КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ, ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ

Кафедра экономико-математического моделирования

В.А. ТАЛЫЗИН, Г.И. ЛИСОГОР

ЛИНЕЙНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Учебно-методическое пособие

Казань – 2015

УДК 330.43
ББК Ув631я73-1

Принято на заседании кафедры
экономико-математического моделирования
Протокол № 2 от 12 октября 2015 года

Рецензент:
доктор технических наук,
заведующий кафедрой экономико-математического моделирования,
профессор КФУ **И.И. Исмагилов**

Талызин В.А., Лисогор Г.И.
Линейные оптимизационные модели в экономике / В.А. Талызин, Г.И.Лисогор. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 66с.

Учебно-методическое пособие подготовлено по учебной дисциплинам «Экономико-математические методы», «Экономико-математические модели».

В пособии приводятся основные теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельной работы по линейному программированию.

Предназначено для студентов экономических специальностей.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1 Формализация оптимизационных задач

Первоначально оптимизационные задачи формулируются в словесно-содержательной постановке. Требуется перевести содержательную постановку на математический язык, т. е. получить математическую постановку или модель задачи. Этот процесс называют формализацией задачи, и он включает в себя следующие основные этапы.

На *первом этапе* необходимо ввести в рассмотрение переменные, с помощью которых можно описать как целевую установку задачи, так и ограничивающие обстоятельства. От этого этапа зависит адекватность и простота модели.

На *втором этапе* формализуется критерий оптимизации. Введенные переменные позволяют выразить цель задачи в виде некоторой функции нескольких переменных, которую называют целевой и требуется найти либо ее максимальное, либо минимальное значение.

На *третьем этапе* необходимо установить взаимосвязь между искомыми переменными и ограничивающими факторами задачи, т.е. построить систему ограничений задачи.

Пример 1. Фабрика производит фруктовые соки двух видов. Общий объем соков, производимых фабрикой за неделю, не превышает 7 т. Объем сока первого вида, производимого за неделю, обычно превышает объем сока второго вида не более чем на 3 т. Удовлетворенный спрос на сок второго вида за неделю не превышает 3 т, а недельный спрос на сок второго вида превышает спрос на сок первого вида не более чем на 2т.

Прибыль от реализации одной тонны сока первого вида составляет 40 тысяч рублей, а для сока второго вида – 20 тысяч руб.

Необходимо определить оптимальную программу недельного производства соков обоих видов, при которой достигается максимальная прибыль.

Решение. Приводится содержательная постановка задачи, которую требуется формализовать, и получить математическую модель.

Недельная программа производства фабрики определяется количеством производимого сока обоих видов. Отсюда обозначим через x_1, x_2 недельный объем производства в тоннах соков первого и второго видов соответственно.

Поскольку прибыль от реализации 1 т сока первого вида составляет 40 тыс. руб, то при производстве x_1 тонн она будет равна $40x_1$ тыс. руб.

Аналогично при реализации x_2 тонн сока второго вида прибыль составит $20x_2$ тыс. руб. Следовательно, суммарная прибыль за неделю составит величину

$$z(x_1, x_2) = 40x_1 + 20x_2.$$

Найденная зависимость по переменным x_1, x_2 является линейной и целевую функцию z требуется максимизировать.

В условиях задачи сказано, что суммарный объем соков за неделю не превышает 7 т. Отсюда первое ограничение на искомые переменные x_1, x_2:

$$x_1 + x_2 \le 7.$$

Условие, что недельный объем сока первого вида превышает объем сока второго вида не более чем на 3 т, формализуется в виде следующего неравенства

$$x_1 - x_2 \le 3.$$

Поскольку недельный спрос на сок второго вида превышает спрос на сок первого вида не более чем на 2 т, то это условие запишется в виде ограничения

$$-x_1 + x_2 \le 2.$$

Наконец, спрос за неделю на сок второго вида не должен превышать 3 т:

$$x_2 \le 3.$$

Кроме того, естественно потребовать неотрицательности количества производимых соков обоих видов

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

В итоге получена следующая математическая модель задачи:

$$z = 40x_1 + 20x_2 \to \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 7,$$

$$x_1 - x_2 \leq 3,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Поскольку и целевая функция z, и все ограничения задачи линейны по переменным x_1, x_2, то сформулирована *задача линейного программирования*.

Пример 2. Некоторое небольшое предприятие перерабатывает нефть в два вида конечной продукции: мазут и бензин.

Технологический процесс состоит из двух этапов. На первом этапе поступающее сырье перерабатывается в 3 промежуточных продукта, которые на втором этапе используются для производства требуемой конечной продукции.

Выход промежуточных продуктов (кг) из одной тонны сырья, а также расход этих продуктов (кг) на производство 1 т конечной продукции каждого вида представлены в таблице 1.

Таблица 1

Выход промежуточных продуктов и их расход

Промежуточный продукт	Выход из 1 т сырья	Расход на 1 т конечного продукта	
		Мазут	Бензин
1	460	250	800
2	200	250	200
3	340	500	-

Оптовая цена тонны мазута составляет 10 тыс. руб., а тонны бензина – 20 тыс. рублей.

Задача состоит в определении производственной программы, максимизирующей суммарную цену выпускаемой продукции.

Решение. Получим математическую постановку задачи. Введем в рассмотрение переменные x_1, x_2 - планируемое к выпуску количество мазута и бензина (т) соответственно, получаемые из 1 т сырья.

Отсюда в расчете на 1 т исходного сырья суммарная цена выпускаемой продукции опишется функцией

$$z = 10x_1 + 20x_2 .$$

При таком плане производства будет израсходовано промежуточного продукта в количестве

$$250x_1 + 800x_2 .$$

Очевидно, что оно не должно превышать выхода промежуточного продукта 1-го вида из 1 т нефти, т.е. 460 кг. Иначе должно выполняться неравенство:

$$250x_1 + 800x_2 \le 460 .$$

Аналогично по двум другим промежуточным продуктам нужно записать следующие ограничения:

$$250x_1 + 200x_2 \le 200 ,$$

$$500x_1 \le 340 .$$

Добавим к ним естественные ограничения на знак переменных

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 .$$

В итоге получена следующая задача линейного программирования:

$$z = 10x_1 + 20x_2 \to \max$$

$$250x_1 + 800x_2 \le 460 ,$$

$$250x_1 + 200x_2 \le 200 ,$$

$$500x_1 \le 340 ,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Пример 3 (задача о назначениях). Имеется 4 работы и 4 человека, каждый из которых может с тем или иным успехом выполнять любую из этих работ.

Производительность работника A_j, $j = \overline{1,4}$ при выполнении работы B_i, $i = \overline{1,4}$ представлена в таблице 2.

Таблица 2

Производительность работника

Работник	Работа			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	4	2	2
A_2	4	5	3	1
A_3	4	3	1	1
A_4	3	1	2	2

Каждый исполнитель может выполнять только одну работу, и каждая работа может выполняться только одним исполнителем.

Требуется распределить людей на работы так, чтобы суммарная производительность труда была максимальной.

Решение. Для формализации задачи введем в рассмотрение переменные x_{ij}, $\mathrm{i, j} = \overline{1,4}$, которые принимают следующие значения:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если i - й исполнитель выполняет j - ю работу,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда суммарная производительность труда выразится функцией

$$z = 3x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23} + x_{24} + 4x_{31} + 3x_{32} + x_{33} +$$

$$+ x_{34} + 3x_{41} + x_{42} + 2x_{43} + 2x_{44}.$$

Условие того, что каждый исполнитель должен выполнять только одну работу, формализуется в уравнения:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,4},$$

А требование, что каждая работа может выполняться только одним исполнителем – другими уравнениями:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,4}.$$

Таким образом, получена следующая математическая модель исходной задачи:

$$z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij} \quad - \max$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,4},$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,4},$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0. \end{cases}$$

Здесь c_{ij} - элементы табл. 2, представляющие производительность $i-$го исполнителя при выполнении им $j-$й работы.

Для задач **1-10** на основе содержательных постановок требуется получить математические модели.

1. В состав суточного рациона кормления животных входят три продукта: сено, силос и концентраты, содержащие следующие питательные вещества: белок, кальций и витамины. Содержание питательных веществ в граммах в 1 кг соответствующего продукта питания и минимально необходимые суточные нормы их потребления заданы в таблице 3:

Таблица 3

Содержание питательных веществ соответствующего продукта питания и минимально необходимые суточные нормы их потребления

№ п/п	Продукты	Питательные вещества		
		Белок	Кальций	Витамины
1	Сено	50	6	2
2	Силос	20	4	1
3	Концентраты	180	3	1
Нормы потребления		2000	120	40

Определить оптимальный рацион кормления из условия минимальной стоимости, если цена 1 кг продукта питания соответственно составляет: сена – 5 руб, силоса – 2 руб и концентратов – 10 руб.

Формализовать задачу, если заданы предельные нормы суточного расхода: сена – не более 12 кг, силоса – не более 20 кг и концентратов – не более 16 кг.

2. Торговое предприятие при продаже трех групп товаров использует три вида ограниченных материально-денежных ресурсов: рабочее время продавцов (чел/час), площадь торговых залов ($м^2$) и площадь складских помещений ($м^2$).

Запасы указанных ресурсов, а также нормы затрат ресурсов на реализацию единицы товарооборота (1000 руб.) каждой группы товаров приведены в таблице 4. Здесь же приводятся величины дохода от реализации единицы товарооборота каждой группы товаров.

Таблица 4

Запасы указанных ресурсов и нормы затрат ресурсов на реализацию единицы товарооборота

Наименование ресурса	Ед. измерения	Объем ресурса	Нормы затрат на ед. товарооборота		
			1 гр	2 гр	3 гр
Рабочее время продавцов	чел/час	200	3	6	4
Площадь торговых залов	м²	100	4	2	4
Площадь складских помещений	м²	80	23	1	
Прибыль от реализации ед. товарооборота	Тыс. руб	-	8	5	5

Требуется определить наилучший план реализации товаров, обеспечивающий торговому предприятию максимальный доход.

3. Фирма, специализирующаяся на производстве замороженных пищевых продуктов, выпускает три различных продукта, каждый из которых получается путем определенной обработки картофеля. Фирма может закупать картофель у двух различных поставщиков. При этом объемы продуктов 1, 2 и 3 вида, которые можно получить из одной тонны картофеля первого поставщика, составляет соответственно 0,2т, 0,2т и 0,3т. Эти же показатели для второго поставщика составляют – 0,3т, 0,1т и 0,3т.

Предполагается, что максимальное количество каждого продукта, которое фирма может произвести при заданных условиях производства, ограничено следующими значениями: продукта 1-го вида может быть произведено не более 1,8т; продукта 2-го вида – не более 1,2т и продукта 3-го вида – не более 2,4т.

