elements of deformable constructions and the soil environments the special "contact" terminal element allowing to consider all cases of interaction of the contacting surfaces is used. A row of tasks of deforming of a ring of an lining of a tunnel of the subway located in soil of the difficult physical nature is solved.

Key words: a method of finite elements, contact problems, finite strains, soils.

Введение

При проектировании современных транспортных и строительных сооружений часто практикуются работы в грунтах, находящихся в сложнейших физико-геологических условиях. Традиционно в механике деформируемого твердого тела используются методики, в которых используется лагранжево описание сплошной среды [5,13,15]. В этом случае формулируется краевая задача в дифференциальной или вариационной формах, для решения которой возможно использование различных численных алгоритмов [2,16,17]. В последнее время получили развитие пошаговые методы нагружения, в соответствии с которыми процесс деформирования представляется как последовательность равновесных состояний, и переход из текущего состояния в последующее определяется приращением нагрузки, изменением граничных условий или расчетной области и т.д. При моделировании взаимодействия элементов конструкций с грунтами [1,6-9] в большинстве случаев для адекватной оценки характера деформирования используются различные методики контактного взаимодействия элементов конструкций между собой и с грунтом. Для описания пластического деформирования обычно используется связь между приращениями компонент тензора обобщенных напряжений [3,4] и тензора деформаций Коши-Грина в виде уравнений Прандтля-Рейсса для упрочняющегося материала [2]. В свете результатов, изложенных в [10,11,12,14], их использование

¹⁾Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-97058, 13-01-97059, 12-01-00955, 12-01-97026)

при постановке упругопластических задач механики деформируемых твердых тел не позволяет описать явление статической неустойчивости образцов при их растяжении (следовательно, и процесс образования шейки у пластических материалов). В связи условие текучести и уравнения Прандтля-Рейсса заменим аналогичным условием текучести $F \equiv \sigma_i - c = 0$, $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{i,j} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$, $c = H(\chi)$ и уравнениями

$$\Delta \sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\mu} \delta_{ij} \Delta \varepsilon_0^{tr} + 2G \Delta \varepsilon_{ij}^{tr} - \alpha \frac{3G \sum_{k,l} \sigma'_{kl} \Delta \varepsilon_{kl}^{tr}}{(\sigma_i)^2 (H'_{\chi}/3G+1)} \sigma'_{ij} = D_{ijmn} \Delta e_{mn} + D_{ij}^p (\Delta e_{mn}, e_{mn}),$$

составленными с использованием компонент истинных напряжений σ_{ij} и истинных деформаций ε_{ij}^{tr} , принимая в дальнейшем для них обозначения

$$\varepsilon_{ii}^{tr} = \varepsilon_i, \quad \varepsilon_{ij}^{tr} = \sin \gamma_{ij}, \quad i \neq j \quad (1)$$

выделяя в них линейную часть (тензор малых деформаций при малых перемещениях) согласно представлениям

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii}^{tr} &= e_{ii} + (\sqrt{1+2\varepsilon_{ii}} - 1 - e_{ii}) = e_{ii} + e_{ii}^{ml}, \\ \varepsilon_{ij}^{tr} &= e_{ij} + \left(2\varepsilon_{ij}(1+2\varepsilon_{ii})^{-1/2}(1+2\varepsilon_{jj})^{-1/2} - e_{ij} \right) = e_{ij} + e_{ij}^{ml}, \end{aligned}$$

и устанавливая вид функции H , исходя из истинной диаграммы деформирования образцов. В уравнениях (1) через $\Delta \varepsilon_{ij}^{tr}$ обозначены приращения компонент деформаций $\Delta \varepsilon_{ij}^{tr}$, через $\Delta \varepsilon_0^{tr}$ – приращения средней истинной деформации, через $\Delta \varepsilon_{ij}^{tr}$ – приращения девиатора истинных деформаций, а через D_{ijmn} и $D_{ij}^p(e_{mn}, \Delta e_{mn})$ – линейно упругие константы материала и нелинейная часть приращения напряжений. Для моделирования механического контакта используется специальный контактный элемент, позволяющий учесть возможность различные случаи взаимодействия между собой контактирующих поверхностей, в частности, отрыва, проскальзывания с трением и т.д. Общее разрешающее уравнение деформирования подконструкций с учетом механического контакта в вариационной форме имеет вид

$$\sum_m \iiint_{\Omega_m} \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} d\Omega + \sum_k \iiint_{\Omega_k} \{\sigma_H\}^T \{\delta\varepsilon_H\} d\Omega = \sum_m \left(\iiint_{\Omega_m} \rho \{g\}^T \{\delta V\} d\Omega + \iint_{S_m^\sigma} \{P\}^T \{\delta V\} dS \right), \quad (2)$$

где сумма по m – сумма по объемам блоков, по k обозначается сумма по накладкам, Ω_m , Ω_k – соответственно, объемы блоков и накладок; $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{V\}$ – напряжения, деформации и перемещения элементарных объемов блоков; $\{\sigma_H\}$, $\{\varepsilon_H\}$ – напряжения и деформации в накладках, $\{g\}$ – вектор ускорения свободного падения ($\rho \{g\}$ – сила тяжести), $\{P\}$ – граничная нагрузка, действующая на части границы S_m^σ . Будем считать, что первоначальное обжатие контактного конечного элемента всегда существует. Для решения нелинейной задачи на базе уравнения (2) используется итерационный метод, являющийся комбинацией метода начальных напряжений и метода дополнительной деформации. Базовым для определения k -й итерации является следующее вариационное уравнение

$$\begin{aligned} \sum_m \iiint_{\Omega_m} \{\sigma^k\}^T \{\delta\varepsilon\} d\Omega + \sum_k \iiint_{\Omega_k} (\varepsilon_H^k E_H \delta\varepsilon_H + \gamma_H^k G_H \delta\gamma_H) d\Omega_k = \sum_m \left(\iiint_{\Omega_m} \rho \{g\}^T (\delta V) d\Omega + \right. \\ \left. + \iint_{S_m^\sigma} \{p\}^T \{\delta V\} ds \right) + \sum_k \iiint_{\Omega_k} (\tilde{\sigma}_H^k \delta\varepsilon_H + \tilde{\tau}_H^k \delta\gamma_H) d\Omega_k, \end{aligned} \quad (3)$$

где величины $\tilde{\sigma}_H^k$ и $\tilde{\tau}_H^k$ (3) являются "начальными напряжениями". Используемая итерационная процедура типа "метода начальных напряжений" представляет собой следующую последовательность действий.

Первое приближение определяется из решения вариационного уравнения принципа виртуальных перемещений в предположении справедливости закона Гука:

$$\sum_k \iiint_{V_k} \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dV_k = \sum_k \iiint_{V_k} \{Q\}^T \{\delta u\} dV_k + \sum_k \iint_{S_k} \{P\}^T \{\delta u\} dS_k,$$

где $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ – векторы напряжений и деформаций на k -ом трехмерном фрагменте грунта; $\{Q\}$, $\{P\}$ – векторы массовой и поверхностной нагрузок. В данном уравнении предполагается, что кинематические связи между фрагментами (условия непрерывности перемещений) и кинематические граничные условия выполняются априори. Уравнения равновесия для каждого фрагмента, статические условия сопряжения и статические граничные условия выполняются автоматически в интегральном смысле. В этом случае разрешающее уравнение линейно и записывается в виде:

$$\sum_k \iiint_{V_k} \{\varepsilon^{(1)}\}^T [D] \{\delta\varepsilon\} dV_k = \sum_k \iiint_{V_k} \{Q\}^T \{\delta u\} dV_k + \sum_k \iint_{S_k} \{P\}^T \{\delta u\} dS_k.$$

Все последующие шаги итераций основаны на линейных уравнениях для приращений

$$\sum_k \iiint_{V_k} \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}^T [D] \{\delta\varepsilon\} dV_k = \sum_k \iiint_{V_k} \{\sigma_H^{(k)}\}^T \{\delta\varepsilon\} dV_k$$

из решения которых находятся

$$\{\Delta u^{(k+1)}\}, \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}, \{\Delta\sigma^{(k+1)}\} = [D] \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}. \quad (4)$$

Истинное деформированное состояние определяется как

$$\{u^{(k+1)}\} = \{u^{(k)}\} + \{\Delta u^{(k+1)}\}, \quad \{\varepsilon^{(k+1)}\} = \{\varepsilon^{(k)}\} + \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}.$$

"Пробные" напряжения для анализа возможного предельного состояния и определения истинных и дополнительных напряжений находятся как

$$\{\sigma^{(k+1)}\} = \{\sigma_T^{(k)}\} + \{\Delta\sigma^{(k+1)}\}, \quad (5)$$

где $\{\sigma_T^{(k)}\}$ – истинные напряжения, соответствующие принятой теории прочности. Для их вычисления по напряжениям (5) строится "упругопластическая матрица" (3) и определяются

$$\{\sigma_T^{(k+1)}\} = \{\sigma_T^{(k)}\} + [D_{ep}^{(k+1)}] \{\Delta\varepsilon^{(k+1)}\}. \quad (6)$$

В правой части уравнения (4) фигурируют так называемые "начальные" или "дополнительные" напряжения, которые вводятся как разности "пробных" напряжений (5) и истинных (6)

$$\{\Delta\sigma^{(k+1)}\} = \{\sigma^{(k)}\} - \{\sigma_T^{(k+1)}\}.$$

Переход от вариационной задачи к алгебраической производится посредством дискретизации методом конечных элементов.

Разработана и реализована методика определения напряженно-деформированного состояния в обделке тоннеля метрополитена на основе уточненных моделей. Принимается вариант заглубления тоннеля на 6 м от поверхности, которое имеет место для той его части, которая исследовалась экспериментально. Это позволяет сопоставить результаты расчетов с опытными данными и судить о том, какая из расчетных схем наиболее близко соответствует реальности.

Вариант 1 предполагает однородный грунт (супесь пластическая) со следующими характеристиками: модуль упругости $E = 12$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, удельный вес $\gamma = 2060$ кг/м³, коэффициент сцепления $c = 15$ кПа, угол внутреннего трения $\varphi = 22^\circ$, пористость $m = 0.363$, коэффициент фильтрации $k_f = 0.1$ м/сут $\approx 1.16 \cdot 10^{-6}$ м/с. Вариант 2 также предполагает однородный грунт (песок мелкий водонасыщенный) со следующими характеристиками: модуль упругости $E = 33$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, удельный вес $\gamma = 2040$ кг/м³, коэффициент сцепления $c = 2.6$ кПа, угол внутреннего трения $\varphi = 22^\circ$, пористость $m = 0.379$, коэффициент фильтрации $k_f = 9.5$ м/сут $\approx 1.1 \cdot 10^{-4}$ м/с. Для бетона принимаются следующие параметры: модуль упругости $E = 35000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, удельный вес $\gamma = 2500$ кг/м³.

Рассматривалась задача о взаимодействии кольца обделки с грунтовым массивом, достигнувшем предельного состояния. Численные расчеты свидетельствуют о достижении грунтом предельного состояния в части расчетной области. Иллюстрацией этому является рисунок 1, на котором изображены области развитых пластических деформаций для вариантов 1. Однако на напряженное состояние кольца обделки это обстоятельство сказывается мало. В табл. 1 приведены значения максимальных растягивающих и сжимающих окружных напряжений для приведенных в предыдущем разделе вариантов распределения грунтов. Отличие от результатов упругого расчета не превышает 1%.

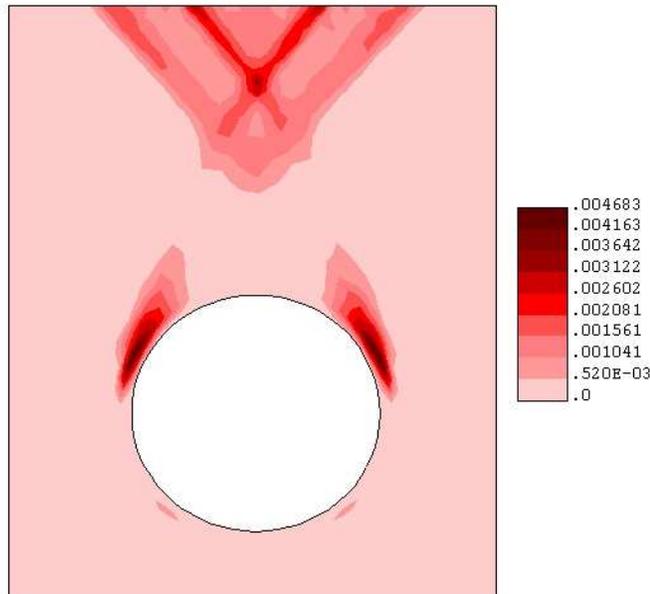


Рис. 1:

Табл. 1:

Грунт	$\sigma_{\text{окр}}^{\text{max}}$ [МПа]	$\sigma_{\text{окр}}^{\text{min}}$ [МПа]
Вариант 1	17.9	20.5
Вариант 2	11.2	-14.1

Еще одна расчетная схема предполагает решение стационарной задачи консолидации грунтовой среды, которая учитывает взаимное влияние давления грунтовых вод и напряженно-деформированного состояния скелета грунта. Проведены исследования течения грунтовых вод на напряженное состояние в грунте и обделке. Для этого на боковых поверхностях расчетной области задавались некоторые условные значения потока. В этом случае давление грунтовых вод приобретало неравномерность распределения по

горизонтали и появлялась боковая составляющая нагрузки. На рис. 2 представлено распределение давления в жидкой фазе при $K_a \frac{\partial P^w}{\partial n} / \gamma^w = 0.02$ и уровне грунтовых вод – 2 м от свободной поверхности. В кольце обделки уровень напряжений незначительно увеличивается.

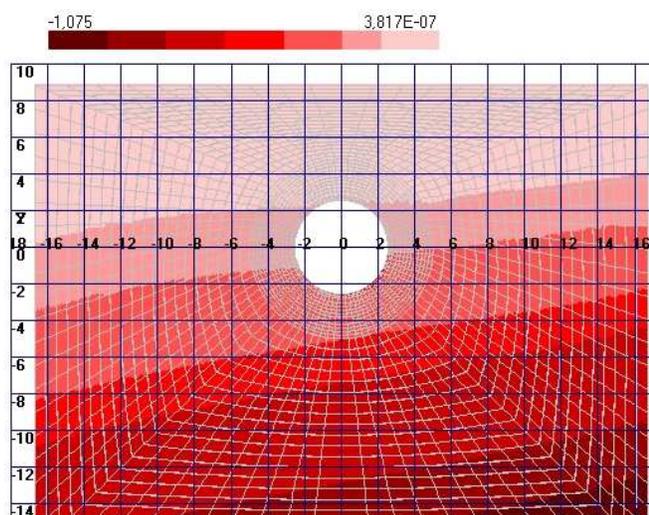


Рис. 2:

Предложенный метод решения задач механики с конкретными приложениями относится к современной технологии научного сопровождения, проектирования и строительства сложных объектов. Его использование позволяет проследить за изменением напряженно-деформированного состояния и поля перемещений структурно изменяющейся расчетной области от начала и до конца строительства. Это позволяет более точно и технически грамотно принимать проектные решения для различных этапов строительных работ, что зачастую нельзя сделать, опираясь только на существующие СНиПы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородай В.Г., Гарифуллин М.Ф., Голубев Н.В., Голованов А.И., Закиров Р.Ф., Паймушин В.Н., Пискунов А.А., Рогов Н.В., Швецов В.А.** Математическое моделирование в мостостроении с приложениями к реконструкции моста через р. Казанку и проектированию и строительству моста через р. Кама у с. Сорочьи Горы. – Казань, 2003. – 380 с.
2. **Голованов А.И., Бережной Д.В.** Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. – Казань, 2001. – 300 с.
3. **Новожилов В.В.** Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
4. **Новожилов В.В.** Вопросы механики сплошной среды. – Л.: Судостроение, 1989. – 400 с.
5. **Черных К.Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
6. **Бережной Д.В., Кузнецова И.С., Саченков А.А.** Моделирование пластического деформирования многослойного грунта в зоне опоры многопролетного моста // Ученые записки Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, Кн. 1. – С. 116-125.
7. **Бережной Д.В., Голованов А.И., Луканкин С.А., Секаева Л.Р.** Моделирование поведения железобетонной обделки тоннеля в деформируемом грунте с учетом одностороннего контактного взаимодействия ее блоков через упругие прокладки // Вестник Казанского государственного технического университета, – 2010. – №2. – С. 4-9.

8. **Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р.** Моделирование поведения и оценка Несущей способности системы тонкостенная конструкция-грунт с учетом ползучести и деградации грунта // Ученые записки Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т.153. – №4. – С. 67-75.
9. **Шакирзянов Ф.Р.** Сравнительный анализ двух методик расчета системы "тонкостенная конструкция-грунт" с учетом выемки грунта и ползучести // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012. – №1. – С. 44-47.
10. **Паймушин В.Н., Шалашилин В.И.** Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении // Докл. РАН. – 2004. – Т.396. – № 4. – С. 492-495.
11. **Паймушин В.Н., Шалашилин В.И.** О соотношениях теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т.69. – № 5. – С. 861-881.
12. **Паймушин В.Н.** Об уравнениях геометрически нелинейной теории упругости и безмоментных оболочек при произвольных перемещениях // ПММ. – 2008. – Т.72. – Вып. 5. – С. 822-841.
13. **Badriev, I.B., Banderov, V.V., Zadvornov, O.A.** On the equilibrium problem of a soft network shell in the presence of several point loads // Applied Mechanics and Materials. – 392. – 2013. – PP. 188-190.
14. **Berezhnoi D.V., Paimushin V.N.** Две формулировки elastoplastic проблем и теоретическое определение местоположения формирования шеи в образцах под напряженностью [Two formulations of elastoplastic problems and the theoretical determination of the location of neck formation in samples under tension]. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – Vol. 75. – Book 4. – 2011. – PP. 447-462.
15. **Davydov R.L., Sultanov L.U.** Числовой алгоритм решения проблемы большой упруго-пластмассовой деформации fem [Numerical algorithm of solving the problem of large elastic-plastic deformation by fem]. // PNRPU Mechanics Bulletin Issue 1. – 2013. – PP. 81-93.
16. **Berezhnoi, D.V., Sachenkov, A.A., Sagdatullin, M.K.** Геометрически нелинейная деформация elastoplastic почва [Geometrically nonlinear deformation elastoplastic soil]. // Applied Mathematical Sciences. – Vol. 8. – 2014. № 127. – PP. 6341-6348.
17. **Sultanov, L., Berezhnoi D.** Выемка грунта моделирующий в строительстве подземного строительства [Dredging Modelling at Construction of Underground Constructions]. // Proceedings of the International Conference on Mining, Material and Metallurgical Engineering, Prague, Czech Republic, August 11-12. – 2014. – PP. 155-1-155-4.

REFERENCES

1. **Boroday V.G., Garifullin M.F., Golubev N.V., Golovanov A.I., Zakirov R.F., Paymushin V.N., Piskunov A.A., Rogov N.V., Shvetsov V.A.** Matematicheskoye modelirovaniye v mostostroyenii s prilozheniyami k rekonstruktsii mosta cherez r. Kazanku i proyektirovaniyu i stroitel'stvu mosta cherez r. Kama u s. Soroch'i Gory [Mathematical modeling in a bridge building with annexes to bridge reconstruction through river to Kazank and design and bridge construction through the Kama River at page. Magpie Mountains]. – Kazan, 2003. – 380 p.
2. **Golovanov A.I., Berezhnoy D.V.** Metod konechnykh elementov v mekhanike deformiruyemykh tverdykh tel [Finite element method in mechanics of deformable solid bodies]. – Kazan', 2001. – 300 p.
3. **Novozhilov V.V.** Osnovy nelineynoy teorii uprugosti [Bases of the nonlinear theory of elasticity]. – M.-L.: Gostekhizdat, 1948. – 211 p.
4. **Novozhilov V.V.** Voprosy mekhaniki sploshnoy sredy [Questions of mechanics of the continuous environment]. – L.: Sudostroyeniye, 1989. – 400 p.
5. **Chernykh K.F.** Nelineynaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh raschetakh [The nonlinear theory of elasticity in machine-building calculations]. – L.: Mashinostroyeniye, 1986. – 336 p.

6. **Berezhnoi D.V., Kuznetsova I.S., Sachenkov A.A.** Modelirovaniye plasticheskogo deformirovaniya mnogosloynnogo grunta v zone opory mnogoproletnogo mosta [Modeling of plastic deformation of multilayered soil in a zone of a support of the multilayered bridge] // Uchenyye zapiski Kazan. un-ta. Ser. Fiz.-matem. nauki. – 2010. – Vol. 152, Book. 1. – PP. 116-125.
7. **Berezhnoi D.V., Golovanov A.I., Lukankin S.A., Sekaeva L.R.** Modelirovaniye povedeniya zhelezobetonnoy obdelki tonnelya v deformiruyemom grunte s uchedom odnostoronnego kontaktnogo vzaimodeystviya yeye blokov cherez uprugiyeh prokladki [Modeling of behavior of a ferroconcrete obdelka of a tunnel in deformable soil taking into account unilateral contact interaction of its blocks through elastic laying] // Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, – 2010. – №2. – PP. 4-9.
8. **Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R.** Modelirovaniye povedeniya i otsenka Nesushchey sposobnosti sistemy tonkostennaya konstruktsiya-grunt s uchedom polzuchesti i degradatsii grunta [Modeling of behavior and assessment of bearing ability of system a thin-walled design soil taking into account creep and soil degradation] // Uchenyye zapiski Kazan. un-ta. Ser. Fiz.-matem. nauki. – 2011. – Vol.153. – №4. – PP. 67-75.
9. **Shakirzyanov F.R.** Sravnitel'nyy analiz dvukh metodik rascheta sistemy "tonkostennaya konstruktsiya-grunt"s uchedom vyyemki grunta i polzuchesti [The comparative analysis of two method of calculation of system "thin-walled design soil" taking into account dredging and creep] // Nauchno-tekhnicheskyy vestnik Povolzh'ya. – 2012. – №1. – PP. 44-47.
10. **Paymushin V.N., Shalashilin V.I.** Neprotivorechivyy variant teorii deformatsiy sploshnykh sred v kvadrachnom priblizhenii [Consistent version of the theory of deformations of continuous environments in square approach] // Dokl. RAN. – 2004. – Vol.396. – № 4. – PP. 492-495.
11. **Paymushin V.N., Shalashilin V.I.** O sootnosheniyakh teorii deformatsiy v kvadrachnom priblizhenii i problemy postroyeniya utochnennykh variantov geometricheski nelineynoy teorii sloistykh elementov konstruktsiy [About ratios of the theory of deformations in square approach and problems of creation of the specified versions of geometrically nonlinear theory of layered elements of designs] // Prikladnaya matematika i mekhanika. – 2005. – Vol.69. – № 5. – PP. 861-881.
12. **Paymushin V.N.** Ob uravneniyakh geometricheski nelineynoy teorii uprugosti i bezmomentnykh obolochek pri proizvol'nykh peremeshcheniyakh [About the equations of geometrically nonlinear theory of elasticity and momentless covers at any movements] // PMM. – 2008. – Vol.72. – Book. 5. – PP. 822-841.
13. **Badriev, I.B., Banderov, V.V., Zadvornov, O.A.** On the equilibrium problem of a soft network shell in the presence of several point loads // Applied Mechanics and Materials. – 392. – 2013. – PP. 188-190.
14. **Berezhnoi D.V., Paimushin V.N.** Dve formulirovki elastoplastic problem i teoreticheskoye opredeleniye mestopolozeniya formirovaniya shi v obraztsakh pod napryazhennoyeyu [Two formulations of elastoplastic problems and the theoretical determination of the location of neck formation in samples under tension]. // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – Vol. 75. – Book 4. – 2011. – PP. 447-462.
15. **Davydov R.L., Sultanov L.U.** Chislouy algoritm resheniya problemy bolshoy uprugoplasmassovoy deformatsii fem [Numerical algorithm of solving the problem of large elastic-plastic deformation by fem]. // PNRPU Mechanics Bulletin Issue 1. – 2013. – PP. 81-93.
16. **Berezhnoi, D.V., Sachenkov, A.A., Sagdatullin, M.K.** Geometricheski nelineynaya deformatsiya elastoplastic pochva [Geometrically nonlinear deformation elastoplastic soil]. // Applied Mathematical Sciences. – Vol. 8. – 2014. № 127. – PP. 6341-6348.
17. **Sultanov, L., Berezhnoi D.** Vyyemka grunta modeliruyushiy v stroitel'stve podzemnogo stroitel'stva [Dredging Modelling at Construction of Underground Constructions]. // Proceedings of the International Conference on Mining, Material and Metallurgical Engineering, Prague, Czech Republic, August 11-12. – 2014. – PP. 155-1-155-4.