КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Кафедра дифференциальных уравнений

И.Р. КАЮМОВ

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Конспект лекций

Казань – 2015

УДК 517.54
ББК 22.161.5

Принято на заседании кафедры дифференциальных уравнений
Протокол № 2 от 21 октября 2015 года

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дифференциальных уравнений КФУ **И.А. Бикчантаев;**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дифференциальных уравнений КФУ **Ю.В. Обносов**

Каюмов И.Р.
Банаховы пространства аналитических функций / И.Р. Каюмов. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 63 с.

Курс посвящен изучению различных пространств функций аналитических в единичном круге, в частности, пространств Харди и весьма важного в современных исследованиях пространства Блоха.

Граничное поведение конформных отображений играет весьма существенную роль в современных исследованиях по комплексному анализу и математической физике. Для описания граничного поведения конформных отображений хорошо подходит аппарат гармонической меры, а также теоремы Поммеренке и Макарова о поведении спектра интегральных средних. Эти результаты и планируется изложить на лекциях по данной теме.

Содержание

1 Элементы функционального анализа

Аннотация: В данной теме даются сведения из функционального анализа

Ключевые слова: Гильбертовы пространства, банаховы пространства, ряды Фурье.

Методические рекомендации по изучению темы.

Вначале необходимо изучить лекционный материал с определениями основных понятий. После этого следует ответить на контрольные вопросы. Ответы нужно оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю. При решении задач, представленных в теме, необходимо опираться на изученный лекционный материал. Решение задач необходимо оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю.

Источники информации:

Основная литература:

1) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989, 623 с.

2) Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств, М.: Мир, 1971, 312 с.

Глоссарий по теме 1

Определение 1. *Пусть V – векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пространство V называется нормированным векторным пространством, если существует функция $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ такая, что*

1) $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \to f = 0$;

2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in V$;

3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ для любых $f, g \in V$.

Отметим, что любое нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой $\rho(f, g) = \|f - g\|$.

Определение 2. *Полное нормированное пространство называется Банаховым.*

Определение 3. *Пусть V – векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пространство V называется унитарным пространством, если существует функция $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ такая, что*

1) $(f,f) \geq 0$, $(f,f) = 0 \to f = 0$;

2) $(\lambda_1 f_1 + \mu f_2, g) = \lambda_1(f_1, g) + \lambda_2(f_2, g)$ для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2, g \in V$;

3) $(f,g) = \overline{(g,f)}$ для любых $f, g \in V$.

Отметим, что любое унитарное пространство является нормированным пространством с нормой $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Определение 4. *Полное унитарное пространство называется Гильбертовым.*

Сначала определим меру Лебега на открытых итервалах таким образом:

$$m(a,b) = b - a.$$

Пусть A – открытое ограниченное множество из $\mathbb{R}$. Тогда существует конечное или счетное число непересекающихся интервалов (a_j, b_j) таких, что

$$A = \cup_j (a_j, b_j).$$

Положим

$$m(A) = \sum_j m(a_j, b_j).$$

Пусть B – замкнутое множество на прямой. Тогда найдется открытое множество A, содержащее B. Положим

$$m(B) = m(A) - m(A \setminus B).$$

Таким образом, нами определена мера Лебега на открытых и замкнутых множествах. Пусть теперь Ω – произвольное множество на прямой $\mathbb{R}$. Внешней мерой Лебега множества Ω называется величина

$$m^*(\Omega) = \inf_{A \supset \Omega} m(A),$$

где инфимум ищется среди всех открытых множеств A содержащих в себе Ω.

Внутренней мерой Лебега множества Ω называется величина

$$m_*(\Omega) = \sup_{B \subset \Omega} m(B),$$

где супремум ищется среди всех замкнутых множеств B, содержащихся в Ω.

Определение 5. *Множество Ω называется измеримым по Лебегу, если его внутренняя и внешняя меры совпадают, т.е. $m^*(\Omega) = m_*(\Omega)$.*

Напомним, что множество Ω называется борелевским (измеремым по Борелю), если оно может быть получено из открытых множеств путем не более чем счетного применения операций объединения и пересечения.

По построению меры m любое борелевское множество измеримо по Лебегу.

Важным свойством меры Лебега является счетная аддитивность: если $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, где множества A_j попарно не пересекаются, то $m(A) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j)$.

Определение 6. *Функция f называется измеримой, если прообраз любого измеримого множества измерим по Лебегу.*

Определение 7. *Пусть A – измеримое множество конечной меры на прямой. Измеримая функция f называется интегрируемой по Лебегу на множестве A, если существует последовательность простых интегрируемых на A функций f_n, сходящаяся равномерно на множестве A. Итегралом Лебега называется предел*

$$\int_A f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n(x)dx.$$

Напомним хорошо известные факты теории функций. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция Φ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, которую будем обозначать $V_a^b[\Phi]$.

Определение 8. *Интегралом Римана – Стилтьеса (или просто интегралом Стилтьеса) называется предел*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1}))$$

по всевозможным разбиениям отрезка $[a,b]$, *таким, что*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k\le n}(x_k - x_{k-1}) = 0,$$

причем $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. *Этот предел в дальнейшем будем обозначать символом*

$$\int\limits_a^b f(x)d\Phi(x).$$

Определение 9. *Предположим, что* 2π *– периодическая функция* $f \in L_1[-\pi,\pi]$. *Рядом Фурье функции* f *называется формальный ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

Следующая теорема показывает, что сходимость измеримых функций почти всюду весьма близка к равномерной сходимости.

Теорема Егорова. *Пусть* A *– множество конечной меры. Предположим, что последовательность измеримых функций* $f_n(x)$ *сходится почти всюду к функции* $f(x)$, *т.е.* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *для почти всех* $x \in A$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *найдется измеримое множество* $A_\delta \subset A$ *такое, что* $m(A_\delta) > m(A) - \delta$ *и последовательность* $f_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно на* A_δ.

Эта теорема является основой для исследования предельного перехода под знаком интеграла.

Введем теперь понятие интеграла Лебега для простых функций. Напомним, что функция $f(x)$, принимающая не более чем счетное число значений называется простой, если все множества

$$A_n = \{x : f(x) = y_n\}$$

измеримы по Лебегу. В силу определения, простая функция обязана быть измеримой.

Пусть A – измеримое множество на прямой, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – простая функция. Определим интеграл Лебега для простой функции так:

$$\int_A f dx = \sum_n y_n m(A_n \cap A).$$

Отметим важнейшие свойства интеграла Лебега:

1) линейность:

$$\int_A (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_A f(x) dx + \beta \int_A g(x) dx;$$

2) аддитивность: если $m(A \cap B) = 0$, то

$$\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx;$$

3) абсолютная непрерывность: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$E \subset A,\ m(E) < \delta \Rightarrow \left| \int_E f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Очень полезной является теорема о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема Лебега. *Если последовательность интегрируемых функций* $\{f_n\}$ *на* A *сходится к* f *и для всех* n *выполнено неравенство* $|f_n(x)| \leq$

$g(x)$, где функция g интегрируема на A, то функция f интегрируема на A и

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

Из этой теоремы следует, что ограниченная измеримая на множестве конечной меры функция интегрируема по Лебегу.

Теоремы Хелли

Напомним хорошо известные факты теории функций. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция Φ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, которую будем обозначать $V_a^b[\Phi]$.

Интегралом Римана – Стилтьеса (или просто интегралом Стилтьеса) называется предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})) \tag{1}$$

по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$, таким, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k\le n}(x_k - x_{k-1}) = 0,$$

причем $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Хорошо известно, что предел (1) существует и не зависит от выбора разбиения и точек ζ_k. Этот предел в дальнейшем будем обозначать символом

$$\int\limits_a^b f(x)d\Phi(x).$$

Имеет место

Первая теорема Хелли. *Пусть функции $\Phi_n(x)$ имеют ограниченное изменение на отрезке $[a, b]$ и для любого x существует предел $\Phi(x) = \lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)$, причем*

$$\sup_n V_a^b[\Phi_n] < \infty.$$

Тогда функция $\Phi(x)$ также имеет ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$, и для любой функции $f \in C[a,b]$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)d\Phi_n(x) = \int\limits_a^b f(x)d\Phi(x).$$

Для приложений первой теоремы Хелли обычно используется

Вторая теорема Хелли. *Пусть M – некоторое множество функций ограниченной вариации на $[a,b]$, причем*

$$\sup_{\Phi\in M}\left(V_a^b[\Phi] + \sup_{x\in[a,b]}|\Phi(x)|\right) < \infty.$$

Тогда найдется последовательность различных функций $\Phi_n \in M$, такая, что существует предел $\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)$ в каждой точке $x \in [a,b]$.

Ряды Фурье и сходимость по Чезаро

Теорема Фейера. *Ряд Фурье функции f из $L_1[-\pi,\pi]$ сходится по Чезаро к функции $f(t)$ в метрике пространства $L_1[-\pi,\pi]$.*

Много приложений имеет

Теорема Рисса – Фишера. *Предположим, что последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 < +\infty.$$

Тогда найдется функция f из $L_2[-\pi,\pi]$ такая, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Причем ряд Фурье функции f сходится к ней самой в метрике пространства $L_2[-\pi,\pi]$, т.е.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)-S_n(t)|^2dt \to 0,\ n\to\infty,$$

где
$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$
– частичные суммы ряда Фурье.

Также очень важным фактом является теорема Л. Карлесона о том, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi, \pi]$ сходится почти всюду.

Контрольные вопросы по теме 1

1. Пусть V – унитарное пространство над полем $\mathbb{R}$. Доказать, что
$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

2. Пусть V – нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$ с нормой, удовлетворяющей (**??**). Доказать, что V – унитарное пространство со скалярным произведением
$$(f, g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2).$$

3. Доказать теорему Фейера для непрерывных 2π– периодических функций: ряд Фурье функции f из $C[-\pi, \pi]$ сходится по Чезаро к функции f в метрике пространства $C[-\pi, \pi]$.

2 Гармонические функции и их свойства

Аннотация: В данной теме описываются основные свойства гармонических функций

Ключевые слова: гармонические функции, интеграл Лебега-Стилтьеса.

Методические рекомендации по изучению темы.

Вначале необходимо изучить лекционный материал с определениями основных понятий. После этого следует ответить на контрольные вопросы. Ответы нужно оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю. При решении задач, представленных в теме, необходимо опираться на изученный лекционный материал. Решение задач необходимо оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю.

Источники информации:

Основная литература: Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. - 628 с.

Дополнительная литература: Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950, 336 с.

Глоссарий по теме 2

Определение 1. *Функция $u(x,y)$, заданная в области Ω, называется гармонической в этой области, если $u \in C^2[\Omega]$ и выполняется равенство*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega.$$

Определение 2. *Принцип максимума для гармонических функций утверждает, что если*

$$\sup_{z\in\Omega} u(z) = u(z_0)$$

для некоторой точки $z_0 \in \Omega$, то $u \equiv const$ в Ω.

Задача Дирихле имеет единственное решение, которое дается формулой

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\varphi(t)dt, \quad r<1. \tag{2}$$

Определение 3. *Формула (2) называется формулой Пуассона, а выражение*

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}$$

ядром Пуассона, которое, по–существу, является нормальной производной функцией Грина для круга.

Определение 4. *Неравенство Гарнака:*

$$u(z_0)\frac{R-r}{R+r} \le u(z) \le u(z_0)\frac{R+r}{R-r},$$

где функция и гармонична в круге $|z|<R$, $|z-z_0|<r$.

Определение 5. *Говорят, что функция* $g(z)$, *определенная в* $\mathbb{D}$, *имеет угловой (некасательный) предел в точке* $e^{i\theta}$, *если существует предел*

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} g(z),$$

когда точка z *стремится к* $e^{i\theta}$ *некасательным образом внутри круга* D, *т. е.* $|z-e^{i\theta}|<C(1-|z|)$ *для некоторой константы* C, *не зависящей от* z.

Пусть μ – функция ограниченной вариации на $[-\pi,\pi]$. Предположим, что в точке θ_0 существует производная $\mu'(\theta_0)$. Тогда существует угловой предел $\lim_{z\to e^{i\theta_0}} u(z)$, равный $\mu'(\theta_0)$, где

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}d\mu(t), \quad r<1. \tag{3}$$

Определение 6. *Интеграл (3) понимается в смысле Римана – Стилтьеса и называется интегралом Пуассона – Стилтьеса.*

Задача Дирихле для круга $\mathbb{D}$ ставится следующим образом. Пусть дана 2π-периодическая функция $\varphi \in C[-\pi, \pi]$. Требуется найти гармоническую в $\mathbb{D}$ и непрерывную в $\overline{\mathbb{D}}$ функцию u такую, что

$$u(e^{i\theta}) := u(\cos\theta, \sin\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Справедлива

Теорема 1 *Задача Дирихле имеет единственное решение, которое дается формулой*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} \varphi(t) dt, \quad r < 1. \tag{4}$$

Формула (4) называется формулой Пуассона, а выражение

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)}$$

ядром Пуассона, которое, по–существу, является нормальной производной функцией Грина для круга.

Очень важным следствием этой теоремы являются **неравенства Гарнака:**

$$u(z_0)\frac{R - r}{R + r} \le u(z) \le u(z_0)\frac{R + r}{R - r},$$

где функция u гармонична в круге $|z| < R$, $|z - z_0| < r$.

Задача Дирихле может быть поставлена и для неограниченных областей. Существенное отличие заключается в том, что нужно задать поведение гармонической функции на бесконечности, например потребовать, чтобы существовал конечный предел $\lim_{z \to \infty} u(z)$.

В качестве примера, поставим задачу Дирихле для внешности единичного круга. Пусть дана 2π-периодическая функция $\varphi \in C[-\pi, \pi]$. Требуется найти гармоническую в $\mathbb{D}^-$, непрерывную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ функцию u такую, что

$$u(e^{i\theta}) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Имеет место

Теорема 2 *Внешняя задача Дирихле имеет единственное решение, которое дается формулой*

$$u(Re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-1}{1+R^2-2R\cos(\theta-t)}\varphi(t)dt, \quad R>1.$$

Интеграл Пуассона – Стилтьеса

Определение. *Говорят, что функция $g(z)$, определенная в $\mathbb{D}$, имеет угловой (некасательный) предел в точке $e^{i\theta}$, если существует предел*

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} g(z),$$

когда точка z стремится к $e^{i\theta}$ некасательным образом внутри круга D, т. е. $|z-e^{i\theta}| < C(1-|z|)$ для некоторой константы C, не зависящей от z.

Теорема 3 *Пусть μ – функция ограниченной вариации на $[-\pi,\pi]$. Предположим, что в точке θ_0 существует производная $\mu'(\theta_0)$. Тогда существует угловой предел $\lim_{z\to e^{i\theta_0}} u(z)$, равный $\mu'(\theta_0)$, где*

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}d\mu(t), \quad r<1.$$

Следствие 1. *Интеграл Пуассона – Стилтьеса (3) имеет некасательные пределы для почти всех θ.*

Доказательство. Из курса анализа известно, что любая функция ограниченной вариации почти всюду дифференцируема. Поэтому доказываемое утверждение сразу следует из теоремы 3.

Обратимся теперь к вопросу: какие гармонические функции в круге могут быть представлены в виде интеграла Пуассона – Стилтьеса? Исчерпывающий ответ на этот вопрос дает

Теорема 4 *Гармоническая в круге функция представима в виде интеграла Пуассона – Стилтьеса тогда и только тогда, когда она представима в виде разности двух неотрицательных функций, гармонических в круге* $\mathbb{D}$.

Контрольные вопросы по теме 2

1. Пусть Ω – односвязная область на плоскости с жордановой границей $\partial\Omega$. Предположим, что f – конформное (конформность = аналитичность + взаимнооднозначность) отображение этой области на круг $\mathbb{D}$. С использованием f дать явное решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u = \varphi \text{ на } \partial\Omega, \end{cases}$$

где φ – непрерывная функция на $\partial\Omega$.

2. Пусть Ω – область на плоскости. Предположим, что f – конформное отображение этой области на некоторую другую область. Доказать, что функции

$$\ln\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|, \ \ln|f'(z)|$$

гармоничны в Ω. Здесь z_0 – нуль функции f.

3. Предположим, что что функция $\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ гармонична в проколотом круге $\mathbb{D}\setminus\{0\}$. Найти вид функции φ.

4. Предположим, что функция u гармонична в области Ω. Пусть γ – гладкая замкнутая кривая, лежащая в Ω. Доказать, что

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

где s – натуральный параметр кривой γ, $\partial u/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали к кривой γ.

5. Предположим, что функция u гармонична в области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$. Предположим также, что $u \in C^1[\overline{\Omega}]$. Доказать, что

$$\int\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

где s – натуральный параметр кривой $\partial\Omega$.

6. Пусть γ – гладкая кривая, а функция μ непрерывна на ней. Доказать, что логарифмический потенциал с плотностью μ, определяемый как

$$\varphi(z) = \int_\gamma \mu(\zeta) \ln |\zeta - z| |d\zeta|,$$

является гармонической функцией вне кривой γ.

7. Найти представление в виде интеграла Пуассона – Стилтьеса для функции

$$u(z) = \Re \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

в круге $\mathbb{D}$.

3 Ограниченные аналитические функции

Аннотация: В данной теме доказывается теорема Фату, а также исследуются свойства функций из пространств Харди.

Ключевые слова: ограниченные аналитические функции, пространства Харди, произведения Бляшке.

Методические рекомендации по изучению темы.

Вначале необходимо изучить лекционный материал с определениями основных понятий. После этого следует ответить на контрольные вопросы. Ответы нужно оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю. При решении задач, представленных в теме, необходимо опираться на изученный лекционный материал. Решение задач необходимо оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю.

Источники информации:

Основная литература: Кусис П. Лекции по теории пространств Hp. М.: Мир, 1984. - 368 с.

Дополнительная литература: Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств, М. Мир, 1971, 312 с

Глоссарий по теме 3

Определение 1. *Произведением Бляшке называется функция*

$$B(z) = z^{\lambda} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z},$$

где λ *– натуральное число,* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– последовательность комплексных чисел из* $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Определение 2. *Пусть* $p > 0$. *Говорят, что аналитическая в круге* $\mathbb{D}$ *функция* f *принадлежит классу* H_p, *если*

$$\sup_{r \in (0,1)} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

В случае $p = \infty$ класс H_∞ понимается как класс аналитических и ограниченных в $\mathbb{D}$ функций.

Определение 3. *Говорят, что аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция f принадлежит классу Неванлинны N, если справедливо неравенство*

$$N(f) = \limsup_{r\to 1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty,$$

где $\ln^+ a = \max\{\ln a, 0\}$.

Простое неравенство $\ln^+ a \le a^p/p$ при $p > 0$ показывает, что $H_p \subset N$ для всех $p > 0$.

Р. Неванлинна доказал следующий факт. *Для любой функции $f \in N$ найдутся функции h и g из H_∞, такие, что $f = g/h$.* Поэтому многие свойства клсса H_∞ переносятся на классы H_p и N.

Теорема Фату

Сформулируем теперь одну из базовых теорем теории граничного поведения аналитических функций.

Теорема Фату. *Пусть функция f аналитична и ограничена в $\mathbb{D}$. Тогда для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ существует угловой предел*

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} f(z). \tag{5}$$

Теорема единственности братьев Рисс

Справедливо следующее утверждение, принадлежащее М. и Ф. Рисс.

Теорема 5 *Пусть E – множество положительной меры на отрезке $[-\pi, \pi]$. Предположим, что функции f и g аналитичны, ограничены в круге $\mathbb{D}$ и для всех $\theta \in E$ выполнено равенство*

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} g(re^{i\theta}).$$

Тогда $f \equiv g$.

Теорема 6 *Бесконечное произведение Бляшке является аналитической и ограниченной в круге функцией в том и только в том случае, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty. \qquad (6)$$

Структура класса ограниченных аналитических функций общего вида описывается следующей теоремой.

Теорема 7 *Пусть аналитическая функция f ограничена в $\mathbb{D}$. Тогда*

$$f(z)=MB(z)e^{-g(z)},$$

где $B(z)$ – произведение Бляшке, $g(z)$ – аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция, такая, что $\Re g(z)\geq 0$ для всех $z\in\mathbb{D}$, $M=\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|$.

Поскольку произведение Бляшке является ограниченной функцией, то по теореме Фату существуют угловые пределы $\lim_{z\to e^{i\theta}} B(z)$ для почти всех θ. Обозначим эти пределы как $B(e^{i\theta})$. Если произведение Бляшке конечно, то $|B(e^{i\theta})|\equiv 1$. Аналогичный результат имеет место и в случае бесконечного произведения, а именно, справедлива

Теорема 8 *Пусть $\{z_n\}$ – последовательность чисел из круга $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (6). Тогда*

$$|B(e^{i\theta})|=1$$

для почти всех θ.

Пространства Харди

Класс ограниченных в круге функций может быть расширен следующим образом.

Хотя функции из классов H_p не обязаны быть ограничены, мы включили описание свойств этих классов в эту главу, поскольку их свойства весьма близки к свойствам ограниченных аналитических функций.

Пусть вещественные числа p и q удовлетворяют неравенствам $0 < < p < q < \infty$. Из неравенства Гельдера сразу следует, что

$$H_\infty \subset H_q \subset H_p.$$

Обозначим

$$||f||_p = \sup_{r \in (0,1)} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Ниже будет показано, что $|| \cdot ||_p$ при $p \geq 1$ является нормой, а класс H_p является сепарабельным банаховым пространством. Стуктура класса H_p описывается следующей теоремой.

Теорема 9 *Пусть $f \in H_p$. Тогда*

$$f(z) = B(z)g(z),$$

где $B(z)$ – произведение Бляшке, а g – аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция, не имеющая в нем нулей, причем

$$||g||_p = ||f||_p.$$

Для классов H_p справедлива теорема Фату.

Теорема 10 *Пусть $f \in H_p$. Тогда для почти всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ существует угловой предел*

$$\lim_{z \to e^{i\theta}} f(z).$$

Угловые пределы функции $f \in H_p$ (там где они существуют) будем обозначать $f(e^{i\theta})$. Справедлива

Теорема 11 *Пусть A – множество положительной меры из $[-\pi, \pi]$ и $f \in H_p$. Тогда справедливы равенства*

$$\lim_{r \to 1} \int\limits_A |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \int\limits_A |f(e^{i\theta})|^p d\theta,$$

$$\lim_{r\to 1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0.$$

Отметим, что теорема 11 утверждает, в частности, что если $f(z)$ принадлежит H_p, то $f(e^{i\theta})$ принадлежит $L_p[-\pi,\pi]$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Теорема 12 *Пусть $p \geq 1$. Тогда H_p является сепарабельным банаховым пространством.*

Следствие 2. *Пространство H_2 изоморфно $L_2[-\pi,\pi]$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что норма $||\cdot||_2$ порождается скалярным произведением

$$(f,g) = \sup_{r\in(0,1)} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}d\theta.$$

Поэтому H_2 – сепарабельное гильбертово пространство. Следовательно, оно изоморфно $L_2[-\pi,\pi]$. Следствие 2 доказано.

В.И. Смирновым доказана

Теорема 13 *Пусть f – аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция, имеющая положительную вещественную часть. Тогда $f \in H_p$ для любого $p \in (0,1)$.*

Контрольные вопросы по теме 3

1. Доказать, что любая ограниченная гармоническая функция в круге $\mathbb{D}$ представима в виде интеграла Пуассона:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}u(e^{it})dt, \quad r<1,$$

т. е., что функция $\mu(t)$ в соответсвующем представление функции u в виде интеграла Пуассона – Стилтьеса является абсолютно непрерывной.

2. Показать, что гармоническая в круге $\mathbb{D}$ функция u представима в виде разности двух положительных гармонических функций тогда и только тогда, когда

$$\sup_{r\in[0,1)} \int_0^{2\pi} |u(re^{it})|dt < +\infty.$$

Основываясь на этом результате, построить пример гармонической в круге $\mathbb{D}$ функции, которая не представима в виде интеграла Пуассона – Стилтьеса.

3. Доказать теорему Фату для функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$, область значений которых лежит в некоторой полуплоскости.

4. Привести пример аналитической в круге $\mathbb{D}$ функции f, для которой теорема Фату не верна.

5. Доказать, что для любой функции f, аналитической в круге $\mathbb{D}$, средние

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \text{ возрастают по } r.$$

4 Конформные отображения

Аннотация: В данной теме исследуются различные свойства конформных отображений.

Ключевые слова: конформные отображения, гармоническая мера, теорема Риссов - Привалова.

Методические рекомендации по изучению темы.

Вначале необходимо изучить лекционный материал с определениями основных понятий. После этого следует ответить на контрольные вопросы. Ответы нужно оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю. При решении задач, представленных в теме, необходимо опираться на изученный лекционный материал. Решение задач необходимо оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю.

Источники информации:

Основная литература: 1) Garnett J.B., Marshall D.E. Harmonic measure, Cambridge University Press, 2005, 571 pp.

2) Pommerenke Ch. Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

3)Авхадиев Ф.Г. Введение в геометрическую теорию функций. Учебное пособие. Казань, 2012, 127 с.

Дополнительная литература: Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. - 628 с.

Глоссарий по теме 4

Определение 1. *Говорят, что аналитическая в круге $\mathbb{D}$ функция f принадлежит классу Блоха $\mathbb{B}$, если выполняется неравенство*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

Определение 2. *Пусть f_n – последовательность функций, определенных в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Говорят, что эта последователь-*

ность сходится к функции f локально равномерно в Ω, если последовательность f_n сходится равномерно к f на любом компакте $K \subset \Omega$.

Определение 3. *Пусть M – некоторое множество функций, заданных на области Ω. Множество M называется нормальным, если из любой последовательности функций из M можно выделить сходящуюся локально равномерно в Ω подпоследовательность.*

Определение 4. *Граница области $\partial\Omega$ называется локально связной в точке $z \in \partial\Omega$, если для любой последовательности точек $z_n \in \partial\Omega$, сходящейся к z, найдется связное множество $K_n \subset \partial\Omega$, содержащее z и z_n, такое, что diam $K_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Определение 5. *Граница области $\partial\Omega$ называется локально связной, если она локальна связна в каждой своей точке.*

Класс Блоха

Другим важным (и более сложным) обобщением класса H_∞ является класс функций Блоха.

Важность класса Блоха заключается в том, что логарифм производной конформного отображения круга на односвязную область на плоскости принадлежит классу Блоха. Мы докажем этот факт ниже.

Теорема 14 *$H_\infty \subset \mathbb{B}$.*

Интересно отметить, что ни один класс H_p не вкладывается в $\mathbb{B}$ (это следует из того, что функция $(1-z)^{-1/(2p)}$ принадлежит H_p, но не принадлежит $\mathbb{B}$).

Теорема 15 *Класс $\mathbb{B}$ является несепарабельным банаховым пространством с нормой*

$$||f||_{\mathbb{B}} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)|.$$

Неравенство показывает, что класс Блоха не слишком "далек" от класса ограниченных аналитических функций. Однако имеется существенная разница в граничном поведении, заключающаяся в том, что теорема Фату для функций класса Блоха неверна. Имеет место теорема, доказанная Поммеренке.

Теорема 16 *Пусть* $f \in \mathbb{B}$. *Предположим, что для почти всех* $\theta \in [-\pi, \pi]$ *существуют угловые пределы* $\lim_{z \to e^{i\theta}} f(z)$. *Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0,$$

где a_n *– тейлоровские коэффициенты функции* f.

Теорема Римана о конформном отображении

Нам понадобится одна классическая теорема из стандартного курса ТФКП.

Теорема Вейерштрасса. *Предположим, что последовательность аналитических функций* f_n *сходится локально равномерно к функции* f *в некоторой области* Ω. *Тогда функция* f *является аналитической в* Ω *и последовательность* f_n' *сходится к* f' *локально равномерно в* Ω.

Теорема Гурвица. *Предположим, что последовательность однолистных и аналитичных в* Ω *функций* f_n *сходится локально равномерно к непостоянной функции* f. *Тогда функция* f *также однолистна в* Ω.

Важным понятием в теории конформных отображений является принцип компактности. Прежде чем его сформулировать и доказать, приведем лемму.

Лемма 1. *Предположим, что семейство функций* M *локально равномерно ограничено в области* Ω, *т.е. для любого компакта* $K \subset \Omega$ *существует* $C(K, \Omega) < \infty$, *такая, что для любой функции* $f \in M$ *и любого* $z \in K$ *выполнено неравенство* $|f(z)| \leq C(K, \Omega)$.

Тогда M *равностепенно непрерывно на любом компакте* $K \subset \Omega$.

Следующая теорема называется принципом компактности Монтеля.

Теорема 17 *Предположим, что семейство функций M локально равномерно ограничено в области Ω. Тогда M нормально.*

Теорема Римана о конформном отображении. *Предположим, что Ω – односвязная область, имеющая более одной граничной точки и $z_0 \in \Omega$. Тогда существует единственное конформное отображение f области Ω на круг $\mathbb{D}$, удовлетворяющее условиям $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.*

Теорема Каратеодори о граничном соответствии

В предыдущем параграфе мы доказали, что любую односвязную область Ω, отличную от плоскости, можно конформно отобразить на круг $\mathbb{D}$. Отсюда следует, что круг также можно отобразить на односвязную область Ω. Обозначим такое отображение через f. Спрашивается, можно ли f непрерывно продолжить в $\overline{\mathbb{D}}$? Оказывается ответ, в отличие от теоремы Римана, зависит от свойств границы области Ω.

Теорема Каратеодори. *Пусть f – конформное отображение $\mathbb{D}$ на односвязную область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Отображение f может быть продолжено до непрерывного отображения в $\overline{\mathbb{D}}$ тогда и только тогда, когда граница области $\partial\Omega$ локально связна.*

Теорема площадей и ее следствия

Введем определение двух основных классов теории однолистных функций.

Класс S состоит из однолистных и аналитических в круге $\mathbb{D}$ функций, таких, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Под однолистностью функции понимается ее инъективность.

В прикладных исследованиях важную роль играет класс Σ, который определяется как множество функций аналитических и однолистных в области $\mathbb{D}^- = \{|\zeta| > 1\}$ и имеющих разложение вида $f(\zeta) = \zeta + b_0 + b_1/\zeta + \dots$

Сформулируем теперь один результат носящий фундаментальный характер, принадлежащий Гронуоллу.

Теорема площадей. *Предположим, что* $f \in \Sigma$ *и*
$f(\zeta) = \zeta + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k}$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|^2 \le 1,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\overline{f(\mathbb{D}^-)} = \mathbb{C}$.

Доказательство. Зафиксируем число $\rho > 1$, рассмотрим кривую γ

$$\gamma(t) = f(\rho e^{it}), \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Через $S(\rho)$ обозначим площадь внутренности кривой γ. В силу формулы Грина

$$S(\rho) = \int_{\gamma} xdy - ydx = \Im \int_{\gamma} \overline{z} dz = \Im \int_0^{2\pi} i\rho e^{it} \overline{f(\rho e^{it})} f'(\rho e^{it}) dt =$$

$$= \Re \int_0^{2\pi} (\rho e^{-it} + \overline{b_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k} e^{ikt} \rho^{-k})(\rho e^{it} - \sum_{k=1}^{\infty} k b_k e^{-ikt} \rho^{-k}) dt.$$

Раскрывая скобки под интегралом и интегрируя почленно (эту операцию можно делать, поскольку оба ряда под интегралом сходятся абсолютно и равномерно по t), получаем, что

$$S(\rho) = \rho^2 - \sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|^2 \rho^{-2k}.$$

Поскольку функция f однолистна, то $S(\rho) \ge 0$. Теперь предельный переход при $\rho \to 1$ доказывает теорему.

Теорема площадей относится к немногочисленным утверждениям современного анализа, про которые можно сказать, что они эффектны и эффективны одновременно. Она послужила отправной точкой исследований, приведших к замечательным результатам. Сформулируем и докажем несколько таких теорем.

Теорема 18 *Предположим, что* $f = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in S$. *Тогда* $|a_2| \leq 2$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда* $f(z) = z/(1 - e^{i\alpha} z)^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема 18 впервые была доказана крупным немецким математиком Л. Бибербахом в 1916 году, который сформулировал красивую гипотезу: $|a_n| \leq n$ для всех функций из класса S. Ценой огромных усилий не одного десятка выдающихся математиков эта гипотеза была доказана лишь в 1985 году. Завершающее многолетние исследования доказательство принадлежит Л. де Бранжу. Отметим также серьезный вклад советских математиков Н.А. Лебедева и И.М. Милина в решение этой трудной проблемы. Экстремальной функцией, как и ожидалось, оказалась функция Кебе.

Оценка, полученная в теореме 18 позволяет доказать одно неравенство, из которого можно вывести теоремы искажения.

Теорема 19 *Пусть* $f \in S$. *Тогда для любого* $z \in \mathbb{D}$ *выполнено неравенство*

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2}.$$

Теорема 20 *Для* $f \in S$ *и* $z \in \mathbb{D}$ *имеют место соотношения*

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1 + |z|)}{(1 - |z|)^3},$$

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}. \tag{7}$$

Следствием нижней оценки в (7) является знаменитая

Теорема Кебе об 1/4. *Пусть* $f \in S$. *Тогда* $f(\mathbb{D})$ *покрывает круг с центром в начале координат радиуса* $1/4$.

Отметим, что эта теорема доказана Бибербахом. Кебе принадлежит качественный результат о существовании круга с центром в нуле и некоторым радиусом, не зависящем от однолистной функции, который целиком покрывается образом круга $\mathbb{D}$.

Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $A \subset \mathbb{C}$. Обозначим $\operatorname{dist}(z, A)$ расстояние от точки z до множества A. Следствием теоремы Кебе об $1/4$ и леммы Шварца являются следующие оценки

$$1/4 \leq \operatorname{dist}(0, \partial f(\mathbb{D})) \leq 1.$$

Еще одним полезным следствием теоремы 20 является следующий результат: для любой односвязной области Ω и любого компакта $K \subset \Omega$ найдется константа $C(\Omega, K)$, такая, что, для любой однолистной в Ω аналитической функции f выполнены неравенства

$$\frac{1}{C(\Omega, K)} \leq \frac{|f'(z_1)|}{|f'(z_2)|} \leq C(\Omega, K), \quad z_1, z_2 \in K.$$

Теорема Риссов – Привалова

В этом параграфе мы исследуем граничное поведение конформного отображения круга $\mathbb{D}$ на односвязную область Ω со спрямляемой границей. Напомним, что кривая γ называется спрямляемой, если существует параметризация $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, такая, что $z(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$. Другими словами,

$$L = \sup \sum_{j=1}^{n} |z(t_{j+1}) - z(t_j)| < +\infty,$$

где супремум берется по всевозможным разбиениям $\{t_j\}$ отрезка $[a, b]$.

Введем теперь другое важное понятие, необходимое для формулировки дальнейших результатов.

Пусть φ – некоторая непрерывная, положительная, строго возрастающая функция на интервале $[0, +\infty)$, причем $\varphi(0) = 0$. Пусть A – множество на комплексной плоскости.

φ–мерой Хаусдорфа множества A называется величина

$$\Lambda_\varphi(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{B_k} \sum \varphi(\operatorname{diam} B_k),$$

где инфимум берется по всевозможным покрытиям B_k множества A, таким, что $\mathrm{diam} B_k < \varepsilon$. В том случае, когда $\varphi(t) = t^\alpha$ вместо обозначения Λ_{t^α} просто пишут Λ_α.

Линейная мера Λ_1 является обобщением понятия длины кривой. В самом деле, если γ – спрямляемая кривая на плоскости, то нетрудно показать, что $\Lambda_1(\gamma)$ – длина кривой γ.

В силу того, что $f(e^{it})$ является функцией ограниченной вариации, из теоремы 3 следует, что $f(z)$ может быть представлена интегралом Пуассона – Стилтьеса

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} d\mu(t), \quad z = re^{i\theta}.$$

Оказывается, что на самом деле имеет место более сильное утверждение.

Теорема 21 *Если $f \in H_1$, то имеет место представление Пуассона*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} f(e^{it}) dt, \quad z = re^{i\theta},$$

Очень важным фактом является связь пространств Харди с конформными отображениями круга на области со спрямляемыми границами. Имеет место

Теорема 22 *Пусть f отображает круг $\mathbb{D}$ на область со спрямляемой границей. Тогда $f'(z) \in H_1$.*

Теорема Риссов – Привалова. *Пусть A – борелевское множество на единичной окружности. Предположим, что функция f конформно отображает круг $\mathbb{D}$ на область со спрямляемой границей. Тогда*

$$\Lambda_1(f(A)) = \int_A |f'(z)||dz|.$$

Эта теорема имеет очень важное

Следствие. *Пусть A – борелевское множество положительной меры на единичной окружности. Предположим, что функция f конформно отображает круг $\mathbb{D}$ на область со спрямляемой границей. Тогда $\Lambda_1(f(A)) > 0$.*

На языке гармонической меры это означает, что гармоническая мера абсолютно непрерывна относительно линейной меры на спрямляемых кривых. Следующий параграф как раз и посвящен этому важному и полезному понятию.

Гармоническая мера

Гармоническая мера – одно из важнейших понятий современного комплексного анализа, по–существу является геометрической характеристикой аналитической природы.

Пусть Ω – конечносвязная область на плоскости, ограниченная жордановыми кривыми $\partial\Omega$. Пусть E – произвольное борелевское множество на $\partial\Omega$. Гармоническая мера $\omega(z, E, \Omega)$ определяется как решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u = 1 \text{ на } E, \end{cases}$$

т.е. является гармонической в области Ω функцией, причем в силу принципа максимума, положительной. Доказательство существования решения такой задачи в многосвязном случае является весьма нетривиальной задачей и мы не приведем его в данном пособии. Односвязный же случай замечателен тем, что данная задача может быть сначала решена для круга, а потом, при помощи теорем Римана и Каратеодори решена и в общем случае для произвольных односвязных областей с жордановыми границами.

Большую роль играет вероятностная интерпретация гармонической меры: $\omega(z, E, \Omega)$ – вероятность того, что броуновское движение, стартовавшее от точки z пересечет границу $\partial\Omega$ в некоторой точке из E. Теорема

1 "подсказывает" вид гармонической меры в круге $\mathbb{D}$:

$$\omega(re^{i\theta}, E, \mathbb{D}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\chi_E(t)dt, \quad r<1,$$

где $\chi_E(t)$ – характеристическая функция множества E, т.е.

$$\begin{cases} \chi = 1 \text{ на } E, \\ \chi = 0 \text{ на } \partial\mathbb{D}\setminus E. \end{cases}$$

Функция $\chi_E(t)$ измерима по Лебегу на отрезке $[-\pi, \pi]$ поскольку множество E измеримо по Борелю. Следовательно, функция $\chi_E(t)$ интегрируема по Лебегу ввиду того, что она еще и ограничена. Поэтому, функцию $\chi_E(t)$ можно занести под дифференциал:

$$\omega(re^{i\theta}, E, \mathbb{D}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}d\mu(t), \quad r<1.$$

Из теоремы 3 следует, что $\omega(e^{it}, E, \mathbb{D}) = \mu'(t) = \chi_E(t)$. Итак, гармоническая мера в круге построена. Используя простые оценки

$$\frac{1-r}{1+r} \le \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} \le \frac{1+r}{1-r},$$

получим неравенства Гарнака

$$\frac{|E|}{2\pi}\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \omega(z, E, \mathbb{D}) \le \frac{|E|}{2\pi}\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

из которых сразу следует, что если зафиксировать точку z, то гармоническая мера множества E эквивалентна обычной мере Лебега E, или, что тоже самое, $\Lambda_1(E) = |E|$.

Пусть теперь Ω – произвольная односвязная область с жордановой границей. Тогда по теореме Римана эта область может быть конформно переведена в круг. Пусть $f(z)$ – одно из таких отображений. Возьмем произвольное борелевское множество $E \subset \partial\Omega$. По теореме Каратеодори этому множеству будет соответствовать борелевское множество $f(E)$. Следовательно, гармоническую меру в области Ω можно определить так:

$$\omega(z, E, \Omega) = \omega(f(z), f(E), \mathbb{D}).$$

В самом деле, определенная таким образом функция будет гармонической функцией в Ω как композиция гармонической и аналитической функции. Пусть $z \in E$. Тогда $f(z) \in f(E)$, и следовательно $\omega(z, E, \Omega) = \omega(f(z), f(E), \mathbb{D}) = 1$. Отсюда видно, что $\omega(z, E, \Omega)$ является гармонической мерой. Данные рассуждения легко распространить и на многосвязный случай. Именно, справедлива

Теорема 23 *Гармоническая мера является конформным инвариантом. Это значит, что если две конечносвязные области с жордановыми границами Ω_1 и Ω_2 конформно изоморфны, то для любого борелевского множества $E \subset \partial\Omega_1$*

$$\omega(z, E, \Omega_1) = \omega(f(z), f(E), \Omega_2),$$

где f – конформный изоморфизм.

Другим не менее важным свойством является тот факт, что при расширении области гармоническая мера увеличивается.

Теорема 24 *Пусть даны две конечносвязные области с жордановыми границами Ω_1 и Ω_2, причем $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Предположим, что $E \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_1$. Тогда*

$$\omega(z, E, \Omega_1) \leq \omega(z, E, \Omega_2)$$

для всех $z \in \Omega_1$.

Доказательство. В силу определения гармонической меры имеет место неравенство:

$$\omega(z, E, \Omega_1) \leq \omega(z, E, \Omega_2)$$

для всех $z \in \partial\Omega_1$. Применяя принцип максимума для гармонических функций, отсюда заключаем, что данное неравенство выполнено для всех $z \in \Omega_1$.

Чтобы сформулировать еще одно важное свойство грамонической меры, нам потребуется понятие экстремальной длины семейства кривых.

Пусть Γ – некоторое семейство спрямляемых кривых на плоскости. Рассмотрим множество неотрицательных функций ρ: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ таких, что

$$A(\rho) = \int_{\mathbb{C}} \rho^2 dxdy \in (0, \infty).$$

Определим

$$L(\rho) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \rho(z)|dz|.$$

Величина

$$\lambda(\Gamma) = \sup_{\rho} \frac{L(\rho)^2}{A(\rho)}$$

называется экстремальной длиной семейства кривых Γ.

Наиболее ценным свойством экстремальной длины является тот факт, что она не меняется при конформных отображениях, т.е. является конформным инвариантом.

Если каждая кривая $\gamma_2 \in \Gamma_2$ содержит в себе некоторую кривую $\gamma_1 \in \Gamma_1$, то $\lambda(\Gamma_1) \leq \lambda(\Gamma_2)$.

Экстремальная длина и гармоническая мера связаны следующим образом.

Теорема 25 *Пусть Ω – область с жордановой границей. Пусть $K \subset \Omega$ – континуум, т.е. связный крмпакт. Для борелевского множества $E \subset \partial\Omega$ определим Γ_E как множество всех спрямляемых кривых из Ω, соединяющих мнжество E с компактом K. Тогда найдется константа C, не зависящая от E, такая, что*

$$\omega(z_0, E, \Omega) \leq C \exp[-\pi\lambda(\Gamma_E)].$$

Контрольные вопросы по теме 4

1. Доказать, что связность области – конформный инвариант, т.е. она не меняется при конформных отображениях.

2. Доказать, что не существует конформного отображения $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ на круг $\mathbb{D}$.

3. Доказать принцип симметрии Римана – Шварца, который может быть сформулирован так. Пусть Ω – область с жордановой границей, $\Gamma \subset \partial\Omega$ – дуга окружности или отрезок прямой. Предположим, что функция f аналитична в области Ω и непрерывно продолжима на дугу Γ. Допустим, что при отображении f дуга Γ переходит в некоторую дугу окружности (отрезок прямой). Тогда функция f аналитически продолжима в область Ω^* симметричную с Ω относительно дуги Γ. В случае, когда Γ – некоторый отрезок на вещественной оси, построить явный вид такого продолжения.

4. Доказать, что $\omega(z, \partial\Omega, \Omega) = 1$.

5. Построить гармоническую меру для полуплоскости и внешности круга.

6. Пусть Ω – односвязная область на плоскости. Функцией Грина области Ω называется функция двух переменных $G(z, \zeta)$, такая, что 1) $G(z, \zeta)$ – гармонична по z в области $\Omega \setminus \{\zeta\}$,
2) $G(z, \zeta) = G(\zeta, z)$,
3) $G(z, \zeta_0) + \ln|z - \zeta_0|$ – ограничена в окрестности точки ζ_0,
4) $G(z, \zeta) \to 0$ при $z \to z_0$, $z_0 \in \partial\Omega$.

Зная конформное отображение области Ω на круг $\mathbb{D}$, построить в явном виде функцию Грина для этой области.

7. Пусть Γ – множество кривых, соединяющих граничные окружности в кольце $K = \{r < |z| < R\}$. Доказать, что

$$\lambda(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r}.$$

5 Интегральные средние

Аннотация: В данной теме исследуется спектр интегральных средних и его связь с граничными свойствами конформных отображений.

Ключевые слова: спектр интегральных средних, размерность Минковского

Методические рекомендации по изучению темы.

Вначале необходимо изучить лекционный материал с определениями основных понятий. После этого следует ответить на контрольные вопросы. Ответы нужно оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю. При решении задач, представленных в теме, необходимо опираться на изученный лекционный материал. Решение задач необходимо оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю.

Источники информации:

Основная литература: 1) Garnett J.B., Marshall D.E. Harmonic measure, Cambridge University Press, 2005, 571 pp.

2) Pommerenke Ch. Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

3)Авхадиев Ф.Г. Введение в геометрическую теорию функций. Учебное пособие. Казань, 2012, 127 с.

Дополнительная литература: Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. - 628 с.

Глоссарий по теме 5

Определение 1. *Пусть f – конформное отображение круга $|z| < 1$ на односвязную область на плоскости. Спектром интегральных средних функции f называется величина*

$$\beta_f(p) = \limsup_{r\to 1} \frac{\log \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta}{|\log(1-r)|}.$$

Определение 2. *Размерностью Минковского ограниченного множества в метрическом пространстве называется величина*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N_\varepsilon}{|\ln\varepsilon|},$$

где N_ε — минимальное число множеств диаметра ε, которыми можно покрыть наше множество.

Близким к размерности Минковского понятием является размерность Хаусдорфа. Во многих случаях эти размерности совпадают, хотя существуют множества, для которых они различны.

Спектр интегральных средних

Оценки интегральных средних конформных отображений являются одним из основных направлений исследований в геометрической теории функций комплексного переменного. В качестве примера укажем теорему площадей, доказанную Т. Гронуоллом, позволившую получить ряд точных оценок различных функционалов в классе однолистных функций. Отметим также, что в силу интегральной формулы Коши проблемы коэффициентов однолистных функций являются по-существу проблемами интегральных средних. Начало бурного развития этого направления связано с работами П. Кебе, Л. Бибербаха и К. Левнера.

Одной из центральных проблем геометрической теории функций в XX веке становится гипотеза Бибербаха о том, что $|a_n| \le n$, где a_n – коэффициенты Тейлора для функций из класса S. Напомним, что класс S состоит из однолистных и голоморфных в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций f, удовлетворяющих соотношениям $f'(0) - 1 = f(0) = 0$. Дж. Литтлвуд получил точный порядок роста в классе S интегральных средних

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta, \quad r \to 1-,$$

и с помощью этого результата он доказал оценку $|a_n| < en$, что явилось первым нетривиальным результатом в этом направлении после хорошо известных результатов Л. Бибербаха $|a_2| \le 2$ и К. Левнера $|a_3| \le 3$. Впоследствии оценка Литтлвуда неоднократно улучшалась. Здесь следует отметить работы советских математиков И.Е. Базилевича, И.М. Милина и Н.А. Лебедева. В 1985 году де Бранж, доказав гипотезу Лебедева-Милина (из которой следует гипотеза Бибербаха), завершил большой цикл исследований в этом направлении.

Проблемы интегральных средних для модуля однолистной функции (или для модуля ее производной) до доказательства гипотезы Л. Бибербаха рассматривались как вспомогательный инструмент для оценки коэффициентов в классе S.

В работах Н.Г. Макарова, Л. Карлесона и П. Джонса раскрыты нетривиальные связи между интегральными средними и граничным поведением конформных отображений. После этих работ оценки интегральных средних начинают играть ведущую роль в исследованиях по геометрической теории функций.

Пусть Ω – односвязная область на плоскости, граница которой содержит не менее двух точек, f – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на Ω. В силу хорошо известных теорем искажения имеет место соотношение

$$|f(re^{i\theta})| = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^2, \quad r \to 1.$$

Х. Правиц, обобщая результат Дж. Литтлвуда, показал, что для любого фиксированного $p > 1/2$ выполняется соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^{2p-1}, \quad r \to 1.$$

Отсюда видно, что при интегрировании по линиям уровня порядок роста модуля однолистной функции уменьшается на единицу.

Поскольку

$$|f'(re^{i\theta})| = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^3, \quad r \to 1,$$

то естественно ожидать, что для любого фиксированного $p > 1/3$ выполняется соотношение

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^{3p-1}, \quad r \to 1.$$

Это было подтверждено Й. Фенгом и Т. МакГрегором, однако лишь для случая $p \geq 2/5$. Н.Г. Макаровым показано, что этот результат неверен для p, близких к $1/3$. Ниже мы покажем, что этот результат неверен при $p \leq 0.341$ (имеется гипотеза, что точная граница здесь равна $6 - 4\sqrt{2} = 0.343\ldots$). Итак, Н.Г. Макаровым установлена существенная разница между интегральными средними однолистной функции и ее производной. Причины этой разницы не были ясны до середины 80-х годов XX века. Для исследования этих вопросов удачной идеей оказалось рассмотрение спектра интегральных средних

$$\beta_f(p) = \limsup_{r\to 1} \frac{\log \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta}{|\log(1-r)|},$$

который фактически является порядком роста интегральных средних производной. Для "хороших"областей (например, для областей с ограниченным граничным вращением) $\beta_f(p)$ является кусочно-линейной функцией от p.

Отметим три важнейших результата, касающихся спектра интегральных средних.

1) Л. Карлесон и П. Джонс показали, что

$$\sup_{f\in S_1} \beta_f(1) = \alpha = \sup_{f\in S_1} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|na_n|}{\log n},$$

где S_1 – класс ограниченных и однолистных функций в круге $\mathbb{D}$, a_n – коэффициенты разложения Тейлора функции f. Заметим, что неравенство $\sup \beta_f(1) \geq \alpha$ доказывается весьма просто (и основывается на том, что интеграл от модуля некоторой функции не меньше, чем модуль интеграла от той же функции), в то время, как обратное неравенство является глубоко нетривиальным фактом.

2) Н.Г. Макаровым доказано, что если множество $A \subset \partial\mathbb{D}$ измеримо по Борелю, то для любого $q > 0$ справедливо неравенство

$$\dim f(A) \geq \frac{q \dim A}{\beta_f(-q) + q + 1 - \dim A},$$

где $\dim A$ – хаусдорфова размерность множества A.

3) Х. Поммеренке установил следующий факт. Если область $f(\mathbb{D})$ является областью класса Джона (т.е. не имеет внутренних нулевых углов), то

$$\mathrm{mdim} \partial f(\mathbb{D}) = p,$$

где p – единственное решение уравнения $\beta_f(p) = p - 1$, mdim – верхняя метрическая размерность Минковского.

Из этих результатов становится ясна причина сложного поведения $\beta_f(p)$. Классическая теорема Каратеодори утверждает, что конформное отображение областей с жордановыми границами друг на друга может быть продолжено до гомеоморфизма замкнутых областей, однако не дает информацию о том, каким образом искажаются линейные меры борелевских множеств на границе этих областей. Исследование поведения спектра интегральных средних позволяет пролить свет на этот вопрос.

Оценки спектра интегральных средних

Для удобства дальнейшего изложения, обозначим

$$B(t) = \sup_{f \in S} \beta_f(t)$$

– универсальный спектр интегральных средних.

Относительно $B(t)$ имеется гипотеза:

$$B(t) = \begin{cases} -t - 1, & t \in (-\infty, -2], \\ t^2/4, & t \in [-2, 6 - 4\sqrt{2}], \\ 3t - 1, & t \in [6 - 4\sqrt{2}, +\infty). \end{cases}$$

Й. Клуни и Х. Поммеренке показали, что

$$B(t) \leq (9+\varepsilon)t^2$$

при любом положительном ε и достаточно малых t. Х. Поммеренке усилил это результат, понизив константу 9 до 3.

Лучшие верхние оценки спектра интегральных принадлежат Х. Хеденмальму и С. Шиморину. Ими показано, что

$$B(t) \leq 0.38t^2$$

для достаточно малых t.

С другой стороны, Н.Г. Макаров показал, что существует положительная консанта c такая, что

$$B(t) \geq ct^2$$

для достаточно малых t.

С. Роде [**?**], усилил этот результат, доказав, что в качестве c можно взять число 0.117. Далее Ф. Крецер, используя метод, разработанный Л. Карлесоном и П. Джонсом, с использованием компьютера экспериментально установил, что

$$B(t) \geq \frac{t^2}{4}, \quad t \in [-2, 2].$$

Отметим, что численный эксперимент, проведенный Ф. Крецером, математически не является строго обоснованным.

В нашей работе доказана

Теорема 26

$$B(t) > \frac{t^2}{5}, \quad 0 < t \leq \frac{2}{5}.$$

Интересным следствием результатов, полученных Х. Хеденмальмом и С. Шимориным является

Предложение. *Для любых* $t \in \mathbb{R}$ *имеет место неравенство*

$$B(t) \leq \frac{9}{4}t^2.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $t = 2/3$ *либо* $t = 0$.

Контрольные вопросы по теме 5

1. Пусть $p \in \mathbb{R}$. Найти порядок роста интегральных средних

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{it})|^p dt$$

при $r \to 1$ для функций

а) $f(z) = z/(1-z)^2$,

б) $f(z) = z/(1-z)$,

в) $f(z) = \log(1+z)$,

г) $f(z) = z - z^2/2$.

2. Пусть $f \in S$. Показать, что существует абсолютная константа C такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log f'(re^{it})|^2 dt \leq C \log \frac{1}{1-r}$$

для всех $r \in [0, 1)$. Оценить эту константу.

3. Показать, что

$$B(t) \geq \begin{cases} -t-1, & t \in (-\infty, -1], \\ 3t-1, & t \in [1/3, +\infty). \end{cases}$$

4. Пусть $f(z) = \log(1+z)$. