УДК 519.85

АДАПТИВНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ ПОДХОДЯЩЕЙ АППРОКСИМАЦИИ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА ДЛЯ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1)]

А.А. АНДРИАНОВА

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail Anastasiya.Andrianova@kpfu.ru

ADAPTIVE PROCEDURES FOR CREATION OF ADMISSIBLE SET SUITABLE APPROXIMATION FOR CONDITIONAL OPTIMIZATION PROBLEMS

A.A. ANDRIANOVA

Kazan Federal University

Аннотация

В статье рассматриваются практически реализуемые подходы построения подходящей аппроксимации допустимого множества для задач условной оптимизации. Применение подходящей аппроксимации допустимого множества в методах последовательной безусловной минимизации позволяет гарантировать остановку вычислений за конечное число итераций в точке, которая является решением задачи, удовлетворяющим заданной точности по функционалу. Для построения подходящей аппроксимации предлагаются процедуры, основанные на адаптации параметров аппроксимации, гарантирующие ее построение за конечное время.

Ключевые слова: Задача условной оптмизации, подходящая аппроксимация допустимого множества, методы последовательной безусловной минимизации

Summary

In the article realized approaches of creation of admissible set suitable approximation for conditional optimization problems are considered. Using of admissible set suitable approximation in methods of consecutive unconditional minimization allows to guarantee a stop of calculations for final number of iterations in a point which is the solution of a task satisfying the requiring accuracy on functionality. For creation of suitable approximation the procedures based on the adaptations of parameters of approximation guaranteeing its construction for final time are offered.

Key words: Conditional optimization problem, suitable approximation of an admissible set, consecutive unconditional minimization methods.

Введение

Как правило, при решении задач условной минимизации на практике приходится останавливать вычисления до получения оптимального решения. В этой ситуации важно, чтобы применяемый метод оптимизации имел реализуемый критерий остановки вычислений, выполнение условий которого гарантировало бы требуемую точность полученного решения. Реализуемость критерия остановки понимается в том смысле, что его условия легко проверяемы и гарантируется их выполнение за конечное число итераций применяемого метода оптимизации.

Один подход к разработке алгоритмов с такими критериями остановки известен ([1]) для методов последовательной безусловной минимизации (метод штрафных функций, метод центров, метод параметризации целевой функции) и связан с применением подходящей (удовлетворительной) аппроксимации

1) Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97022)

допустимого множества. Также в [1] были указаны способы построения подходящей аппроксимации на основании априорных знаний о целевой функции и функциях-ограничениях задачи, например, констант Липшица, констант сильной квазивыпуклости и пр. Очевидно, что их применимость на практике ограничивается лишь небольшим количеством частных случаев задач, в которых для этих параметров существуют способы получения приемлемых оценок. В остальных же случаях приходится довольствоваться достаточно грубыми оценками, которые могут привести к значительным вычислительным трудностям при решении задачи.

В данном сообщении приводятся процедуры построения подходящей аппроксимации допустимого множества, основанные на адаптации параметров аппроксимации по ходу выполнения вычислений. Применение этих процедур гарантирует построение походящей аппроксимации за конечное время и, как следствие, получение решения задачи требуемой точности за конечное число итераций применяемого метода.

1. Постановка задачи и основные определения

Рассматривается следующая задача оптимизации:

$$\min\{f(x), x \in D\}, \tag{1}$$

где $D = \{x : x \in R_n, f_i(x) \leqslant 0, i = 1 \dots m\}$, целевая функция $f(x)$ и функции-ограничения $f_i(x)$ $i = 1 \dots m$ определены и непрерывны в $n-$мерном евклидовом пространстве R_n и принадлежат классу функций, каждый локальный минимум которых является абсолютным, множество D регулярно по Слейтеру, т.е. существует точка $y \in D$, для которой $f_i(y) < 0$ для всех $i = 1 \dots m$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$ — требуемая точность решения задачи (1). Введем следующие обозначения:

$$f^* = \min\{f(x), x \in D\}$$

$$X^*_\varepsilon = \{x : x \in D, f(x) \leqslant f^* + \varepsilon\}.$$

Множество X^*_ε является множеством ε-решений задачи (1). Будем считать далее, что $f^* > -\infty$, минимум достигается и множество X^*_ε является ограниченным. Полагаем также, что абсолютный минимум целевой функции достигается за пределами множества D, откуда, в частности, следует, что точка оптимума лежит на границе множества D. Случай принадлежности оптимума внутренности множества D существенного интереса не представляет, поскольку для него есть упрощенные процедуры решения задачи.

Требуется получить любую точку $z \in X^*_\varepsilon$.

Из [1] известны следующие определения подходящих аппроксимаций допустимого множества.

Определение 1. *Множество $G \subset D$ является подходящей внутренней аппроксимацией допустимого множества D с точностью $\varepsilon > 0$, если $G \cap X^*_\varepsilon \neq \emptyset$.*

Определение 2. *Множество G $(D \subset G)$ является подходящей внешней аппроксимацией допустимого множества D с точностью $\varepsilon > 0$, если $Q_{out}(G) \cap X^*_\varepsilon \neq \emptyset$, где $Q_{out}(G) = \{x : x \in G, f(x) \leqslant \min\{f(x), x \in G\} + \varepsilon\}$.*

2. Алгоритмы решения задачи условной оптимизации с аппроксимацией допустимого множества.

Для определенности рассмотрим алгоритмы в методе центров с аппроксимацией допустимого множества вида

$$G(p) = \{x : x \in R_n, g(x) + p \leqslant 0\} \tag{2}$$

где $g(x) = \max\{f_i(x), i = 1 \dots m\}$, p — параметр аппроксимации допустимого множества D. Если $p > 0$, множество $G(p)$ является внутренней аппроксимацией множества D, при $p < 0$ — внешней аппроксимацией.

Приведем алгоритмы в методах внутренних и внешних центров с аппроксимацией допустимого множества, в которых применяется подходящая аппроксимация с точностью $\varepsilon > 0$.

Алгоритм метода внешних центров. Выберем точку $x_0 \notin D$, для которой $f(x_0) \leqslant f^*$. Определим значение параметра $p > 0$ так, чтобы множество $G(p)$ было подходящей внутренней аппроксимацией множества D с точностью $\varepsilon > 0$ (для построения можно использовать оценки, которые приведены в [1]). Положим $k = 0$.

1. Построим вспомогательную функцию $F_k(x) = \max\{f(x) - f(x_k), g(x) + p\}$.
2. Находим точку абсолютного минимума вспомогательной функции $x_{k+1} \in \operatorname{Argmin}\{F_k(x), x \in R_n\}$.
3. Если $x_{k+1} \in D$, $x_{k+1} \in X_\varepsilon^*$, останов. Иначе переход к пункту 1 при $k := k+1$.

Алгоритм метода внутренних центров. Выберем точку $x_0 \in D$. Определим значение параметра $p < 0$ так, чтобы множество $G(p)$ было подходящей внешней аппроксимацией множества D с точностью $\varepsilon > 0$ (для построения можно использовать оценки, которые приведены в [1]). Положим $k = 0$.

1. Построим вспомогательную функцию $F_k(x) = \max\{f(x) - f(x_k), g(x) + p\}$.
2. Находим точку абсолютного минимума вспомогательной функции $x_{k+1} \in \operatorname{Argmin}\{F_k(x), x \in R_n\}$.
3. Если $x_{k+1} \notin D$, $x_k \in X_\varepsilon^*$, останов. Иначе переход к пункту 1 при $k := k+1$.

В [1] было доказано, что при применении подходящей внутренней и внешней аппроксимации множества D условия пунктов 3 алгоритмов будут выполнены за конечное число итераций и будет получено $\varepsilon-$ решение задачи (1).

Аналогично формулируются алгоритмы в методах параметризации целевой функции и в методах штрафных функций. Доказательство, приведенное в [1], не привязано к какому-либо конкретному методу, а пользуется общими свойствами перечисленных методов последовательной безусловной минимизации.

