УДК 517.958

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПОДЗЕМНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ[1)]

И.Б. БАДРИЕВ, В.В. БАНДЕРОВ, Б.Я. ФАНЮК

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

NUMERICAL SOLVING VARIATIONAL INEQUALITIES OF NONLINEAR STATIONARY SEEPAGE PROCESSES

I.B. BADRIEV, V.V. BANDEROV, B.Ja. FANUK

Kazan Federal University

Аннотация

Рассматривается смешанное вариационное неравенство с обратно сильно монотонным оператором в гильбертовом пространстве, которое возникает при изучении задачи об определении границ предельно-равновесных целиков остаточной вязкопластичной нефти в многослойных пластах. Для решения вариационного неравенства предложен итерационный метод расщепления, не требующий обращения исходного оператора. Был разработан комплекс программ, для модельных задач были проведены численные эксперименты для различных исходных данных. Результаты экспериментов свидетельствуют об эффективности итерационного метода.

Ключевые слова: Математическое моделирование, задача подземной фильтрации, вариационное неравенство, обратно сильно монотонный оператор, итерационный метод, численный эксперимент.

Summary

We consider mixed variational inequalities with inversely strongly monotone operator in a Hilbert space. Such inequalities arise in the study of the problem of determining the boundaries of limit equilibrium pillars viscoplastic residual oil in multilayered reservoirs. To solve variational inequality it is proposed the splitting method that does not require treatment of the original operator. A software package was developed and for model problems the numerical experiments for different input data were carried out. The experimental results show the effectiveness of the iterative method.

Key words: Mathematical simulation, seepage problem, variational inequality, inversely strongly monotone operator, iterative method, numerical experiment.

Введение

В работе рассматривается задача об определении границ предельно-равновесных целиков остаточной вязкопластичной нефти в многослойных пластах (см., например, [1]). Эта задача сводится к стационарной задаче фильтрации несжимаемой жидкости с эффективным многозначным законом, состоящей в нахождении полей давления и скорости фильтрации, удовлетворяющих уравнению неразрывности и граничным условиям. Обобщенная постановка сформулирована относительно давления в виде вариационного неравенства второго рода с обратно сильно монотонным оператором [2] в гильбертовом пространстве. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких полунепрерывных снизу,

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97022, 14-01-00755)

выпуклых, собственных, вообще говоря, недифференцируемых функционалов. Для решения вариационного неравенства предложен итерационный метод расщепления, не требующий обращения исходного оператора (см. [3, 4]). Каждый шаг метода сводится фактически к обращению оператора Лапласа. Для численной реализации итерационного метода были построены конечноэлементные аппроксимации вариационного неравенства и итерационного метода. Был разработан комплекс программ в среде Matlab. Для модельных задач были проведены численные эксперименты для различных исходных данных, при этом эмпирически определялись оптимальные (по количеству итераций) итерационные параметры. Результаты экспериментов свидетельствуют об эффективности итерационного метода.

1. Постановка задачи.

В работе [1, стр. 135] задачи об определении границ предельно-равновесных целиков остаточной вязкопластичной нефти в многослойных (m слоев) пластах, в осредненной постановке, сведен к решению стационарной задачи фильтрации вытесняющей жидкости относительно полей давления p и скорости фильтрации w с эффективным многозначным законом. Пусть $\Omega \subset R^n$ − ограниченная область с липшиц-непрерывной границей Γ. Требуется определить стационарные поля давления p и скорости w фильтрующейся в области Ω жидкости, удовлетворяющие уравнению неразрывности и граничным условиям

$$\operatorname{div} w = \widetilde{f}\,(x), \quad x \in \Omega, \qquad p(x) = 0, \quad x \in \Gamma \tag{1}$$

($\widetilde{f}$ − заданная функция, характеризующая плотность внешних источников) при многозначном законе фильтрации

$$-w \in \frac{g(|\nabla p\,|)}{|\nabla p\,|}\,\nabla p, \qquad x \in \Omega, \qquad g(\xi) = g_0(\xi) + \sum_{i=1}^{m} \vartheta_i\, H(\xi - \beta_i\,), \tag{2}$$

где $\vartheta_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m,$ − заданные постоянные, многозначная функция H и однозначная функция g_0 задаются соотношениями

$$H(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ [0,1], & \xi = 0, \\ 1, & \xi > 0, \end{cases} \qquad g_0(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < \gamma, \\ g^*(\xi - \gamma), & \xi \geqslant \gamma, \end{cases}$$

$\gamma \geqslant 0$ − заданная постоянная, функция $g^* : [0, +\infty) \to R^1$ удовлетворяет условиям

$$g^*(0) = 0, \quad g^*(\xi) > g^*(\zeta) \quad \forall\, \xi > \zeta \geqslant 0 \tag{3}$$

существуют такие постоянные $k > 0$, $\xi^* \geqslant 0$, $L > 0$, что

$$g^*(\xi^*) \geqslant k\,\xi^*, \; g^*(\xi) - g^*(\zeta) \geqslant k(\xi - \zeta) \quad \forall\, \xi \geqslant \zeta \geqslant \xi^*, \tag{4}$$

$$|\, g^*(\xi) - g^*(\zeta)\,| \leqslant L\,|\,\xi - \zeta\,| \quad \forall\, \xi, \zeta \geqslant 0. \tag{5}$$

Перейдем теперь к построению вариационной формулировки задачи (1), (2). Зададим оператор G : $R^n \to R^n$ следующим образом:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \dfrac{g_0(|\,y\,|)}{|\,y\,|}\, y, & y \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Пусть $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ − пространство Соболева со скалярным произведением $(p, \eta)_V = \displaystyle\int_\Omega (\nabla p, \nabla \eta) dx$.

Под решением рассматриваемой стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей многозначному закону фильтрации, будем понимать функцию $p \in V$, являющуюся решением вариационного неравенства

$$(Ap - f, \eta - p)_V + \sum_{i=1}^{m} F_i(\eta) - \sum_{i=1}^{m} F_i(p) \geqslant 0 \;\forall\, \eta \in V, \; F_i(p) = \vartheta_i \int_\Omega \mu\,(|\nabla p(x)| - \beta_i)\, dx, i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7}$$

где элемент $f \in V$ определяется по формуле $(f, \eta)_V = \int\limits_\Omega \widetilde{f}\,(x)\,\eta(x)\,dx$, $\mu(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \geqslant 0. \end{cases}$

Запишем функционалы F_i в виде $F_i = \Psi_i \circ B$, где $B = \nabla$, Ψ_i − функционалы, определенные на $Y = \left[L_2(\Omega)\right]^n$ по формулам $\Psi_i(z) = \int\limits_\Omega \int\limits_0^{|z|} \mu\left(|\nabla p(x)| - \beta_i\right)\,dx$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда вариационное неравенство (7) может быть записано в виде:

$$(Ap - f, \eta - p)_V + \sum_{i=1}^m \Psi_i\big(B\eta\big) - \sum_{i=1}^m \Psi_i\big(Bp\big) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta \in V. \tag{8}$$

Справедлива (см. [5–7])

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3)–(5). *Тогда вариационное неравенство* (7) *имеет непустое, выпуклое, замкнутое множество решений.*

2. Итерационный метод.

В дальнейшем будем предполагать, что выполняется равенство

$$(Bu, B\eta)_H = (u, \eta)_V \qquad \forall\, u, \eta \in V\,. \tag{9}$$

Для решения вариационного неравенства (8) по аналогии с [3] рассмотрим следующий итерационный процесс. Пусть $p^{(0)} \in V$, $y_i^{(0)}, \lambda_i^{(0)} \in H$, $i = 0, 1, \ldots, m$ − произвольные элементы. Для $j = 0, 1, 2, \ldots$, зная $p^{(j)}$, $y_i^{(j)}$, $\lambda_i^{(j)}$, определим

$$p^{(j+1)} = p^{(j)} - \tau\Big[Ap^{(j)} - f + r\,p^{(j)} + \sum_{i=1}^m B^*\Big(\lambda_i^{(j)} - r\,y_i^{(j)}\Big)\Big]. \tag{10}$$

Затем находим $y_i^{(j+1)}$, решая задачи минимизации ($i = 1, 2, \ldots, m$)

$$r\,\big(\,y_i^{(j+1)},\, z_i - y_i^{(j+1)}\,\big)_H + \Psi_i(z_i) - \Psi_i\big(y_i^{(j+1)}\,\big) \geqslant \big(\,r\,Bp^{(j+1)} + \lambda_i^{(j)},\, z_i - y_i^{(j+1)}\,\big)_H\ \forall\, z_i \in H. \tag{11}$$