Известно, что относительная прибыль при закупке 1т картофеля у первого поставщика равна 5 условным денежным единицам, а при закупке у второго поставщика – 6 усл. денежным единицам. Найти план закупки картофеля, при котором фирма будет иметь максимальную прибыль.

4. Фабрика выпускает три вида изделий. В процессе производства используются три технологические операции. В таблице 5 приводится длительность технологических операций для производства одного изделия каждого вида (мин):

Таблица 5

Длительность технологических операций для производства одного изделия каждого вида

Изделие	Технологические операции		
	1-я	2-я	3-я
1-й вид	1	3	1
2-й вид	2	0	4
3-й вид	1	2	0

Фонд рабочего времени, в течение которого операции могут быть применены для производства рассматриваемых изделий, ограничены следующими предельными значениями в сутки: для 1-й операции -430 мин; для 2-й операции – 460 мин; для 3-й операции – 420 мин.

Ожидаемая прибыль от продажи одного изделия 1-го, 2-го и 3-го видов составляет 3, 2 и 5 долларов соответственно. Каков наиболее выгодный суточный объем производства каждого вида продукции?

5. Производственной фирмой выпускаются радиоприемники трех различных моделей: А, В, С. Каждое изделие указанных моделей приносит доход в размере 8, 15, 25 долларов соответственно. Каждое изделие характеризуется определенным временем, необходимым для изготовления соответствующих деталей, сборке изделия и его упаковке. Так, в частности, в расчете на 10 радиоприемников модели А требуется 3 часа на изготовление деталей, 4 часа на сборку и 1 час на упаковку. Соответствующие показатели модели В равняются 3, 5 и 2 часа, а для модели С – 5, 8 и 1 час.

В течение ближайшей недели фирма может израсходовать на производство радиодеталей 150 часов, на сборку – 200 час и на упаковку 60 часов.

Требуется составить план производства радиоприемников на неделю, чтобы обеспечить максимальный доход при условии, что будет выпущено не менее 12 радиоприемников модели А и не менее 15 радиоприемников модели С.

6. На молочном комбинате для производства трех видов сливочного мороженого требуется молоко натуральное, молоко сухое, масло сливочное, сахар, молоко сгущенное. Нормы (кг) затрат указанных ресурсов на производство 1т мороженого, общее количество ресурсов, а также прибыль (тыс. руб) от реализации 1т мороженого каждого вида приведены в таблице 6:

Таблица 6

Нормы (кг) затрат указанных ресурсов на производство и прибыль

Ресурсы	Нормы расхода на 1т мороженого			Объем ресурсов
	Сливочное	Пломбир	Эскимо	
Молоко натур	550	620	-	64100
Молоко сух.	40	20	20	4800
Масло слив.	86	110	150	22360

Сахар	160	92	158	26240
Молоко сгущ.	-	158	30	800
Прибыль	315	278	573	-

Определить план производства мороженого, обеспечивающий максимальную прибыль от его реализации.

7. Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Считается, что средний недельный расход корма на одного цыпленка должен составлять не менее 1 кг.

Кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности: не менее 0,8% кальция; не менее22% белка; не более 5% клетчатки.

Для кормления используется три ингредиента: известняк, зерно, соевые бобы, содержание указанных питательных веществ в которых характеризуется таблице 7:

Таблица 7

Питательных веществ

Ингредиент	Содержание питательных веществ в 1 кг			Стоимость (доллар/кг)
	Кальций	Белок	Клетчатка	
Известняк	0,95	-	-	0,1
Зерно	0,0025	0,225	0,05	0,375
Бобы	0,005	1,25	0,20	1,0

Требуется определить количество каждого из трех ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и ее питательности.

8. Для изготовления брусьев трёх размеров: 0,6м; 1,5м; 2,5м, входящих в комплекты мебели в соотношении 2:1:3, поступают на распил бревна длиной 3м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов, если на распил поступает a указанных брёвен.

9. На раскрой поступает s различных материалов. Требуется изготовить из них q различных изделий в количестве, пропорциональным числам $b_1, b_2, ..., b_q$. Пусть каждая единица $j-$го материала ($j = 1,2,..., s$) может быть раскроена различными p способами так, что при использовании $i-$го способа ($i = 1,2,..., p$) получается a_{ik}^j единиц $k-$го изделия.

Найти план раскроя, обеспечивающий максимальное количество комплектов, если $j-$го вида материалов поступает a_j единиц.

10. Под посев m культур отведено n земельных массивов площадью соответственно в $a_1, a_2, ..., a_n$ га, причем средняя урожайность $i-$й культуры на $j-$м массиве составляет a_{ij} центнеров с гектара, а выручка за один центнер составляет c_i рублей.

Определить какую площадь на каждом массиве следует отвести под каждую из культур, чтобы получить максимальную выручку, если по плану должно быть собрано не менее b_i ($i = \overline{1, m}$) центнеров $i-$й культуры.

1.2 Стандартные модели задач линейного программирования

Кроме общей модели задачи линейного программирования (ЛП) на практике применяются три стандартные модели: однородная, каноническая и симплексная.

Однородной называется такая модель ЛП, в которой все ограничения задачи заданы в виде неравенств, не обязательно одного смысла. Например, в матричной форме однородной моделью является:

$$z = cx \to \max$$

$$Ax \le b,$$

$$x \ge 0.$$

Канонической называется такая модель ЛП, в которой:

- находится максимум целевой функции;
- все нетривиальные ограничения заданы в виде уравнений;
- все свободные члены этих ограничений неотрицательны;
- все неизвестные удовлетворяют тривиальным ограничениям.

В матричной форме каноническая модель запишется:

$$z = cx \to \max$$

$$Ax = b,\ (b \ge 0),$$

$$x \ge 0.$$

Симплексной называется такая каноническая модель, в которой:

- матрица A приведена к разрешенной форме, когда базисные переменные выражены через свободные переменные;
- целевая функция выражена только через свободные переменные.

Задача ЛП в общей постановке эквивалентными преобразованиями может быть приведена к любой из указанных стандартных моделей.

Пример 4. Преобразовать общую модель задачи ЛП

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 20x_4 \to \min$$

$$x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 15x_4 = 6,$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 = -9,$$

$$2x_1 \qquad + x_3 \quad - x_4 \le 5,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

в однородную модель.

Решение. Уравнение $x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 15x_4 = 6$ эквивалентно выполнению двух неравенств:

$$x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 15x_4 \le 6,$$

$$x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 15x_4 \ge 6.$$

Аналогично второе уравнение $x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 = -9$ можно представить в виде двух неравенств:

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 \le -9,$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 \ge -9.$$

В итоге эквивалентная однородная модель исходной задачи имеет вид:

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 20x_4 \to \min$$

$$x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 15x_4 \le 6,$$

$$x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 15x_4 \ge 6,$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 \le -9,$$

$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 \ge -9,$$

$$2x_1 \qquad + x_3 \quad - x_4 \le 5,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Пример5. Привести задачу ЛП

$$z = x_1 + 2x_2 - x_3 - 10 \to \min$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 3,$$

$$2x_1 - x_2 \qquad \ge 2,$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

к канонической форме.

Решение. В канонической модели требуется найти максимум целевой функции, поэтому заменяем поиск минимума исходной функции z эквивалентным нахождением максимума функции z', определяемой из выражения:

$$z' = -z = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 10.$$

При этом необходимо иметь в виду, что $\max z' = -\min z$.

Каждое исходное неравенство типа «$\le$» приводится к эквивалентной системе из одного уравнения и тривиального неравенства путем *добавления* для каждого такого неравенства *новой балансовой переменной*.

В нашем случае ограничение

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 3$$

эквивалентно системе

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$

$$x_4 \ge 0,$$

где x_4 – балансовая переменная для данного ограничения.

Любое исходное неравенство типа «$\ge$» приводится к эквивалентной системе из одного уравнения и тривиального неравенства путём *вычитания* своей для каждого неравенства такого типа новой *балансовой переменной*.

Тогда второе неравенство

$$2x_1 - x_2 \qquad \ge 2$$

с использованием балансовой переменной x_5 эквивалентно системе

$$2x_1 - x_2 \qquad - x_5 = 2,$$

$$x_5 \ge 0.$$

Свободные члены ограничений в канонической модели должны быть неотрицательными. Это условие нарушается в третьем ограничении в виде уравнения:

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1.$$

После умножения обеих частей уравнения на -1, получается требуемая форма

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

Наконец, переменную x_3 тривиальное ограничение не охватывает. Поэтому представим x_3 в виде разности

$$x_3 = x_6 - x_7,$$

где $x_6 \ge 0$, $x_7 \ge 0$ - новые переменные.

В итоге после исключения переменной x_3 из целевой функции и из ограничений исходной задачи, получается эквивалентная каноническая модель задачи ЛП:

$$z' = -z = -x_1 - 2x_2 + x_6 + x_7 + 10 \to \max$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 + x_6 + x_7 = 3,$$

$$2x_1 - x_2 \qquad - x_5 = 2,$$

$$x_1 - x_2 - x_6 + x_7 = 1,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0.$$

Пример 6. Преобразовать каноническую модель задачи ЛП

$$z = 2x_1 - 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 \to \max$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12,$$

$$2x_1 \qquad - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14,$$

$$2x_1 + 4x_2 \qquad + 8x_4 - 2x_5 = 12,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

в симплексную модель.

Решение. По существу нетривиальные ограничения задачи представляют систему из трёх линейно-независимых уравнений с 5-ю неизвестными. Выберем из их числа три базисные переменные и приведем систему к единичному базису, состоящему из единичных векторов коэффициентов (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).

Тогда система будет разрешена относительно базисных переменных, так как они будут выражены через оставшиеся свободные переменные.

Расчеты выполняются в таблице Гаусса согласно алгоритму метода последовательного исключения.

В исходной части таблицы (табл. 8) записываем расширенную матрицу исходной системы линейных уравнений (СЛУ) и дополняем её столбцом (α)

симплексных отношений, использование которого гарантирует неотрицательность вектора свободных членов в таблице Гаусса.

Таблица 8

Расширенная матрица исходной системы линейных уравнений

Номер шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	α
0 (исходная система)	1	3	1	4	-1	12	12/1=12
	2	0	-1	12	-1	14	14/2=7
	2	4	0	8	-2	12	12/2=6 $\overset{\min}{\leftarrow}$

Вначале *разрешающий столбец* (переменная x_p) выбирается так, чтобы в нём оказался хотя бы один положительный элемент таблицы a_{ip}>0. Пусть это будет x_1 (т.е. $p=1$).

Далее вычисляются симплексные отношения по формуле:

$$\alpha(i)=\begin{cases}\dfrac{b_i}{a_{ip}}, & \text{если} \quad \mathrm{a}_{\mathrm{ip}}>0,\\ \infty, & \text{если} \quad \mathrm{a}_{\mathrm{ip}}\le 0,\end{cases}$$

которые записываются в $i-$ой строке столбца α таблицы.

Разрешающая строка (с номером q) выбирается из условия:

$$\alpha(q)=\min_i \alpha(i).$$

В нашем случае $q=3$, так как $\alpha(3)=6$ является минимальным отношением в столбце α. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится *разрешающий элемент* a_{qp}. В нашем случае $a_{13}=2$ (в овале).

После установления разрешающего элемента рассчитываются элементы разрешающей (3-й) строки первого шага путем деления прежних её элементов на разрешающий элемент a_{qp} (нормирование строки), т.е. вычисляются по формуле:

$$a'_{qi} = a_{qi} / a_{qp},$$

где a_{qi} - элементы разрешающей строки нулевого шага.

После этого определяются элементы остальных строк таблицы первого шага по формуле:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a'_{qj} \cdot a_{ip}, \quad i \neq q.$$

Иначе элементы i–й ($i \neq q$) строки 1-го шага a'_{ij} получаются путем вычитания из элементов i–й строки 0-го шага a_{ij} соответствующих элементов нормированной разрешающей строки a'_{qj}, умноженных на коэффициент a_{ip} преобразуемой строки в разрешающем столбце.

Таблица 8 (продолжение)

Номер шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	α
1	0	1	1	0	0	6	∞
	0	-4	-1	4	1	2	2 $\xleftarrow{\min}$
	1	2	0	4	-1	6	∞

Выберем далее в качестве базисной переменной x_5, т.е. столбец x_5 будет разрешающим на 1-м шаге. После заполнения столбца α определяется разрешающая 2-я строка ($q = 2$) и разрешающий элемент $a_{25} = 1$.

На втором шаге переменная x_3 выбирается в качестве базисной и столбец x_3 является разрешающим.

На 3-м шаге система приведена к единичному базису, так как коэффициенты при переменных x_3, x_5, x_1 образуют единичную матрицу 3-го порядка.

Табл. 8 (продолжение)

Номер шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	α
2	0	1	1	0	0	6	$6 \overset{\min}{\leftarrow}$
	0	-4	-1	4	1	2	∞
	1	-2	-1	8	0	8	∞
3	0	1	1	0	0	6	
	0	-3	0	4	1	8	
	1	-1	0	8	0	14	

Система линейных уравнений, соответствующая 3-у шагу таблицы будет уже разрешенной относительно базисных переменных x_1, x_3, x_5:

$$x_2 + x_3 = 6,$$

$$-3x_2 + 4x_4 + x_5 = 8,$$

$$x_1 - x_2 + 8x_4 = 14,$$

из которой базисные переменные выражаются через свободные переменные x_2, x_4:

$$x_3 = 6 - x_2,$$

$$x_5 = 8 + 3x_2 - 4x_4,$$

$$x_1 = 14 + x_2 - 8x_4.$$

Подставим значения в выражение целевой функции, чтобы выразить её через свободные переменные, как это требуется в симплексной модели:

$$z = 2x_1 - 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 2(14 + x_2 - 8x_4) - 3(6 - x_2) + 5x_4 + 2(8 + 3x_2 - 4x_4) =$$

$$= 11x_2 - 19x_4 + 26.$$

В итоге получена эквивалентная симплексная модель задачи:

$$z = 11x_2 - 19x_4 + 26 \to \max$$

$$x_2 + x_3 = 6,$$

$$-3x_2 \quad +4x_4 + x_5 = 8,$$

$$x_1 - x_2 \quad +8x_4 \quad =14,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Заметим, что формулы (1) представляют общее решение исходной СЛУ и если в нем приравнять свободные переменные нулю ($x_2 = x_4 = 0$), то получается частное *базисное решение* СЛУ:

$$x^0 = (14; 0; 6; 0; 8).$$

Поскольку базисные переменные x_1, x_3, x_5 в нем неотрицательны, то оно, кроме того, удовлетворяет тривиальным ограничениям исходной задачи и будет являться *опорным решением* задачи ЛП. Геометрически точка x^0 представляет собой угловую точку многогранного множества ОДР.

При выборе других базисных переменных можно получить другую симплексную модель и соответствующее ей другое опорное решение задачи ЛП.

Все переменные, входящие в выражение (1), подчиняются условию неотрицательности $x_1 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_5 \ge 0$.

Отсюда получена эквивалентная исходной задаче однородная модель с двумя неизвестными:

$$z = 11x_2 - 19x_4 + 26 \to \max$$

$$x_2 \le 6,$$

$$-3x_2 + 4x_4 \le 8,$$

$$-x_2 + 8x_4 \le 14,$$

$$x_2 \ge 0, \quad x_4 \ge 0.$$

Привести задачи **11-15** к канонической форме.

11. $z = 3x_1 + x_2 \to \max$

$$2x_1 + x_2 \ge 3,$$

$$x_1 - 2x_2 \le 2,$$

12. $z = x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 \to \min$

$$x_1 + x_2 \quad - x_4 \le 1,$$

$$-x_1 + x_2 \quad + x_4 \ge 1,$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

$x_2 + x_3 = -1,$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

13. $z = x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \min$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ -x_1 + x_3 - x_4 &\le 5, \\ x_2 + x_3 &\ge 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

14. $z = x_2 - x_4 \to \min$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &\le 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &\ge -4, \\ 3x_2 + 2x_4 &\ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

15. $z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\ge 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &\le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

В задачах **16-20** получить симплексную модель и указать опорное решение задачи ЛП.

16. $z = x_1 - x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1, \\ x_j \ge 0, \ j &= \overline{1,3}. \end{aligned}$$

17. $z = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 7, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_3 - x_4 &= 3, \\ x_j \ge 0, \ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

18. $z = x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 &= 3, \\ -x_1 + x_2 - 3x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 5, \\ x_j \ge 0, \ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

19. $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_j \ge 0, \ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}$$

20. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 \to \max$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 5,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5,$$
$$x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}\ .$$

В задачах линейного программирования **21-25** привести ограничения к системе неравенств (получить эквивалентную однородную модель с меньшим числом переменных).

21. $z = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \to \max$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6,$$
$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \quad = 4,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

22. $z = x_1 - x_2 + \quad 3x_4 + x_5 \to \min$

$$2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 4,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 15,$$
$$2x_1 - 2x_2 - x_3 \quad + 2x_5 = 8,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

23. $z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -2,$$
$$2x_1 + 3x_2 \quad + x_4 - x_5 \quad = 6,$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \quad = 3,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

24. $z = 3x_1 + x_2 + x_4 - x_5 \to \min$

$$2x_1 - x_2 \quad + x_4 - x_5 = 9,$$
$$4x_1 - x_2 - x_3 \quad - x_5 = 4,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \quad - x_5 = 6,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

25. $z = 2x_1 + 3x_2 + 9x_6 - 10 \to \max$

$$12x_1 + 13x_2 \qquad + 3x_5 \qquad = 16,$$
$$26x_1 + 15x_2 \qquad - x_5 + 5x_6 = 28,$$
$$-13x_1 + 10x_2 \qquad\qquad + 3x_6 = 6,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

1.2.1 Графический метод решения

Задача ЛП допускает решение графическим методом в двух случаях:

- если имеется однородная модель и число переменных не более двух;

- если имеется каноническая модель и разность между числом переменных и числом независимых уравнений в ограничениях не превышает двух.

Пример 7. Решить задачу ЛП:

$$z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$(1) \quad -x_1 + x_2 \le 2,$$

$$(2) \quad x_1 + x_2 \le 8,$$

$$(3) \quad x_1 + x_2 \ge 3,$$

$$(4) \quad x_2 \le 4,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение. Задача представлена однородной моделью с двумя неизвестными и допускает решение графическим методом.

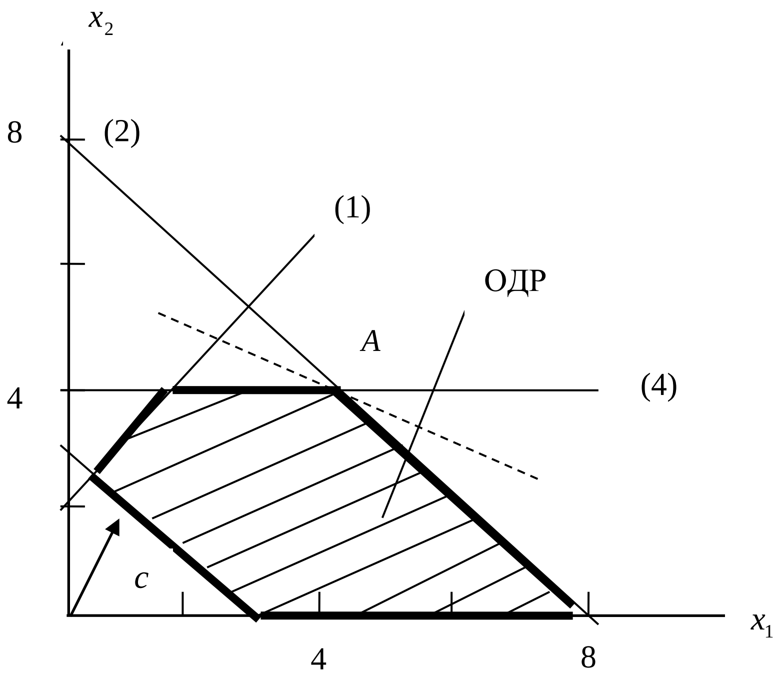

Рис. 1. Графическая модель

Вначале строится *область допустимых решений* (ОДР) задачи, т.е. таких точек плоскости, которые удовлетворяют всем ограничениям задачи. Поскольку $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$, то ограничиваемся первым квадрантом плоскости.

Построим вначале полуплоскость, отвечающую первому (1) неравенству

$$-x_1 + x_2 \leq 2.$$

Эта полуплоскость определяется граничной линией, заданной уравнением

$$-x_1 + x_2 = 2.$$

Это уравнение прямой и чтобы ее построить, достаточно построить две точки плоскости, принадлежащие ей. Найдем их с помощью данного уравнения. Положим $x_1 = 0$, тогда $x_2 = 2$, а при $x_1 = 2$ имеем $x_2 = 4$. Таким образом, прямая проходит через точки (0;2) и (2;4). Построив ее на рисунке, запишем рядом цифру 1. Для определения положения искомой полуплоскости выполняется подстановка координат некоторой контрольной точки в неравенство (1). Например, такой точкой может быть начало координат $x_1 = x_2 = 0$. Подставляя в неравенство (1) нулевые значения переменных, получим в левой его части ноль, что строго меньше 2.

Неравенство является истинным, и начало координат принадлежит искомой полуплоскости, т.е. полуплоскость находится ниже построенной прямой. В противном случае пробная точка находится в полуплоскости, не отвечающей исследуемому неравенству.

Аналогично построим три другие полуплоскости и отметим первую четверть, определяемую тривиальными ограничениями $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$. В итоге получится множество точек плоскости, которые удовлетворяют всем ограничениям задачи (ОДР), которая на рис. 1 отмечена жирными линиями.

Далее построим вектор $c = (1;2)$, координаты которого состоят из коэффициентов целевой функции при соответствующих переменных. Он представляет *градиент* (вектор роста) целевой функции и указывает направление возрастания z.

Теперь требуется найти в ОДР точку, наиболее удаленную от начала координат в этом направлении. Прямая, проходящая через начало координат перпендикулярно вектору c, представляет собой линию уровня целевой функции z, на которой z =0.

Перемещаем эту прямую параллельно самой себе в направлении вектора c до тех пор, пока она не станет *опорной* к ОДР (пунктирная прямая), т. е. ОДР будет расположена по одну сторону от прямой и будет иметь с прямой , по крайней мере, одну общую точку.

Оптимальному решению задачи соответствует угловая точка ОДР, в которой указанная прямая будет опорной к ОДР. В нашем случае это точка A, которая находится на пересечении границ 2-го и 4-го неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Решение этой системы дает оптимальный план задачи $x_1^* = 4$, $x_2^* = 4$. Максимальное значение целевой функции равно $z^* = x_1^* + 2x_2^* = 12$.

При решении графическим методом возможны также следующие случаи:

- задача ЛП имеет бесконечное множество решений, когда ребро многогранного множества ОДР перпендикулярно градиенту целевой функции и опорная прямая совпадает с этим ребром;
- задача ЛП не имеет решения из-за неограниченности целевой функции сверху, когда ОДР является неограниченным многогранным множеством;
- задача ЛП не имеет решения из-за пустоты ОДР.

Пример 8. Решить задачу ЛП (*пример 6*):

$$z = 2x_1 - 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 \to \max$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12,$$

$$2x_1 \qquad - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14,$$

$$2x_1 + 4x_2 \qquad + 8x_4 - 2x_5 = 12,$$

$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$

Решение. Это каноническая модель, в ней число неизвестных $n = 5$, а число уравнений $m = 3$. Разность $n - m = 2$ и задача может быть решена графически.

С использованием метода последовательных исключений в *примере 6* была получена эквивалентная однородная модель исходной задачи, содержащая только две переменные x_2 и x_4:

$$z = 11x_2 - 19x_4 + 26 \to \max$$

$$(1) \qquad x_2 \leq 6,$$

$$(2) \qquad -3x_2 + 4x_4 \leq 8,$$

$$(3) \qquad -x_2 + 8x_4 \leq 14,$$

$$x_2 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

Выполним решение задачи описанным в *примере 7* способом.

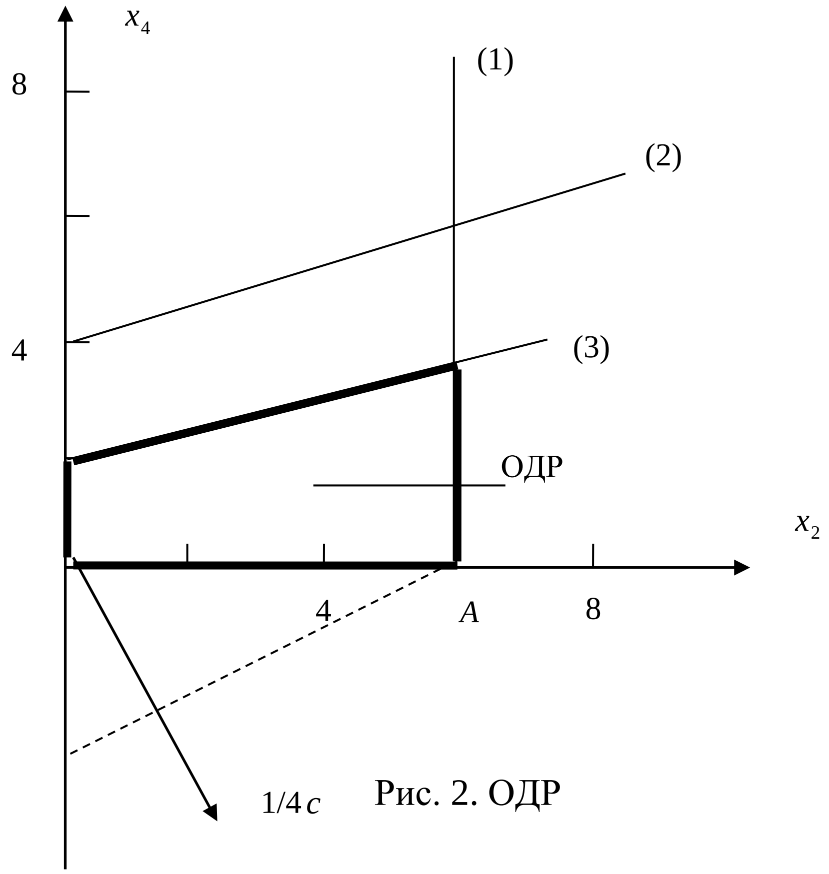

Рис. 2. ОДР

Построенная ОДР выделена на рис. 2 жирными линиями.

Вектор $c=$(11;-19) задает направление роста функции z и для выявления этого направления можно построить вектор $1/4c$=(2,75;-4,75).

Угловая точка A ОДР с координатами (6;0) является решением задачи, т.е. $x_2^*=6$, $x_4^*=0$, а максимальное значение целевой функции равно

$$z^*=11x_2^*-19x_4^*+26=92.$$

В силу соотношений (1) *примера 6* отсюда определяем значения базисных переменных:

$$x_1^*=14+x_2^*=20,$$

$$x_3^*=6-x_2^*=0,$$

$$x_5^*=8+3x_2^*=26.$$

В итоге точка $x^*=$(20; 6; 0; 0; 26) является решением исходной задачи и $z^*=92$.

Решить задачи **26-35** графическим методом.

26. $z = x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 1, \\ x_1 + x_2 &\ge 2, \\ x_1 - 2x_2 &\le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

27. $z = 5x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

28. $z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\ge 11, \\ -2x_1 + x_2 &\le 2, \\ x_1 - 2x_2 &\le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

29. $z = 4{,}5x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\le 10, \\ 9x_1 + 4x_2 &\le 56, \\ 3x_1 + 5x_2 &\ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

30. $z = 2x_1 - 3x_2 \to \min$

$$\begin{aligned} -4x_1 + 5x_2 &\le 20, \\ 2x_1 + x_2 &\ge 6, \\ 5x_1 - x_2 &\le 45, \\ x_1 - x_2 &\le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

31. $z = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\ge -3, \\ 6x_1 + x_2 &\le 42, \\ 2x_1 - 3x_2 &\le 6, \\ x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

32. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \min$

$$\begin{aligned} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \qquad &= 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 24, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1{,}5}&. \end{aligned}$$

33. $z = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad + x_5 &= 15, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \qquad &= 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1{,}5}&. \end{aligned}$$

34. $z = x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \to \max$

$$x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 1,$$

35. $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \to \max$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 1,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 3,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$
$$-x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

1.2.2 Симплексный метод

Задачу ЛП можно непосредственно решать симплексным методом, если она представлена симплексным моделью. Соответствующее опорное решение является в этом случае исходной угловой точкой ОДР, с которой и начинается решение.

Все вычисления выполняются в таблице Гаусса в соответствии с алгоритмом последовательного исключения как это было описано при получении симплексной модели из канонической (*пример 6*). Но при этом имеются следующие отличия.

Во-первых, в таблице для каждого шага добавляется дополнительная строка, называемая *индексной*, в которую заносятся коэффициенты целевой функции. Предварительно выражение для целевой функции переписывается так, чтобы слагаемые с неизвестными находились в левой части уравнения по аналогии с уравнениями нетривиальных ограничений. Достаточным условием оптимальности соответствующего опорного решения является неотрицательность коэффициентов при свободных переменных в индексной строке. При выполнении очередного шага индексная строка вычисляется по тем же правилам, что и другие строки таблицы (кроме разрешающей строки).

Во-вторых, разрешающий столбец теперь выбирается не произвольно, а по наименьшему отрицательному числу в индексной строке.

Пример 9. Рассмотрим решение задачи 4**,** которая по содержанию является производственной задачей с ограничением на ресурсы. После формализации ее математическая модель имеет вид:

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430,$$

$$3x_1 \quad + 2x_3 \le 460,$$

$$x_1 + 4x_2 \quad \le 420,$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,3},$$

где x_1, x_2, x_3 - суточное количество изделий 1, 2, и 3 вида, выпускаемое фабрикой.

Решение. Приведем задачу к канонической форме, добавив в каждое неравенство по балансовой переменной x_4, x_5, x_6 соответственно. В выражении целевой функции слагаемые с переменными перенесем в левую часть уравнения. Тогда задача запишется:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \quad = 430,$$

$$3x_1 \quad + 2x_3 \quad + x_5 \quad = 460,$$

$$x_1 + 4x_2 \quad + x_6 = 420,$$

$$z - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \quad = 0 \to \max$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,6}.$$

Каждая балансовая переменная x_4, x_5, x_6 входит только в одно уравнение. Отсюда матрица коэффициентов при них будет единичной, а стало быть – невырожденной. Поэтому целесообразно эти переменные взять в качестве базисных, а переменные x_1, x_2, x_3 считать свободными.

В итоге получена симплексная модель, так как матрица из коэффициентов нетривиальных ограничений представлена в разрешенной форме относительно базисных переменных x_4, x_5, x_6, а целевая функция z зависит только от свободных переменных x_1, x_2, x_3.

Вектор x^0=(0; 0; 0; 430; 460; 420) является исходным опорным решением.

Все вычисления выполним в таблице 9.

Таблица 9

Симплексная модель

Номер шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	α
0	1	2	1	1	0	0	430	430
	3	0	2	0	1	0	460	$230 \overset{\min}{\leftarrow}$
	1	4	0	0	0	1	420	∞
	-3	-2	-5	0	0	0	0	-
1	-1/2	2	0	1	-1/2	0	200	$100 \overset{\min}{\leftarrow}$
	3/2	0	1	0	1/2	0	230	∞
	1	4	0	0	0	1	420	105
	9/2	-2	0	0	5/2	0	1150	-
2	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100	
	3/2	0	1	0	1/2	0	230	
	0	0	0	-2	1	1	20	
	4	0	0	1	2	0	1350	-

На нулевом шаге в индексной строке имеются отрицательные числа -3, -2. -5, поэтому исходный опорный план x^0 не оптимален.