Далее приведем алгоритмы внутренних и внешних центров, которые по ходу вычислений изменяют значение параметр p так, чтобы за конечное число итераций построить подходящую аппроксимацию и получить, тем самым, исходные условия для применения указанных в данном разделе алгоритмов.

3. Алгоритмы с адаптацией аппроксимации допустимого множества.

Общая идея алгоритмов с адаптацией аппроксимации допустимого множества заключается в следующем. Выбирается некоторая аппроксимация множества D в зависимости от применяемого метода. Вычислительный процесс ведется по алгоритму внешних или внутренних центров, описанных в предыдущем разделе. При выполнении условий критериев пунктов 3 алгоритмов остановки не происходит, а производится адаптация аппроксимации, т.е. изменение параметра аппроксимации p, и применяемый алгоритм запускается снова, начиная с последней полученной итерационной точки до выполнения критерия пункта 3. Под понятием процедуры адаптации аппроксимации допустимого множества будем понимать способ изменения параметра аппроксимации.

Опишем применение следующей процедуры адаптации аппроксимации вида (2) допустимого множества задачи (1):

Процедура 1. *Пусть в результате работы алгоритмов с аппроксимацией допустимого множества в методе центров получена точка z, для которой в случае применения метода внешних центров выполняется включение $z \in D$, а при применении метода внутренних центров — включение $z \notin D$. Тогда в качестве нового параметра аппроксимации используется $p = -g(z)$.*

Приведем далее алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методе центров, использующие указанную процедуру адаптации аппроксимации.

Алгоритм метода внешних центров с адаптацией аппроксимации допустимого множества. Выберем точку $x_0 \notin D$, для которой $f(x_0) \leqslant f^*$. Определим значение параметра $p_0 > 0$ так, чтобы множество $G(p_0) \neq \emptyset$. Положим $k = 0$.

1. Построим вспомогательную функцию $F_k(x) = \max\{f(x) - f(x_k), g(x) + p_k\}$.
2. Находим точку абсолютного минимума вспомогательной функции $y_{k+1} \in \operatorname{Argmin}\{F_k(x), x \in R_n\}$.

3. Если $y_{k+1} \notin D$, то $x_{k+1} = y_{k+1}$, $p_{k+1} = p_k$ и осуществляем переход к пункту 1 при $k := k+1$.
4. Если $|f(y_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon$, то $y_{k+1} \in X^*_\varepsilon$. Останов.
5. Принимаем $x_{k+1} = x_k$, $p_{k+1} = -g(y_{k+1})$ и осуществляем переход к пункту 1 при $k := k+1$.

Алгоритм метода внутренних центров с адаптацией аппроксимации допустимого множества. Выберем точку $x_0 \in D$. Определим значение параметра $p_0 < 0$ такое, чтобы $\min\{f(x), x \in G(p_0)\} \neq \min\{f(x), x \in R_n\}$. Положим $k = 0$.

1. Построим вспомогательную функцию $F_k(x) = \max\{f(x) - f(x_k), g(x) + p_k\}$.
2. Находим точку абсолютного минимума вспомогательной функции $y_{k+1} \in \mathrm{Argmin}\{F_k(x), x \in R_n\}$.
3. Если $y_{k+1} \in D$, то $x_{k+1} = y_{k+1}$, $p_{k+1} = p_k$ и осуществляем переход к пункту 1 при $k := k+1$.
4. Если $|f(y_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon$, то $x_k \in X^*_\varepsilon$. Останов.
5. Принимаем $x_{k+1} = x_k$, $p_{k+1} = -g(y_{k+1})$ и осуществляем переход к пункту 1 при $k := k+1$.

Пункт 4 алгоритмов содержит новый критерий остановки вычислений, который применяется в случае, когда имеются две точки по разные стороны границы множества D. Рассмотрим для определенности алгоритм в методе внешних центров. Пусть на некоторой итерации с номером $k \geqslant 0$ получены точки $x_k \notin D$ и $y_{k+1} \in D$ и выполняется условие $|f(y_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon$. Очевидно, что $f(y_{k+1}) \geqslant f^*$. Докажем, что $f(x_k) \leqslant f^*$. Точка x_k при $k = 0$ удовлетворяет данному неравенству. При $k > 0$ она была получена как точка абсолютного минимума функции $F_{k-1}(x)$. Поэтому справедливо неравенство $f(x_k) - f(x_{k-1}) \leqslant F_{k-1}(x^*) = \max\{f^* - f(x_{k-1}), g(x^*) + p_{k-1}\}$, где $x^* \in \mathrm{Argmin}\{f(x), x \in D\}$. Очевидно, что $g(x^*) = 0$. Если $f^* - f(x_{k-1}) \geqslant p_{k-1}$, то неравенство $f(x_k) \leqslant f^*$ справедливо. Предположим, что $f^* - f(x_{k-1}) < p_{k-1}$. Тогда для $x_k \notin D$ — точки абсолютного минимума функции $F_{k-1}(x)$, справедлива цепочка неравенств: $f(x_k) - f(x_{k-1}) \leqslant F_{k-1}(x^*) = p_{k-1} < g(x_k) + p_{k-1}$. Данное неравенство говорит о том, что $x_k \notin D$ является точкой абсолютного минимума функции $g(x)$ (см, например, в [2]). Однако это невозможно, так как по условиям множество D удовлетворяет условию регулярности Слейтера, т.е. существует точка y, для которой $g(y) < 0$. Таким образом, для $x_k \notin D$ справедливо неравенство $f(x_k) \leqslant f^*$. Отсюда, в частности, следует $f(y_{k+1}) - f^* \leqslant f(y_{k+1}) - f(x_k) = |f(y_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon$, т.е. по определению $y_{k+1} \in X^*_\varepsilon$.

Докажем теперь конечность алгоритмов с адаптацией аппроксимации допустимого множества. Обозначим $L = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Теорема 1. *Пусть последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{p_k\}$ построены по алгоритму внешних центров с адаптацией аппроксимации допустимого множества. Тогда существует номер $K \geqslant 0$, для которого $G(p_K)$ будет являться подходящей внутренней аппроксимацией для задачи (1) с точностью $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Допустим, условия теоремы неверны, т.е. для любого $k \in L$ множество $G(p_k)$ не будет являться подходящей внутренней аппроксимацией множества D с точностью ε. Согласно определению 1 это означает, что для любого $k \in L$ $G(p_k) \cap X^*_\varepsilon = \emptyset$, т.е. для любой точки $y \in X^*_\varepsilon$ при любом $k \in L$ выполяется неравенство $g(y) + p_k > 0$. В силу произвольности выбора точки $y \in X^*_\varepsilon$ из последнего неравенства следует, что $\min\{g(y), y \in X^*_\varepsilon\} > -p_k$. В силу ограниченности множества X^*_ε и непрерывности функции $g(x)$ существует $\gamma > 0$, для которого $\min\{g(y), y \in X^*_\varepsilon\} = -\gamma$. Таким образом, при любом $k \in L$ $p_k > \gamma$.

