УДК 519.245

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ АМОРФНЫХ И КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ НАНОСТРУКТУР ПРИ ИОННОЙ ИМПЛАНТАЦИИ[1)]

Т.А. АВЕРИНА[1], А.Л. БОНДАРЕВА[2], Г.И. ЗМИЕВСКАЯ[3,4]

[1] *Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН*
[2] *Новосибирский Государственный Университет*
[3] *Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН*
[4] *МФТИ(Государственный Университет)*
E-mail: ata@osmf.sscc.ru; bal310775@yandex.ru; zmig@mail.ru

CONPUTER SIMULATION OF MODEL FOR THE FORMATION OF AMORPHOUS AND CRYSTALLINE NANOSTRUCTURES UNDER ION IMPLANTATION

T.A. AVERINA[1], A.L. BONDAREVA[2], G.I. ZMIEVSKAYA[3,4]

[1] *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS*
[2] *Novosibirsk State University*
[3] *Keldysh Institute of Applied Mathematics*
[4] *MFTI (State University)*

Аннотация

Кинетическая модель имплантации представлена системой стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича для стохастических динамических переменных (размер кластера, координаты и др.), которые решаются эффективным численным методом, что позволяет анализировать нелинейную стадию фазового превращения, модифицирующего свойства поверхности, сравнить влияние ионных пучков на процессы в твердой и газообразной фазах (на поверхности образца или в его объеме).

Ключевые слова: Стохастическое моделирование, уравнение Колмогорова, стохастические дифференциальные уравнения, ионная имплантация

Summary

The kinetic model of implantation is presented by a system of stochastic differential equations in the sense of Stratonovich for stochastic dynamical variables (cluster size, location, etc.) which can be solved by the efficient numerical method that allows to analyze the nonlinear stage of phase transformation modifying the surface properties, to compare the effect of ion beams on the processes in solid and gaseous phases (on a sample's surface or in its entirety).

Key words: Stochastic simulation, Kolmogorov equation, stochastic differential equations, ion implantation.

1. Введение

Кинетическая модель имплантации описывается уравнениями Колмогорова-Феллера и Эйнштейна-Смолуховского [1], которые являются уравнениями в частных производных относительно неравновесных функций распределения, зависящие от размера кластера, его координат (в объеме и на поверхности подложки) и времени. При записи кинетических уравнений используются линейные операторы типа Фоккера-Планка (ФП), а нелинейные коэффициенты уравнений зависят от функции распределения кластеров зародышей, т.е. являются функционал-коэффициентами, делая решаемые уравнения квазилинейными.

[1)]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00490, 14-01-00787) и гранта «Научные школы» НШ – 5111.2014.1

Эволюция марковского процесса, соответствующего данным уравнениям, может быть описана стохастическими дифференциальными уравнениями для стохастических динамических переменных (размер кластера, координаты).

Так как рост кластера происходит быстрее. чем его перемещение, то будет построена модификация устойчивого численного метода, которая позволит анализировать нелинейную стадию фазового превращения, модифицирующего свойства поверхности, сравнить влияние ионных пучков на процессы в твердой и газообразной фазах (на поверхности образца или в его объеме).

2. Связь стохастических дифференциальных уравнений и уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова

Уравнение для плотности вероятности перехода $\pi(y,t|y_0,t_0)$ диффузионного процесса y

$$\frac{\partial \pi(y,t|y_0,t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[a(y,t)\pi(y,t|y_0,t_0)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[B(y,t)\pi(y,t|y_0,t_0)\right], \tag{1}$$

называется *уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова* или *прямым уравнением* (поскольку в нем фигурирует производная по конечному моменту времени $t > t_0$), а уравнение

$$-\frac{\partial \pi(y,t|y_0,t_0)}{\partial t_0} = a(y_0,t_0)\frac{\partial}{\partial y_0}\pi(y,t|y_0,t_0) + \frac{1}{2}B(y_0,t_0)\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}\pi(y,t|y_0,t_0) \tag{2}$$