Наконец, вычисляем $\lambda_i^{(j+1)}$ по формуле

$$\lambda_i^{(j+1)} = \lambda_i^{(j)} + r\Big[\,Bp^{(j+1)} - y_i^{(j+1)}\,\Big], \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{12}$$

Здесь $\tau > 0$ и $r > 0$ − итерационные параметры, $B^* : H \to V$ − сопряженный к B оператор.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3), (5), $0 < \tau < 2/(2\,m\,r + L)$, *итерационные последовательности* $\big\{p^{(j)}\big\}_{j=0}^{+\infty}$, $\Big\{y_i^{(j)}\Big\}_{j=0}^{+\infty}$, $\Big\{\lambda_i^{(j)}\Big\}_{j=0}^{+\infty}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *построены согласно* (10)–(12). *Тогда последовательность* $\big\{p^{(j)}\big\}_{j=0}^{+\infty}$ *сходится слабо в* V *к некоторому решению* $\widehat{p}$ *вариационного неравенства* (8); *последовательности* $\Big\{y_i^{(j)}\Big\}_{j=0}^{+\infty}$, *сходятся слабо в* Y *к* $\nabla\,\widehat{p}$; *последовательности* $\Big\{\lambda_i^{(j)}\Big\}_{j=0}^{+\infty}$ *сходятся слабо в* H *к* λ_i *таким, что* $\lambda_i \in \partial\Psi_i(\nabla\,\widehat{p}\,)$, $-\sum\limits_{i=1}^m B^*\lambda_i = A\,\widehat{p} - f$.

3. Численные эксперименты.

Был разработан комплекс программ в среде Matlab и проведены численные эксперименты по выявлению оптимальных итерационных параметров τ, r для модельной задачи фильтрации в единичном квадратном двухслойном пласте, с центром в начале координат, в котором находится скважина. Строилась триангуляция области путем равномерного разбиения сторон квадрата на n_1 и n_2 частей и проведением диагоналей, параллельных биссектрисе первого и третьего координатных углов.Данная триангуляция строилась стандартными средствами Matlab. Кроме того, была построена триангуляция с проведением диагоналей, параллельных биссектрисе второго и четвертого координатных углов.В качестве конечно-элементного пространства выбирались непрерывные линейные на каждом треугольнике функции, равные нулю на Γ. Скважина моделировалась следующим образом: $f_h(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x^*, \\ \dfrac{q}{h_1\, h_2}, & x = x^*, \end{cases}$ где q — дебит скважины, x^* — точка, где расположена скважина.

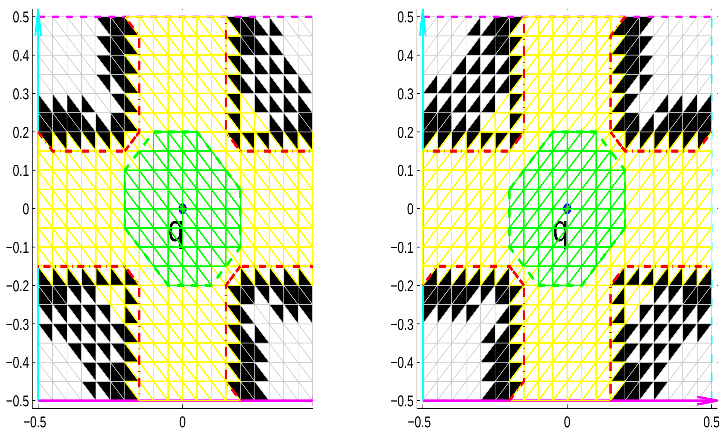

Рис. 1: $n1 = n2 = 20$, $Q = 1.0$, $r = 0.7$, $\tau = 1.0$

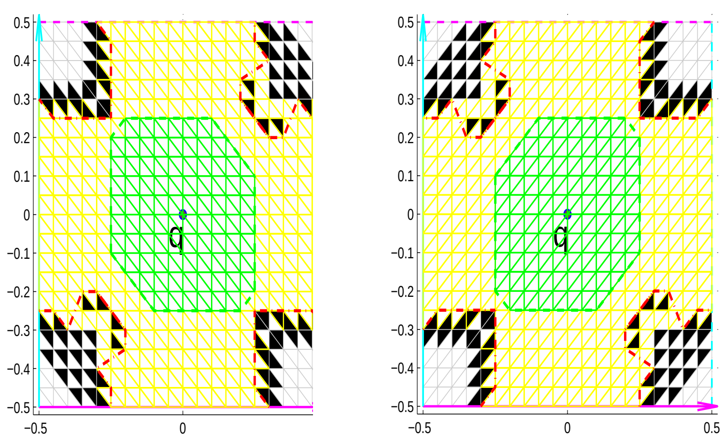

Рис. 2: $n1 = n2 = 20$, $Q = 1.5$, $r = 0.8$, $\tau = 1.0$

Варьировались значения дебитов q, количество узлов сетки. Во всех расчетах принимались следующие значения: $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 2$. На рис. 1, 2 приведены результаты численных расчетов. Черным цветом выделены конечные элементы, на которых значение модуля градиента давления равнялись β_1. Внутри этих зон в углах — скорость фильтрации равна нулю. На штрих-пунктирных с точками линиях $|\lambda| = 0.5$, на треугольниках, закрашенных темно-серым цветом в районе скважины (в центре пласта) $|\lambda| = 1$, на треугольниках, закрашенных светло-серым цветом $0.5 < |\lambda| < 1$, на треугольниках, закрашенных черным цветом $0 < |\lambda| < 0.5$, на незакрашенных треугольниках в углах $|\lambda| = 0$. На левых рисунках триангуляция проведена первым способом с диагоналями, параллельными биссектрисе первого и третьего координатных углов, на правых — вторым (с диагоналями, параллельными биссектрисе второго и четвертого координатных углов). Как видно, картины течения на этих рисунках взаимно симметричны. Результаты расчетов дают ожидаемую картину течения. Целики возникают в углах квадратной области течения. С увеличением дебита размер целиков уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В.** Математическая теория целиков остаточной вязкопластичной нефти. — Томск: Издательство Томского университета. — 1989. — 196 с.
2. **Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.** Модифицированные функции Лагранжа. — М: Наука, 1989. — 400 с.
3. **Бадриев И.Б., Задворнов О.А.** Методы декомпозиции для решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Дифференциальные уравнения. - 2003. — Т. 39, № 7. — С. 888—895.
4. **Бадриев И.Б., Задворнов О.А.** Исследование стационарной задачи фильтрации с многозначным законом при наличии точечного источника // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 7. — С. 874—880.
5. **Badriev I.B.** On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media // Applied Mechanics and Materials. — 2013. — V. 392. — P. 183—187.
6. **Бадриев И.Б., Нечаева Л.А.** Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2013. — № 3. — С. 35—62.
7. **Badriev I.B. and Fanyuk B.Ya.** Iterative method for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2012. — V. 33, № 4. — P. 386—399.

REFERENCES

1. **Entov V.M., Pankov V.N. and Pan'ko S.V.** Mathematical Theory of Unrecovered Visco-Plastic Oil [Matematicheskaya teoriya tselikov ostatochnoi vyazkoplastichnoi nefti]. — Tomsk, 1989. — 196 p. (in Russian)
2. **Gol'shtein E.G. and Tret'yakov N.V.** Modified Lagrangians [Moditsirovannye funktsii Lagranzha]. — Moscow: Nauka, 1989. — 400 p. (in Russian)
3. **Badriev I.B. and Zadvornov O.A.** A Decomposition Method for Variational Inequalities of the Second Kind with Strongly Inverse-Monotone Operators // Differential Equations. — 2003. — V. 39, № 7. — P. 936—944.
4. **Badriev I.B. and Zadvornov O.A.** Analysis of the Stationary Filtration Problem with a Multi-valued Law in the Presence of a Point Source // Differential Equations. — 2005. — V. 41, № 7. — P. 915—922.
5. **Badriev I.B.** On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media // Applied Mechanics and Materials. — 2013. — V. 392. — P. 183—187.
6. **Badriev I.B. and Nechaeva L.A.** Mathematical simulation of steady filtration with multivalued law // PNRPU Mechanics Bulletin. — 2013. — № 3. — P. 37—65.
7. **Badriev I.B. and Fanyuk B.Ya.** Iterative method for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2012. — V. 33, № 4. — P. 386—399.