В силу свойств алгоритма внешних центров с аппроксимацией допустимного множества при фиксированной аппроксимации следует существование бесконечной подпоследовательности $L_1 \subset L$, для которой при всех $k \in L_1$ $x_{k+1} = x_k$, т.е. при этих номерах производится адаптация аппроксимации и $p_{k+1} = -g(y_{k+1})$. Так как условия критерия остановки в этих точках не выполняются, а также в силу того, что для $y_{k+1} \in D$ имеет место неравенство $f(y_{k+1}) - f(x_k) \leqslant g(y_{k+1}) + p_k$ (в противном случае из [2] известно, что точка абсолютного минимума функции $f(x)$ будет достигаться внутри множества D, что противоречит условиям постановки задачи) имеем следующую цепочку неравенств $\varepsilon < |f(y_{k+1}) - f(x_k)| = f(y_{k+1}) - f(x_k) \leqslant g(y_{k+1}) + p_k = p_k - p_{k+1}$. Таким образом, подпоследовательность $\{p_k\}$ $k \in L_1$ неограничено убывает, но при этом является ограниченной снизу, так как для любого $k \in L_1$ $p_k > \gamma$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. *Пусть последовательности* $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{p_k\}$ *построены по алгоритму внутренних центров с адаптацией аппроксимации допустимого множества. Тогда существует номер* $K \geqslant 0$, *для которого* $G(p_K)$ *будет являться подходящей внешней аппроксимацией для задачи (1) с точностью* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Допустим, условия теоремы неверны, т.е. для любого $k \in L$ множество $G(p_k)$ не будет являться подходящей внешней аппроксимацией множества D с точностью ε. Согласно определению 2 это означает, что для любого $k \in L$ $Q_{out}(G(p_k)) \cap X^*_\varepsilon = \emptyset$, т.е. для любой точки $y \in X^*_\varepsilon$, в том числе и для решения задачи (1) x^*, при любом $k \in L$ выполняется неравенство $f(x^*) > \min\{f(y), y \in G(p_k)\} + \varepsilon$. В силу непрерывности функции $f(x)$ найдется такая окрестность $\omega(x^*)$, для которой выполняется неравенство $f(x) > \min\{f(y), y \in G(p_k)\} + \varepsilon/2$ для любых $x \in \omega(x^*)$ и $k \in L$, что говорит о том, что найденная окрестность не содержит точек $\varepsilon/2$-решений задачи $\min\{f(x), x \in G(p_k)\}$. В силу непрерывности функции $g(x)$ отсюда следует существование числа $\gamma > 0$ такого, что $|g(x)| \leqslant \gamma$ для всех $x \in \omega(x^*)$. Таким образом, так как точка минимума вспомогательной задачи лежит на границе множества $G(p_k)$ следует, что при любом $k \in L$ $p_k < -\gamma$.

В силу свойств алгоритма внутренних центров с аппроксимацией допустимного множества при фиксированной аппроксимации следует существование бесконечной подпоследовательности $L_1 \subset L$, для которой при всех $k \in L_1$ $x_{k+1} = x_k$, т.е. при этих номерах производится адаптация аппроксимации и $p_{k+1} = -g(y_{k+1})$. Так как условия критерия остановки в этих точках не выполняются, а также в силу того, что для $y_{k+1} \notin D$ имеет место неравенство $f(y_{k+1}) - f(x_k) \geqslant g(y_{k+1}) + p_k$ (иначе (см. [2]) точка абсолютного минимума функции $g(x)$ будет достигаться за пределами множества D, что противоречит условиям постановки задачи) имеем следующую цепочку неравенств $\varepsilon < |f(y_{k+1}) - f(x_k)| = f(x_k) - f(y_{k+1}) \leqslant -g(y_{k+1}) - p_k = p_{k+1} - p_k$. Таким образом, подпоследовательность $\{p_k\}$ неограничено возрастает, но при этом является ограниченной сверху, так как для любого $k \in L_1$ $p_k < -\gamma$. Полученное противоречие доказывает теорему.

4. Заключение.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что в большинстве задач время работы алгоритма с фиксированной аппроксимацией, построенной за счет применения оценки параметра аппроксимации, было большим, чем время работы алгоритма с адаптацией аппроксимации, что говорит о вычислительной эффектировности использования предлагаемого подхода при поиске решения заданной точности задач условной оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Andrianova A.A.** One Approach for Solving Optimization Problems with Apriori Estimates of Approximation of Admissible Set // Lobachevskij Journal of Mathematics. — 2013. — V. 34. — No. 4 — P. 368–376.
2. **Заботин Я.И., Даньшин И.Н.** Алгоритмы с комбинированием, параметризацией и двусторонним приближением в методе центров // Известия вузов. Математика. — 1998. — № 12. — С. 40–48.

REFERENCES

1. **Andrianova A.A.** One Approach for Solving Optimization Problems with Apriori Estimates of Approximation of Admissible Set // Lobachevskij Journal of Mathematics. — 2013. — V. 34. — № 4. — P. 368–376.
2. **Zabotin Ya.I., Dan'shin I.N.** Algorithms with combination, parametrization and two-sided approximation in the center method // Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika). — 1998. — V. 42, № 12. — P. 38–46.