называется *уравнением Колмогорова* или *обратным уравнением* (так как в него входит производная по начальному моменту времени $t_0 < t$). Такое название оправдано тем, что уравнение (1) для процесса броуновского движения встречалось в работах Фоккера [2] и Планка [3]. Строгое математическое обоснование (1) было дано А. Н. Колмогоровым; им же впервые было получено уравнение (2) [4]. Для n_y -мерного диффузионного процесса $y = (y_1,\ldots,y_{n_y})^T$ уравнения (1) и (2) имеют вид

$$\frac{\partial \pi(y,t|y_0,t_0)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n_y}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_i(y,t)\ \pi(y,t|y_0,t_0)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_y}\sum_{i=1}^{n_y}\frac{\partial^2}{\partial y_i y_j}\left[B_{ij}(y,t)\pi(y,t|y_0,t_0)\right],$$

$$-\frac{\partial \pi(y,t|x,t_0)}{\partial t_0} = \sum_{i=1}^{n_y} a(x,t_0)\frac{\partial}{\partial x_i}\ \pi(y,t|x,t_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_y}\sum_{i=1}^{n_y} B_{ij}(x,t_0)\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}\ \pi(y,t|x,t_0),$$

$$a_i(y,t) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[(y_i(t+\Delta) - y_i(t))|y(t)],$$

$$B_{ij}(y,t) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[(y_i(t+\Delta) - y_i(t))(y_j(t+\Delta) - y_j(t))|y(t)].$$

Для одномерной плотности вероятности марковского диффузионного процесса также справедливо уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\frac{\partial p(y,t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n_y}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_i(y,t)p(y,t)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_y}\sum_{i=1}^{n_y}\frac{\partial^2}{\partial y_i y_j}\left[B_{ij}(y,t)p(y,t)\right], \tag{3}$$

$$p(y,t_0) = p_0(y).$$

Для отыскания решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (3) кроме начального условия нужно указать еще и граничные условия, которые определяются существом физической задачи.

Траектории n_y -мерного диффузионного процесса с одномерной плотностью вероятности, удовлетворяющей уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (3), могут быть найдены как решение СДУ в смысле Ито

$$y(t) = y_0 + \int_0^t a(y(\tau),\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{n_y}\int_0^t \sigma_{\cdot j}(y(\tau),\tau)dw_j(\tau), \quad y(0) = y_0, \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

где $\sigma_{\cdot j}$ обозначает j -й столбец матрицы σ, которая определяется через коэффициент диффузии $B(y,t)$:

$$B(y,t) = \sigma(y,t)\sigma^T(y,t).$$

Случайный n_y-мерный винеровский процесс $w(t) = (w_1(t), \dots, w(n_y(t))^T$, $t > 0$ со значениями в R^{n_w}, входящий в (4), является *стандартным винеровским процессом*. Стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Стратоновича, соответствующее уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (3) и СДУ в смысле Ито (4), имеет вид

$$y(t) = y_0 + \int\limits_0^t f(y(\tau), \tau) d\tau + \sum_{i=1}^{n_y} \int\limits_0^t \sigma_{\cdot j}(y(\tau), \tau) \circ dw_j(\tau), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

где

$$f_i(t, y) = a_i(t, y) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_w} \frac{\partial \sigma_{ij}(t, y)}{\partial y_l} \sigma_{lj}(t, y), \quad i = 1, \dots, n_y.$$

3. Кинетические уравнения модели

Уравнение Колмогорова-Феллера для эволюции размера блистера в точке с координатой r имеет вид

$$\frac{\partial p_r(g,t)}{\partial t} = \frac{1}{kT} \frac{\partial}{\partial g} \left[D_g(g,t) p_r(g,t) \frac{\partial \Delta\Phi(g,r,t)}{\partial g} \right] + \frac{\partial}{\partial g} \left[D_g(g,t) \frac{\partial p_r(g,t)}{\partial g} \right] + S_\alpha, \tag{6}$$

$$p_r(g, 0) = p_{0g}, \quad \frac{dp_r(g,t)}{dg}\Big|_{g=2} = 0, \quad p_r(g,t)\Big|_{g<2} = 0.$$

Здесь $S_\alpha(p_\alpha)$ — источник частиц, формирующих зародыш, p_α — функция распределения мономеров газа и/или вакансий, $p_r(g,t)$ — функция распределения зародышей по размерам в точке r объема решетки, g — размер блистера, измеряемый в единичных несжимаемых объемах атомов ксенона; $D_g = D_{g0} g^{2/3}$ — коэффициент диффузии в фазовом пространстве размеров зародышей; $\Delta\Phi(g,r,t)$ — термодинамический потенциал образования зародыша.

Уравнение Эйнштейна-Смолуховского для перемещения броуновской частицы с массой M_g, полученной из уравнения Колмогорова-Феллера (6) записывается в виде:

$$\frac{\partial p_g(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[D_r(r,t) \frac{\partial p_g(r,t)}{\partial r} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{F(r,t)}{M_g \gamma} p_g(r,t) \right], \tag{7}$$

$$p_g(r,t)|_{x=x_{left}} = p_g(r,t)\Big|_{x=x_{right}}, \quad p_g(r,t)|_{y=y_{left}} = p_g(r,t)\Big|_{y=y_{right}}.$$

Здесь $p_g(r,t)$ — функция распределения броуновской частицы с массой M_g, где r — радиус-вектор кластера в ортогональной системе координат $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; функция F определяется через $U(x,y,z)$ — потенциал коллективного косвенного взаимодействия кластеров между собой, с границами и дефектами поверхности.

Используя связь между уравнениями Фоккера-Планка-Колмогорова и СДУ, кинетическим уравнениям (6)–(7) соответствуют следующие СДУ в смысле Стратоновича:

$$dg(t) = -\frac{D_g(g,t)}{kT} \frac{\partial \Delta\Phi(g,r,t)}{\partial g} dt - \frac{1}{2} \frac{\partial D_g(g,t)}{\partial g} + \sqrt{2 D_g(g,t)} \circ dw(t), \quad g(0) = g_0. \tag{8}$$

$$dr(t) = \Big(\frac{F(r,t)}{M_g \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_r(r,t)}{\partial r} \Big) + \sqrt{2 D_r(r,t)} \circ dw(t), \quad r(0) = r_0. \tag{9}$$

4. Численный метод

Для статистического моделирования траекторий решения СДУ в смысле Стратоновича (5) мы используем следующее семейство методов [5]:

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + \sqrt{h}(q_{11} G_0 + q_{12} G_1 + q_{13} G_2) \zeta_n, \quad G_0 = \sigma(y_n),$$

$$k_1 = \Big[I - h\nu\frac{\partial f}{\partial y}(y_n)\Big]^{-1}[hf(y_n) + q_1\sqrt{h}G_0\zeta_n + \frac{q_2h_k}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\sigma\zeta_{k+1}^2], \tag{10}$$

$$G_1 = \sigma\Big(y_n + \alpha_1k_1 + q_3\sqrt{h}G_0\zeta_n + \frac{q_4h_k}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\sigma\zeta_{k+1}^2\Big),$$

$$k_2 = \Big[I - h\nu\frac{\partial f}{\partial y}(y_n)\Big]^{-1}\Big(hf(y_n + \alpha_2k_1 + q_5\sqrt{h}G_0\zeta_n + \frac{q_6h_k}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\sigma\zeta_{k+1}^2) + q_7\sqrt{h}G_1\zeta_n + \frac{q_8h_k}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\sigma\zeta_{k+1}^2\Big),$$

$$G_2 = \sigma\Big(y_n + \alpha_3k_1 + \alpha_4k_2 + q_9\sqrt{h}G_1\zeta_n + \frac{q_{10}h_k}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\sigma\zeta_{k+1}^2\Big),$$

где y_n, $n = 0, 1, \dots, K$, − приближенное решение системы СДУ (5) в момент времени $\{t_n\}$; а $\{p_i\}$, $\{q_i\}$, $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ и ν − вещественные параметры.

Это семейство является обобщением методов типа Розенброка для решения систем СДУ. Методы типа Розенброка обладают свойством A-устойчивости. Изменяя параметр ν можно менять свойство устойчивости метода. Обобщение свойства A-устойчивости для систем СДУ называется *асимптотической несмещенностью* [5]. Метод

$$y_{n+1} = y_n + \Big[I - \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(y_n)\Big]^{-1}\Big(hf(y_n) + \sqrt{h}\sigma(y_n)\zeta_n + \frac{h_k}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\sigma\zeta_{k+1}^2\Big) \tag{11}$$

является асимптотически несмещенным с любым шагом h.

Построим двух-уравневую модификацию этого метода, которая позволит вычислять разномасштабные процессы $y^{(r)}(t)$ and $y^{(g)}(t)$, $y = (y^{(r)}, y^{(g)}(t))^T$, заданные системой СДУ в смысле Стратоновича:

$$\begin{aligned} dy^{(r)}(t) &= f^{(r)}(t, y(t))dt + \sigma^{(r)}(t, y(t)) \circ dw(t), \quad y^{(r)}(t_0) = y_0^{(r)}, \\ dy^{(g)}(t) &= f^{(g)}(t, y(t))dt + \sigma^{(g)}(t, y(t)) \circ dw(t), \quad y^{(g)}(t_0) = y_0^{(g)}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$y(t) = \begin{pmatrix} y^{(r)}(t) \\ y^{(g)}(t) \end{pmatrix}, \quad f(y) = \begin{pmatrix} f^{(r)}(y) \\ f^{(g)}(y) \end{pmatrix}, \quad \sigma(y) = \begin{pmatrix} \sigma^{(r)}(y) \\ \sigma^{(g)}(y) \end{pmatrix}.$$

Обозначим n_{yr} размер векторов $y^{(r)}$ и $f^{(r)}$, а n_{yg} − размер векторов $y^{(g)}$ и $f^{(g)}$ ($n_{yr} + n_{yg} = n_y$). Тогда $\sigma^{(r)}(y)$ и $\sigma^{(g)}(y)$ являются матрицами размеров $n_{yr} \times n_w$ и $n_{yg} \times n_w$, соответственно.

Пусть для решения второй системы уравнений в (12) требуется шаг τ намного меньший, чем шаг h, требуемый для решения первой системы из (12) ($h = m\tau$, где m − некоторое натуральное число). Запишем метод (11) в виде

$$y_{k+1} = y_k + \left[E - \frac{h}{2}\frac{\partial f(t_k, y_k)}{\partial y}\right]^{-1} K(h, y_k, \zeta_{k+1}), \quad h = t_{k+1} - t_k, \quad \zeta_0 = 0;$$

$$K(h, y_k, \zeta_{k+1}) = hf(t_k, y_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, y_k)\zeta_{k+1} + \frac{h}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\,\sigma(t_k, y_k)\zeta_{k+1}^2. \tag{13}$$

Тогда двух-уровневая модификация метода (11) решения (12) имеет вид

$$y_{k+1}^{(r)} = y_k^{(r)} + \left[E - \frac{h}{2}\frac{\partial f^{(r)}(t_k, y_k)}{\partial y^{(r)}(y_k)}\right]^{-1} K^{(r)}(h, y_k, \zeta_{k+1}), \quad y_{k+i/m}^{(r)} = y_k^{(r)} + \frac{i}{m}(y_{k+1}^{(r)} - y_k^{(r)}); \tag{14}$$

$$y_{k+(i+1)/m}^{(g)} = y_{k+i/m}^{(g)} + \left[E - \frac{\tau}{2}\frac{\partial f^{(g)}}{\partial y^{(g)}}(t_{k+i/m}, y_{k+i/m})\right]^{-1} K^{(g)}(\tau, y_{k+i/m}, \eta_{k+(i+1)/m}), \quad i = 0, \dots, m-1,$$

где

$$K^{(r)}(h, y_k, \zeta_{k+1}) = hf^{(r)}(t_k, y_k) + \sqrt{h}\sigma^{(r)}(t_k, y_k)\zeta_{k+1} + \frac{h}{2}\frac{\partial\sigma^{(r)}(t_k, y_k)}{\partial y^{(r)}}\,\sigma^{(r)}(t_k, y_k)\zeta_{k+1}^2,$$

$$K^{(g)}(\tau, y_{k+i/m}, \eta_{k+(i+1)/m}) = \tau f^{(g)} + \sqrt{\tau}\sigma^{(g)}\eta_{k+(i+1)/m} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial\sigma^{(g)}}{\partial y^{(g)}}\ \sigma^{(g)}\eta^2_{k+(i+1)/m}.$$

Функции $f^{(g)}$ и $\sigma^{(g)}$ вычисляются в точках $(t_{k+i/m}, y_{k+i/m})$, а ζ и η – случайные величины:

$$\eta_{j,n+i/m} = \xi_{ji}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \zeta_{j,k+1} = (\xi_{j1} + \dots + \xi_{jm}).$$

где $\{\xi_{ji}\}$, $j = 1, \dots, n_w$; $i = 1, \dots, m$, – независимые стандартные нормальные случайные величины, моделируемые по формуле

$$\xi_{j,2i-1} = \sqrt{-2\ln\alpha_i}\sin 2\pi\beta_i,$$

$$\xi_{j,2i} = \sqrt{-2\ln\alpha_i}\cos 2\pi\beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, \left[\frac{n_w + 1}{2}\right].$$

Здесь α и β являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на $(0, 1)$.

Этот метод был использован для решения рассмотренной модели формирования аморфных и кристаллических наноструктур при ионной имплантации.

Численные методы [6] исследования неравновесной кинетики фазового перехода первого рода, возникающей на флуктуационной стадии (длительностью 10^{-4} сек) были применены при решении ряда задач. Радиационные дефекты в материалах образуются при облучении материалов ионами инертных газов, таких как гелий, ксенон и т.д., при этом происходит аморфизация кристаллической решетки. И если в случае блистеринга (возникновения вакансионно-газовых пор) в приповерхностном слое материалов, перспективных к применению в ТЯР речь идет об охрупчивании и разрушении материалов [7], то при взаимодействии ионов с диагностическими многослойнвми (Mo/Si) металлическими зеркалами в измерительных приборах [8] необходимо поддержание их рабочих характеристик. Возможны приложения численных моделей в задачах модификации свойств поверхности и создания структур с заданными наномасштабными размерами. используются для моделирования дефектообразования в слоях покрытия радиационно стойкого карбида кремния [9] . Фундаментальные свойства формирования наноразмерной пористости радиационными потоками может быть перспективной для расчета изменений параметров оптических свойств при заполнении пор веществами с известными характеристиками. Модели пористости возникающей при блистеринге создают среду с неупорядоченной пористостью, подбором параметров слоев в многослойных образцах возможно использовать такие расчеты при проектировании или создании сред со свойствами одномерного фотонного кристалла. Область применения пористых полупроводников например карбида кремния [10] обширна, и требует уточнения свойств при существенном увеличении удельной площади поверхности, изменении теплопроводности и других физических свойств материала. Свойства пористого карбида кремния важны для создания ряда новых оптоэлектронных приборов: эффективных фотоприёмников ультрафиолетового диапазона, светоизлучающих диодов и лазеров

5. Заключение.

На основе предложенного метода создан многомерный численный кинетический код плазмоподобной среды для исследования неравновесных быстропротекающих процессов формирования пленки толщиной до 100 нм.

Численно исследовалась модель образования островов-зародышей тонкой пленки (или кластеризация адатомов) на поверхности твердого тела при газофазной и твердофазной эпитаксии материала или имплантированного наноразмерного слоя на стадии коалесценции зародышей (создание пористых прослоек).

Проведено исследование нелинейных процессов формирования островов тонкой пленки в широком диапазоне значений физических параметров технологического процесса. Исследовалось поведение системы "тонкая пленка-подложка"для различных условий эксперимента и оценивалась степень однородности получаемого покрытия и его влияние на изменение свойств подложки по изменению напряжений, возникающих в подложке при модификации поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Змиевская Г.И., Бондарева А.Л.** Кристаллические островки тонких пленок полупроводника // Физика плазмы. – 2011. – Т. 37, № 1. – С. 93–102.
2. **Fokker.** Ann. D. Phys. – V. 43 –Cnh. 812, 1914.
3. **Plank.** Sitzungsber. – D. Preuss. Akad., 10 Mai 1917.
4. **Колмогоров А.Н.** Об аналитических методах в теории вероятностей // УМН. – 1938. – Вып. 5.
5. **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. – Utrecht, The Netherlands: VSP, 1997. – 178 p.
6. **Zmievskaya G.I., Averina T.A., Bondareva A.L.** Numerical solution of stochastic differential equations in the sense of Stratonovich in an amorphization crystal lattice model // Applied Numerical Mathematics, Special Issue: Ryaben'kii-90 2014. – APNUM-D-13-00431R3.
7. **Zmievskaya G.I., Bondareva A.L., Levchenko V.D. et al.** J. Phys. D: Appl. Phys. – 2007. – V. 40 – P. 4842
8. **Бондарева А.Л., Змиевская Г.И.** Моделирование блистеринга в слоистых зеркалах, применяемых в литографии // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2010. – № 6. – С. 26–33.
9. **Zmievskaya G.I., Bondareva A.L., Savchenko V.V.** Defect and Diffusion Forum, 353, Diffusion in Solids and Liquids IX, pp.148-Ed. by A. Ochsner, G. E. Murch, Ali Shokuhfar and Joao M.P.Q. Delgado, P. 148-152, 10.4028/www.scientific.net/DDF.353.148 (2014)
10. **Zmievskaya G.I., Bondareva A.L., Savchenko V.V.** ISEEE 2014 Proc. 2014 Intern. Conf. On Inf. Science, Electronics and Electrical Engineering. – Sapporo City, Hokkaido, Japan, 2014. – P. 1015-1019.

REFERENCES

1. **Zmievskaya G.I., Bondareva A.L.** Crystalline islands of semiconductor films // Plasma physics reports. – 2011. – V. 37, № 1. – P. 87–95.
2. **Fokker.** Ann. D. Phys. – V. 43 –Cnh. 812, 1914.
3. **Plank.** Sitzungsber. – D. Preuss. Akad., 10 Mai 1917.
4. **Kolmogoroff A.N.** Uher die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. Ann. – 1931. – V. 104. – P. 415–458.
5. **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. – Utrecht, The Netherlands: VSP, 1997. – 178 p.
6. **Zmievskaya G.I., Averina T.A., Bondareva A.L.** Numerical solution of stochastic differential equations in the sense of Stratonovich in an amorphization crystal lattice model // Applied Numerical Mathematics, Special Issue: Ryaben'kii-90 2014. – APNUM-D-13-00431R3.
7. **Zmievskaya G.I., Bondareva A.L., Levchenko V.D. et al.** J. Phys. D: Appl. Phys. – 2007. – V. 40 – P. 4842
8. **Bondareva A.L. and Zmievskaya G.I.** Computer Simulation of Blistering In Multilayer Mirrors for EUV Lithography // Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. – 2010. – V. 4, № 3. – C. 480–487.
9. **Zmievskaya G.I., Bondareva A.L., Savchenko V.V.** Defect and Diffusion Forum, 353, Diffusion in Solids and Liquids IX, pp.148-Ed. by A. Ochsner, G. E. Murch, Ali Shokuhfar and Joao M.P.Q. Delgado, P. 148-152, 10.4028/www.scientific.net/DDF.353.148 (2014)
10. **Zmievskaya G.I., Bondareva A.L., Savchenko V.V.** ISEEE 2014 Proc. 2014 Intern. Conf. On Inf. Science, Electronics and Electrical Engineering. – Sapporo City, Hokkaido, Japan, 2014. – P. 1015-1019.