В качестве разрешающего столбца выбираем x_3, так как в индексной строке этого столбца находится наименьшее отрицательное число -5. Далее выполняется обычная итерация метода последовательного исключения переменных и на первом шаге осуществляется переход к соседней угловой точке ОДР

x^1=(0; 0; 230; 200; 0; 420),

которая также не является решением, поскольку в индексной строке первого шага имеется отрицательное число -2. В качестве разрешающего столбца на этом шаге выбирается столбец с переменной x_2.

Опорное решение

x^2=(0; 100; 230; 0; 0; 20),

полученное на втором шаге, является оптимальным, поскольку все числа в индексной строке этого шага неотрицательны. Значение целевой функции равно 1350.

Отсекая значения балансовых переменных в решении x^2, возвращаемся к содержательной постановке задачи и устанавливаем, что наиболее выгодный суточный объем производства фабрики задается вектором

x^*=(0; 100; 230),

т.е. нужно выпускать 100 изделий 2-го вида и 230 изделий 3-го вида.

Изделия 1-го вида выпускать невыгодно. Максимальная прибыль при этом составит 1350 долларов. В задачах **36-40** найти исходное опорное решение и решить задачу симплексным методом.

36. $z = -11x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \to \min$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 4,$$
$$-2x_1 + 5x_3 + x_4 = 10,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

37. $z = -3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,$$
$$-x_1 + 3x_2 - x_4 = -3,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

38. $z = x_1 - x_2 - 5x_3 + 2x_4 + x_5 \to \max$

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1,$$
$$-2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5,$$
$$x_2 + 8x_3 + x_4 + 3x_5 = 20,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

39. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 24,$$
$$-2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 6,$$
$$3x_1 + x_3 + x_4 = 20,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

40. $z = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 20x_4 + x_5 \to \max$

$$2x + x_2 - 2x_4 = 4,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 = 1,$$
$$10x_1 - x_2 + 3x_3 + 20x_4 = 14,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Задачи **41-45** решить симплексным методом.

41. $z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10,$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

42. $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_5 \le 15,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 7,$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 12,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

43. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 \le 2,$$
$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \le 3,$$
$$x_1 - 3x_2 + x_3 \le 1,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

44. $z = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \min$

$$x_2 + x_3 \le 4,$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6,$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

45. $z = 6x_1 + 12x_2 + 3x_3 \to \max$

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 12,$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15,$$
$$2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 10,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

1.2.3 *M*-метод

Если в задаче ЛП неравенства смысла « $\ge$ », то при приведении задачи к канонической форме балансовые переменные войдут в уравнения со знаком минус и не могут быть использованы в качестве базисных переменных, так как базисное решение СЛУ уже не будет опорным решением задачи ЛП в силу отрицательности базисных переменных.

В этом случае удобнее получить симплексную модель путем введения в рассмотрение новых дополнительных неотрицательных переменных, называемых *искусственными*. Такие переменные по одной добавляют в каждое из уравнений с балансовыми переменными и в итоге они образуют начальный базис.

По смыслу задачи искусственные переменные в оптимальном решении задачи должны быть равны нулю, иначе будут нарушены равенства в канонической модели и, следовательно, не будут выполняться исходные ограничения задачи.

Чтобы этого не допустить, в целевую функцию задачи (на максимум) добавляют все искусственные переменные с коэффициентом ($-M$), где M – сколь угодно большое положительное число. Полученную расширенную задачу ЛП, называемую *М-задачей*, для которой уже известен начальный опорный план, решают симплексным методом. Описанный прем получил название M - метода.

При решении M - задачи возможны следующие случаи.

1. M - задача разрешима и в ее оптимальном решении все искусственные переменные равны нулю. Тогда и исходная задача разрешима, а ее решение получается из решения M -задачи путем отбрасывания балансовых и искусственных переменных.

2. M - задача разрешима, но в оптимальном решении хотя бы одна искусственная переменная не равна нулю. В этом случае исходная задача неразрешима из-за пустоты ОДР.

3. M - задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции сверху. Тогда и исходная задача не имеет решения по этой же причине.

4. M - метод может применяться и в том случае, когда задача записана в канонической форме, но не указано начальное опорное решение. В этом случае можно ожидать более быстрого решения, чем при предварительном преобразовании задачи в симплексную модель, а затем последующего решения симплексным методом.

Пример 10. Найти решение задачи ЛП:

$$z = x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$x_1 + x_2 \le 5,$$

$$x_1 - 5x_2 \ge 3,$$

$$4x_1 - x_2 \ge 4,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение. Приведем задачу к канонической форме, введя в рассмотрение балансовые переменные x_3, x_4, x_5:

$$z = x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \quad = 5,$$

$$x_1 - 5x_2 \quad - x_4 \quad = 3,$$

$$4x_1 - x_2 \quad - x_5 = 4,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Балансовые переменные x_4, x_5 не могут быть взяты в качестве базисных переменных, так как при этом базисное решение СЛУ содержит x_4=-3 <0, x_5=-4 <0, т.е. не является даже планом исходной задачи.

Поэтому во второе и третье уравнение добавим дополнительные искусственные переменные x_6, x_7, а также эти переменные добавим в целевую функцию с коэффициентами (-M). В итоге получим следующую M - задачу:

$$z' = x_1 - 2x_2 - Mx_6 - Mx_7 \to \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \quad = 5,$$

$$x_1 - 5x_2 - x_4 + x_6 = 3,$$

$$4x_1 - x_2 - x_5 \quad + x_7 = 4,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

В этой задаче матрица ограничений разрешена относительно переменных x_3, x_6, x_7 и сразу можно указать исходное опорное решение:

$x'^0 =$(0; 0; 5; 0; 0; 3; 4).

Чтобы получить симплексную модель *M*- задачи, осталось функцию z' выразить через свободные переменные x_1, x_2, x_4, x_5. Из второго и третьего ограничений системы (9) находим:

$$x_6 = 3 - x_1 + 5x_2 + x_4,$$

$$x_7 = 4 - 4x_1 + x_2 + x_5.$$

Подставляя найденные значения x_6, x_7 в выражение для целевой функции z', после несложных преобразований получим

$$z' = -7M + (1+5M)x_1 - (2+6M)x_2 - Mx_4 - Mx_5.$$

Перенесем слагаемые с переменными в левую часть уравнения

$$z' - (1+5M)x_1 + (2+6M)x_2 + Mx_4 + Mx_5 = -7M. \qquad (10)$$

Для решения преобразованной симплексной модели (9), (10) *M* – задачи используем симплексный метод. При этом считаем число *M* сколь угодно большим положительным. На нулевой итерации таблица Гаусса имеет вид:

Таблица 10

Таблица Гаусса

Номер шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	α
0	1	1	1	0	0	0	0	5	5
	1	-5	0	-1	0	1	0	3	3
	4	-1	0	0	-1	0	1	4	$\overset{\min}{1} \leftarrow$
	-1-5*M*	2+6*M*	0	*M*	*M*	0	0	-7M	-

В индексной строке этой таблицы число (-1-5*M*) является отрицательным и план x'^0 не является оптимальным. После выбора столбца x_1 в качестве разрешающего, вычисляем симплексные отношения в столбце α и по ним определяем разрешающую третью строку и разрешающий элемент a_{41}=4.

Продолжив вычисления по методу последовательных исключений, получим следующие результаты.

Таблица 10 (продолжение)

Номер шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	α
1	0	5/4	1	0	1/4	0	-1/4	4	16
	0	-19/4	0	-1	1/4	1	-1/4	2	$\overset{\min}{8\leftarrow}$
	1	-1/4	0	0	-1/4	0	1/4	1	∞
	0	¼(7+19*M*)	0	*M*	-1/4(1+*M*)	0	¼(1+5*M*)	1-2*M*	-
2	0	6	1	1	0	-1	0	2	$\overset{\min}{2\leftarrow}$
	0	-19	0	-4	1	4	-1	8	∞
	1	-5	0	-1	0	1	0	3	∞
	0	-3	0	-1	0	1+*M*	*M*	3	-
3	0	6	1	1	0	-1	0	2	
	0	5	4	0	1	0	-1	16	
	1	1	1	0	0	0	0	5	
	0	3	1	0	0	*M*	*M*	5	-

На третьем шаге получаем оптимальное решение *M*- задачи:

$$x'^{*}=(5;\ 0;\ 0;\ 2;\ 16;\ 0;\ 0)$$

со значением целевой функции

$$z'^{*}=5.$$

Поскольку искусственные переменные в оптимальном плане x'^* равны $x_6'^* = x_7'^* = 0$, то исходная задача также разрешима и ее решение получается путем отбрасывания значений базисных и искусственных переменных:

$$x^* = (5;\ 0),$$

а максимальное значение целевой функции совпадает со значением z'^*

$$z^* = 5.$$

Пример 11. Найти решение задачи ЛП:

$$z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 6,$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Решение. Задача дана в каноническом виде, но исходный опорный план неизвестен. Выполним ее решение *M*- методом.

Введем в первое уравнение искусственную базисную переменную x_5, а во второе уравнение добавим x_6. В целевую функцию добавим обе переменные с коэффициентами –*M*.

В итоге *M*- задача примет вид:

$$z' = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - Mx_5 - Mx_6 \to \max$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 \qquad = 6,$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + \qquad x_6 = 5,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Получим симплексную модель *M*- задачи.

Для этого выразим базисные переменные x_5, x_6 через свободные x_1, x_2, x_3, x_4 из нетривиальных ограничений:

$$x_5 = 6 - x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4,$$

$$x_6 = 5 - x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4.$$

После подстановки x_5, x_6 в выражение z' и несложных преобразований получим целевую функцию, зависящую только от свободных переменных:

$$z' = -11M + (1+2M)x_1 + (-2+3M)x_2 + 93 + 7M)x_3 - (3+3M)x_4 .$$

Тогда симплексная модель M- задачи с преобразованным выражением для целевой функции запишется:

$$z' - (1+2M)x_1 - (-2+3M)x_2 - (3+7M)x_3 + 93 + 3M)x_4 = -11M \to \max$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 \qquad = 6,$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + \qquad x_6 = 5,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Все вычисления приведены в таблице 11.

Таблица 11

Решение симплексной модели

Номер шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	α
0	1	2	4	-1	1	0	6	$6/4 \overset{\min}{\leftarrow}$
	1	1	3	-2	0	1	5	5/3
	-1-2M	2-3M	-3-7M	3+3M	0	0	-11M	-
1	1/4	2/4	1	-1/4	1/4	0	6/4	6
	1/4	-2/4	0	-5/4	-3/4	1	2/4	$2 \overset{\min}{\leftarrow}$
	-1/4(1+M)	2/4(7+M)	0	¼(9+5M)	¼(3+7M)	0	2/4(9-M)	-
2	0	1	1	1	1	-1	1	
	1	-2	0	-5	-3	4	2	
	0	3	0	1	M	1+M	5	

В итоге получено оптимальное решение M- задачи: x'^*=(2; 0; 1; 0; 0; 0); z'^*=5.

Поскольку искусственные переменные x_5, x_6 в нем равны нулю, то исходная задача имеет решение : x^*=(2; 0; 1; 0); z^*=5.

В задачах **46-55** найти решение *M*- методом.

46. $z = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \min$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 12,$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \le 2,$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

47. $z = x_1 + 5x_2 + 2x_3 \to \min$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \ge 2,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 3,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

48. $z = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2,$$
$$x_1 \qquad + x_3 \le 4,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 6,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

49. $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min$

$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 5,$$
$$x_1 - x_2 - x_3 \le 1,$$
$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 11,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

50. $z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 6,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 5,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 6,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

51. $z = 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max$

$$-2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 8,$$
$$-2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

52. $z = x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min$

$$2x_1 - 7x_2 + x_3 - 3x_4 = 8,$$
$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

53. $z = x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4 \to \min$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1,$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2,$$
$$x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

54. $z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max$

55. $z = 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \to \min$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \qquad &= 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 &= 4, \\ 2x_1 \qquad - x_3 + x_4 + x_5 &= 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 + 2x_5 &= 19, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 &= 14, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - 6x_4 + x_5 &= 9, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

1.2.4 Двойственные задачи

Произвольной задаче ЛП можно определенным образом сопоставить другую задачу ЛП, называемую *двойственной* по отношению к *исходной*. Обе задачи называют *двойственной парой*. Например, симметричная двойственная пара записывается в следующем матричном виде:

- исходная:

$z(x) = cx \to \max$

$$Ax \le b,$$

$x \ge 0$;

- двойственная:

$T(y) = by \to \min$

$$Ay \ge c,$$

$y \ge 0$.

Существуют следующие правила построения двойственной задачи, если известна модель исходной задачи.

Если в исходной задаче находится *максимум* целевой функции ($z \to \max$), то в двойственной задаче определяется *минимум* целевой функции ($T \to \min$) и наоборот.

1. Число переменных y_i двойственной задачи равно числу нетривиальных ограничений исходной, а число нетривиальных ограничений двойственной задачи совпадает с числом переменных x_j исходной задачи.

2. Свободные члены нетривиальных ограничений b_i исходной задачи являются коэффициентами при соответствующих переменных целевой функции двойственной задачи и наоборот – коэффициенты целевой функции исходной задачи c_j являются свободными членами нетривиальных ограничений двойственной задачи.

3. Матрица коэффициентов при неизвестных в нетривиальных ограничениях двойственной задачи является транспонированной к матрице коэффициентов при неизвестных исходной задачи.

4. Если переменная x_j исходной задачи предполагается неотрицательной $(x_j \geq 0)$ и целевая функция при этом $z \to \max$, то соответствующее $j-$е нетривиальное ограничение двойственной задачи является неравенством смысла «$\geq$» , а если при этом $z \to \min$, то $j-$е ограничение будет неравенством смысла «$\leq$».

Если же на переменную x_j тривиальное ограничение не распространяется, то $j-$е ограничение двойственной задачи будет уравнением.

5. Если $i-$е нетривиальное ограничение исходной задачи является неравенством смысла «$\leq$» и при этом $z \to \max$, то соответствующая двойственная переменная $y_i \geq 0$, а если $z \to \min$, то $y_i \leq 0$.

Если же $i-$е нетривиальное ограничение исходной задачи является уравнением, то y_i может иметь произвольный знак.

Задачи двойственной пары обладают рядом свойств, в частности, существует взаимосвязь между оптимальными решениями обеих задач, что сформулировано в следующих теоремах.

Теорема 1 (первая теорема двойственности). Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая задача также имеет оптимальное решение, причем выполняется равенство

$$\max z(x) = z(x^*) = \min T(y) = T(y^*) .$$

Если целевая функция одной из задач не ограничена на множестве ОДР, то другая задача также неразрешима, но уже из-за несовместности ограничений.

Теорема 2 (вторая теорема двойственности). Оптимальные решения x^*, y^* симметричной двойственной пары связаны следующими равенствами, называемыми *условиями дополняющей нежесткости*:

$$(a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + ... + a_{mj}y_m^* - c_j)x_j^* = 0, \; j = \overline{1,n},$$

$$(a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + ... + a_{in}x_n^* - b_i)y_i^* = 0, \; i = \overline{1,m}.$$

Зная оптимальное решение одной из задач, можно без особого труда найти оптимальный план другой задачи. Например, если исходная задача решена симплексным методом, то оптимальное решение y^* двойственной задачи выписывается из индексной строки последней итерации таблицы Гаусса из столбцов, соответствующих базисным переменным исходного опорного плана задачи.

Производственные задачи с ограничениями на ресурсы после формализации имеют вид (11). Здесь целевая функция z выражает прибыль, доход предприятия, а компоненты b_i вектора b представляют объемы (запасы) располагаемых ресурсов.

Если исходная задача имеет оптимальное решение x^*, то разрешима и двойственная задача и компоненты этого решения

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$$

называют *двойственными оценками* ограничений исходной задачи. Оценки y_i^* являются мерами дефицитности i- го ресурса:

- если y_i^*>0, то i- й ресурс является дефицитным и он полностью исчерпан при оптимальном плане производства;

- если y_i^*=0, то i- й ресурс не является дефицитным и при оптимальном плане производства он израсходован не полностью.

Кроме того, прирост максимальной прибыли z^* пропорционален в малой окрестности x^* приращению i-го ресурса и коэффициентом пропорциональности является двойственная оценка y_i^*. Чем больше y_i^*, тем эффективнее i-й ресурс.

При больших изменениях ресурсов Δb_i, $i=\overline{1,m}$ прежнее решение двойственной задачи сохранится (наблюдается устойчивость двойственных оценок), если Δb_i удовлетворяют следующим неравенствам, которые задают многогранник устойчивости оценок:

$$D^{-1}(b+\Delta b)\geq 0.$$

Здесь матрица D^{-1} выписывается из последней итерации таблицы Гаусса, соответствующей оптимальному плану x^*, из тех ее столбцов, которые отвечают базисным переменным на нулевой итерации.

Часто для простоты анализа вместо многогранника устойчивости находят *интервалы устойчивости* по каждому виду ресурсов в отдельности при постоянстве других ресурсов. Например, полагая в выражении $\Delta b_2=\Delta b_3=...=\Delta b_m=0$,

можно найти интервал изменения Δb_1 и далее - интервал изменения компоненты b_1, когда решение двойственной задачи остается прежним. При этом прежними остаются выводы по качественному и количественному анализу ресурсов.

Пример 12. Получить задачу, двойственную к следующей:

$$z=3+2x_1+x_2+6x_3\to\min$$

$$x_1-3x_2+2x_3=1,$$

$$2x_1+4x_2+x_3\leq 7,$$

$$-x_1+x_2+3x_3\geq 6,$$

$$x_1\geq 0,\; x_2\geq 0.$$

Решение. В исходной задаче три нетривиальных ограничения, поэтому в двойственной задаче будет три неизвестных: y_1, y_2, y_3. Коэффициентами целевой функции двойственной задачи T будут правые части нетривиальных ограничений исходной задачи, т. е. числа: 1, 7 , 6. Поскольку $z \to \min$, то $T \to \max$.

В итоге целевая функция двойственной задачи имеет вид (постоянная 3 также включается):

$$T = 3 + y_1 + 7y_2 + 6y_3 \to \max .$$

Число нетривиальных ограничений двойственной задачи равно числу неизвестных исходной задачи, т.е. трем. Матрица коэффициентов при неизвестных y_i получается транспонированием матрицы коэффициентов при переменных x_j

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ и $z \to \min$, то первое и второе ограничение будут неравенствами смысла «$\leq$». На переменную x_3 тривиальное ограничение не распространяется, отсюда третье нетривиальное ограничение будет уравнением. Правыми частями указанных ограничений будут коэффициенты при неизвестных целевой функции z, т.е. числа 2, 1, 6.

В итоге нетривиальные ограничения двойственной задачи запишутся:

$$y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2,$$

$$-3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 1,$$

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 = 6.$$

В исходной задаче первое нетривиальное ограничение представлено уравнением, поэтому переменная y_1 может быть любого знака. Второе ограничение является неравенством смысла «$\leq$» и $z \to \min$, поэтому y_2 должно быть неположительным, т.е. $y_2 \le 0$. Наконец, третье ограничение типа «$\ge$» и $z \to \min$, отсюда $y_3 \ge 0$.

Окончательно двойственная задача имеет вид:

$$T = 3 + y_1 + 7y_2 + 6y_3 \to \max$$

$$y_1 + 2y_2 - y_3 \le 2,$$

$$-3y_1 + 4y_2 + y_3 \le 1,$$

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 = 6,$$

$$y_2 \le 0,\ y_3 \ge 0.$$

Пример 13. Составить задачу, двойственную к данной

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \min$$

$$(1) \quad 2x_1 - x_2 \le 4,$$

$$(2) \quad x_1 + x_2 \ge 5,$$

$$(3) \quad 8x_1 + x_2 \ge 8,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

и найти оптимальные решения обеих задач.

Решение. Руководствуясь правилами составления двойственных задач, запишем двойственную задачу к сформулированной:

$$T = 4y_1 + 5y_2 + 8y_3 \to \max$$

$$2y_1 + y_2 + 8y_3 \le 2,$$

$$-y_1 + y_2 + y_3 \le 4,$$

$$y_1 \le 0.\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Исходная задача допускает графическое решение и тем самым ее решение проще, чем решение двойственной. Найдем решение исходной графическим методом.

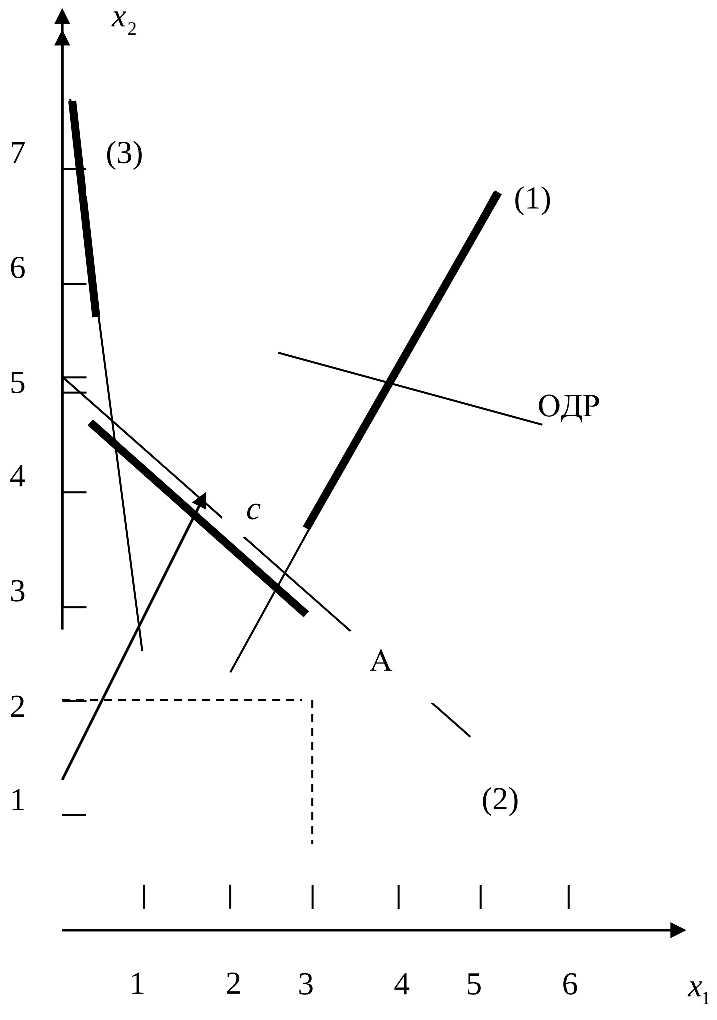

Рис. 4. Графический вид задачи

Точка А является решением задачи и ее координаты находятся из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Отсюда $x^* = (3;2)$ и

$$\min z = z^* = 14.$$

Для нахождения оптимального решения двойственной задачи воспользуемся второй теоремой двойственности. Поскольку точка А не находится на прямой (3), то третье неравенство задачи для x_1^*, x_2^* выполняется как строгое

$$8x_1^* + x_2^* = 26 > 8$$

или

$$8x_1^* + x_2^* - 8 > 0.$$

Но должно выполняться условие дополняющей нежесткости

$$(8x_1^* + x_2^* - 8)y_3^* = 0.$$

Отсюда должно быть $y_3^* = 0$.

Далее запишем условия дополняющей нежесткости для ограничений двойственной задачи:

$$(2y_1^* + y_2^* + 8y_3^* - 2)x_1^* = 0,$$

$$(-y_1^* + y_2^* + y_3^* - 4)x_2^* = 0.$$

Поскольку $x_1^* = 3 > 0$, $x_2^* = 2 > 0$, то выражения в скобках должны быть равны нулю. С учетом полученного значения $y_3^* = 0$, получаем:

$$2y_1^* + y_2^* = 2,$$

$$-y_1^* + y_2^* = 4.$$

Решением системы из двух уравнений является: $y_1^* = -2/3$, $y_2^* = 10/3$.

Таким образом, найдено оптимальное решение двойственной задачи

$$y^* = (-2/3;\ 10/3;\ 0)$$

и по первой теореме двойственности

$$\max T = T^* = \min z = z^* = 14.$$

Пример 14. Для производственной задачи с ограничениями на ресурсы, математическая модель которой имеет вид:

$$z = 50x_1 + 20x_2 + 40x_3 \to \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 8,$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 7,$$

$$3x_1 + x_2 + 6x_3 \le 9,$$

$$x_j \ge 0. \ \ j = \overline{1,3},$$

Составить двойственную задачу, найти оптимальные решения обеих задач, выполнить качественный и количественный анализ ресурсов, построить многогранник и интервалы устойчивости двойственных оценок.

Решение. Используя общие правила составления двойственных задач, запишем двойственную задачу:

$$T = 8y_1 + 7y_2 + 9y_3 \to \min$$

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 50,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \ge 20,$$

$$y_1 + 2y_2 + 6y_3 \ge 40,$$

$$y_i \ge 0, \ i = \overline{1,3}.$$

Из двух задач двойственной пары проще решить исходную, так как для решения двойственной требуется применить M - метод. Решим исходную задачу симплексным методом, получив предварительно ее симплексную модель с базисными балансовыми переменными x_4, x_5, x_6:

$$z - 50x_1 - 20x_2 - 40x_3 = 0 \to \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad = 8,$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 \qquad = 7,$$

$$3x_1 + x_2 + 6x_3 \qquad\qquad + x_6 = 9,$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,6}.$$

Решение задачи приведено в таблице 12.

На втором шаге получено оптимальное решение исходной задачи:

$$x^* = (2;\ 3;\ 0);\ \max z = z^* = 160.$$

Решение двойственной задачи выписывается из индексной строки 2-го шага таблицы Гаусса из столбцов базисных переменных x_4, x_5, x_6 нулевой итерации:

$$y^* = (0;\ 10;\ 10);\ \min T = T^* = 160.$$

Таблица 12

Решение двойственной задачи

Номер шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	α
0	1	1	1	1	0	0	8	8
	2	1	2	0	1	0	7	$\overset{\min}{7\leftarrow}$
	3	1	6	0	0	1	9	9
	-50	-20	-40	0	0	0	0	-
1	-1	0	-1	1	-1	0	1	∞
	2	1	2	0	1	0	7	7/2
	1	0	4	0	-1	1	2	$\overset{\min}{2\leftarrow}$
	-10	0	0	0	20	0	140	-
2	0	0	3	1	-2	1	3	
	0	1	-6	0	3	-2	3	
	1	0	4	0	-1	1	2	
	0	0	40	0	10	10	160	-

Двойственные оценки показывают, что первый ресурс не является дефицитным ($y_1^* = 0$). Действительно, при оптимальном плане он израсходован не полностью:

$$x_1^* + x_2^* + x_3^* = 5 < 8,$$

а значение балансовой переменной этого уравнения x_4^*=3 показывает его излишек.

Поскольку $y_2^* = 10 > 0$ и $y_3^* = 10 > 0$, то и второй, и третий ресурс являются дефицитными. Они при оптимальном плане производства полностью исчерпаны:

$$2x_1^* + x_2^* + x_3^* = 4 + 3 = 7,$$

$$3x_1^* + x_2^* + x_3^* = 6 + 3 = 9.$$

Так как $y_2^* = y_3^* = 10$, то увеличение объема обоих ресурсов на единицу своего измерения приводит к росту максимальной прибыли на 10 единиц, т.е. они одинаково эффективно влияют на увеличение прибыли.

Для построения многогранника устойчивости выпишем матрицу D^{-1} из второй итерации табл. 12, которая находится в столбцах базисных переменных x_4, x_5, x_6 нулевой итерации:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной записи многогранник устойчивости задается неравенством:

$$D^{-1}(b + \Delta b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 + \Delta b_1 \\ 7 + \Delta b_2 \\ 9 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

или, после умножения матриц

$$\begin{pmatrix} (8 + \Delta b_1) - 2(7 + \Delta b_2) + (9 + \Delta b_3) \\ 3(7 + \Delta b_2) - 2(9 + \Delta b_3) \\ -(7 + \Delta b_2) + (9 + \Delta b_3) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Расписывая полученное векторное неравенство для каждой координаты отдельно, после несложных преобразований получаем многогранник устойчивости двойственных оценок задачи в пространстве приращений ресурсов Δb_1, Δb_2, Δb_3:

$$\begin{cases} \Delta b_1 - 2\Delta b_2 + \Delta b_3 \geq -3, \\ 3\Delta b_2 - 2\Delta b_3 \geq -3, \\ -\Delta b_2 + \Delta b_3 \geq -2. \end{cases}$$

Проверим, сохраняется ли прежнее оптимальное решение двойственной задачи при $b_1 = 10$, $b_2 = 8$, $b_3 = 10$, т.е. при $\Delta b_1 = 2$, $\Delta b_2 = \Delta b_3 = 1$.

Подставим эти значения приращений Δb_i в неравенства:

$$2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 > -3,$$

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 > -3,$$

$$-1 + 1 = 0 > -2.$$

Все неравенства выполняются и при указанных объемах ресурсов $b_1 = 10$, $b_2 = 8$, $b_3 = 10$ получается прежнее решение двойственной задачи.

Нетрудно убедиться, что при $\Delta b_1 = 1$, $\Delta b_2 = 4$, $\Delta b_3 = 1$ не все неравенства выполняются и при объемах $b_1 = 9$, $b_2 = 11$, $b_3 = 10$ двойственные оценки будут другими.

Получим интервалы устойчивости по каждому ресурсу.

1. Пусть $\Delta b_2 = \Delta b_3 = 0$. После подстановки этих значений в имеем

$$\Delta b_3 \geq -3.$$

Таким образом, любое приращение $\Delta b_3 \geq -3$ не изменяет решения двойственной задачи y^*, если другие ресурсы неизменны. Отсюда получается интервал устойчивости для первого ресурса

$$5 \leq b_1 \leq \infty.$$

2. Положим $\Delta b_1 = \Delta b_3 = 0$ в неравенства (14). Тогда

$$\begin{cases} -2\Delta b_2 \geq -3, \\ 3\Delta b_2 \geq -3, \\ -\Delta b_2 \geq -2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases}\Delta b_2 \le 3/2,\\ \Delta b_2 \ge -1,\\ \Delta b_2 \le 2.\end{cases}$$

Окончательно находим интервал изменения Δb_2:

$$-1 \le \Delta b_2 \le 3/2,$$

а затем интервал устойчивости по второму ресурсу:

$$6 \le b_2 \le 17/2.$$

3. При $\Delta b_1 = \Delta b_2 = 0$ получаем

$$\begin{cases}\Delta b_3 \ge -3,\\ -2\Delta b_3 \ge -3,\\ \Delta b_3 \ge -2\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\Delta b_3 \ge -3,\\ \Delta b_3 \le 3/2,\\ \Delta b_3 \ge -2.\end{cases}$$

Отсюда $-2 \le \Delta b_3 \le 3/2$ и определяется интервал устойчивости по третьему ресурсу:

$$7 \le b_3 \le 21/2.$$

В задачах **56-60** составить двойственные задачи.

56. $z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \to \max$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 5,$$
$$x + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 4,$$
$$3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \ge 10,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

57. $z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

58. $z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

59. $z = -2x_1 + x_3 - 3x_4 \to \min$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 3,$$
$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 \qquad + 2x_5 = 8,$$
$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \le 10,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 2,$$
$$2x_2 - x_3 + 3x_4 \ge 4,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

60. $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 \to \max$

$$2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 5,$$
$$x_1 \qquad + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 8,$$
$$x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 \le 4,$$
$$x_2 \qquad - 3x_4 + 2x_5 \ge 2,$$
$$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

В задачах **61-65** получить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

61. $z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4,$$
$$x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6,$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

62. $z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 5,$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \ge 8,$$
$$2x_1 - x_2 - 2x_3 \ge 4,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

63. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 6,$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2,$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \quad \ge 2,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

64. $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \qquad = 10,$$
$$x_1 \qquad + x_3 + x_4 = 7,$$
$$3x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 = 4,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

65. $z = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$

$$x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5,$$
$$x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

В задачах **66-70** составить двойственную задачу, найти оптимальные решения обеих задач, выполнить качественный и количественный анализ ресурсов, построить многогранник и интервалы устойчивости двойственных оценок.

66. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$3x_1 + 8x_2 \le 240,$$
$$4x_1 + 5x_2 \le 200,$$
$$9x_1 + 4x_2 \le 360,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}.$$

67. $z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10,$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

68. $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 15,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 7,$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 12,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

69. $z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$

$$3x_1 + 2x_2 \le 10,$$
$$x_1 + 4x_2 \le 11,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

70. $z = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \to \max$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 100,$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 150,$$
$$5x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 180,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

1.2.5 Целочисленное программирование. Метод Гомори

По смыслу многих экономических задач переменные выражают физически неделимые объекты и поэтому могут принимать только натуральные значения. При формализации таких задач на переменные дополнительно накладывается условие целочисленности.

Математическая постановка полностью целочисленной задачи ЛП формулируется следующим образом: найти максимальное (минимальное) значение функции

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0,$$

$$j = \overline{1,n},$$

$$x_j, \; j = \overline{1,n} \text{ - целые.}$$

Простое округление до целых чисел нецелочисленного решения задачи ЛП может не дать оптимального решения целочисленной задачи ЛП (ЦЗЛП).

Наиболее распространенным методом решения ЦЗЛП является метод Гомори, относящийся к методам отсечения и основанный на симплексном методе.

Сущность методов отсечения заключается в том, что сначала задача ЛП решается без условий целочисленности. Если полученный план не является целочисленным, то к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

- является линейным;
- отсекает найденный оптимальный нецелочисленный план;
- не отсекает ни одного целочисленного плана.

Если дополнительное ограничение обладает указанными свойствами, то его называют *правильным отсечением*.

Вспомним, что целой частью $[a]$ числа a называют наибольшее целое число, не превышающее a. Дробной частью $\{a\}$ числа a называют разность между числом a и его целой частью, т.е. $a = [a] + \{a\}$.

Заметим, что если $a<0$, например, $a=-2\frac{1}{3}$, то $[a]=-3$ и дробная часть $\{a\}= -2\frac{1}{3}-(-3)=\frac{2}{3}$.

Для решения задачи (15)-(18) методом Гомори используется следующий алгоритм:

1. Симплексным методом решают задачу (15)-(17) без условий целочисленности (18). Если все компоненты оптимального плана являются целыми числами, то и задача ЦЗЛП решена. Если задача (15)-(17) неразрешима, то и ЦЗЛП также неразрешима.

2. Если среди компонент оптимального плана имеются нецелые значения, то выбирается базисная компонента с наибольшей дробной частью. Пусть в оптимальном решении это будет переменная x_l.

Поскольку она базисная, то она выражается через свободные переменные

$x_l = b_l' - \sum a_{lj}' x_j$,

где суммирование выполняется по множеству свободных переменных последнего шага таблицы Гаусса.

Доказано, что неравенство

$$\{b_l'\} - \sum \{a_{lj}'\} \cdot x_j \le 0$$

является правильным отсечением.

3. Неравенство введения дополнительной неотрицательной балансовой переменной x_{n+1} преобразуется в равносильное равенство

$$\{b_l'\} - \sum \{a_{lj}'\} \cdot x_j + x_{n+1} = 0$$

и включается в систему ограничений ($x_{n+1} \ge 0$).

4. Полученную расширенную задачу ЛП решают симплексным методом. Если вновь получается нецелочисленное решение, то строится новое правильное отсечение и т. д.

Для сокращения объема вычислений удобнее добавлять дополнительное ограничение в систему, полученную на последнем шаге таблицы Гаусса.

ЦЗЛП не имеет целочисленного решения, если оптимальное решение содержит свободные слагаемые с дробной частью, а все коэффициенты при неизвестных соответствующего уравнения являются целыми числами.

Пример 15. Решить задачу ЛП

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$3x \ \ + 5x_2 \le 60,$$

$$3x_1 + 4x_2 \le 34,$$

$$x_2 \le 8,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

x_1, x_2 - целые числа.

Решение. Решим задачу без учета целочисленности переменных. Добавив неотрицательные балансовые переменные x_3, x_4, x_5, приведем ее к симплексной модели:

$$z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \to \max$$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = 60,$$

$$3x_1 + 4x_2 \quad + x_4 \quad = 34,$$

$$x_2 \qquad + x_5 = 8,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Все вычисления приведены в таблице 13.

Таблица 13

Вычисления по задаче

Номер шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	α
0	3	5	1	0	0	60	12
	3	4	0	1	0	34	9/2
	0	1	0	0	1	8	$8\overset{\min}{\leftarrow}$
	-2	-3	0	0	0	0	-
1	3	0	1	0	-5	20	20/3
	3	0	0	1	-4	2	$2/3\overset{\min}{\leftarrow}$
	0	1	0	0	1	8	∞
	-2	0	0	0	3	24	-
2	0	0	1	-1	-1	18	
	1	0	0	1/3	-4/3	2/3	
	0	1	0	0	1	8	
	0	0	0	2/3	1/3	76/3	-

На втором шаге получено оптимальное нецелочисленное решение

$$x^* = (2/3;\ 8;\ 18;\ 0;\ 0;);\quad z^* = 76/3.$$

Так как в нем единственная нецелочисленная базисная переменная $x_1^* = 2/3$, то по ней и строим правильное отсечение.

Запишем уравнение, выражающее базисную переменную x_1 на 2-м шаге через свободные переменные (вторая строка таблицы):

$$x_1 = 2/3 - 1/3x_4 + 4/5x_5.$$

По этому уравнению составляем ограничение

$$\{2/3\} - \{1/3\}\,x_4 - \{-4/3\}\,x_5 \le 0.$$

Обратим внимание на то, что дробная часть свободного члена берется с тем же знаком, какой он имеет в уравнении, а дробные части коэффициентов при свободных переменных x_4, x_5 - с противоположными знаками.

Найдем дробные части

$$\{2/3\}=\{0+2/3\}=2/3;\ \{1/3\}=\{0+1/3\}=1/3;\ \{-4/3\}=\{-2+2/3\}=2/3.$$

Тогда неравенство правильного отсечения запишется

$$2/3-1/3x_4-2/3x_5\le 0$$

или с дополнительной неотрицательной переменной x_6

$$-1/3x_4-2/3x_5+x_6=-2/3.$$

Присоединяя это дополнительное ограничение к ограничениям последнего шага таблицы Гаусса и записывая выражение для целевой функции последнего шага, получим новую задачу ЛП:

$$z+2/3x_4+1/3x_5=76/3\to\max$$

$$x_1+1/3x_4-4/3x_5=2/3,$$

$$x_2\quad+x_5=8,$$

$$x_3-x_4-x_5=18,$$

$$-1/3x_4-2/3x_5+x_6=-2/3,$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,6}.$$

Отметим одну особенность: в уравнении, разрешенном относительно переменной x_6, свободный член является отрицательным (-2/3), т.е. при равенстве свободных переменных x_4, x_5 нулю получается недопустимое решение задачи ЛП (x_6=-2/3<0). Так будет всегда при правильном отсечении.

Решим задачу симплексным методом без использования на нулевом шаге столбца допустимых отношений α.

Таблица 14

Номер шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	α
0	1	0	0	1/3	-4/3	0	2/3	
	0	1	0	0	1	0	8	
	0	0	1	-1	-1	0	18	
	0	0	0	-1/3	-2/3	1	-2/3	
	0	0	0	2/3	1/3	0	76/3	-

Чтобы вернуться к допустимым решениям задачи вначале выберем разрешающую строку с отрицательным свободным членом (-2/3) и далее необходимо перевести в число базисных такую переменную, при которой стоят отрицательные коэффициенты в строке, содержащей отрицательный свободный член (-2/3).

Этими переменными являются x_4, x_5. Переведем в базисные переменную x_5 с наименьшим отрицательным коэффициентом -2/3, а базисная переменная x_6 станет на следующем шаге свободной.

Установив разрешающий элемент a_{45}=-2/3, далее выполним обычную итерацию метода последовательного исключения неизвестных:

Таблица 14 (продолжение)

Номер шага	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	α
1	1	0	0	1	0	-2	2	
	0	1	0	-1/2	0	3/2	7	
	0	0	1	-1/2	0	-3/2	19	
	0	0	0	1/2	1	-3/2	1	

	0	0	0	5/6	0	1/2	25	-

В результате на первом шаге получено оптимальное решение расширенной задачи

$$x^*=(2;\ 7;\ 19;\ 0;\ 1;\ 0),\ z^*=25.$$

Решение является целочисленным, и, отсекая значения балансовых переменных, запишем решение исходной задачи:

$$x^*=(2;\ 7),\ z^*=25.$$

В задачах **71-76** найти решение в целых числах.

71. $z = 2x_1 + 2x_2 \to \max$

$$2x_1 - x_2 \le 7,$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 3,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$
x_1, x_2 - целые.

72. $z = 5 + x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

$$x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22,$$
$$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,4},$$
$x_j,\ j = \overline{1,4}$ - целые.

73. $z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$

$$x_1 + x_2 - x_3 \le 4,$$
$$x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \underline{1,3},$$
$x_j,\ j = \overline{1,3}$ - целые.

74. $z = x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 3x_4 \to \max$

$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 15x_4 = 6,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4},$$
$x_j,\ j = \overline{1,4}$ - целые.

75. $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$

$$3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4,$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 17,$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 7,$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5},$$
$x_j,\ j = \overline{1,5}$ - целые.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грицюк С.Н. Математические методы и модели в экономике: учебник. – Рн/Д.: Феникс, 2007.
2. Громенко В. В. Математическая экономика: Учебно-практическое пособие, руководство по изучению дисциплины, учебная программа по дисциплине / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. – М.:МЭСИ, 2004.
3. Красс М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник. – М.:ФиС, 2007.
4. Попов А.М. Экономико-математические методы и модели: учеб. Для прикладного бакалавриата. – М.:Изд. Юрайт, 2014.
5. Стрикалов А.И., Печенежская И.А. Экономико-математические методы и модели: пособие по реш.задач. – Рн/Д.: Феникс, 2008.
6. Сурмин Ю. П. Теория систем и системный анализ: учебник для вузов / Ю. П. Сурмин. – М.: МАУП, 2003.
7. Хуснутдинов Р.Ш. Экономико-математические методы и модели [Электронный ресурс]: Учебное пособие. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. (http://znanium.com/bookread2.php?book=430259)
8. Юдин С.В. Математика и экономико-математические модели [Электронный ресурс]: Учебник. - М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2016. (http://znanium.com/bookread2.php?book=491811)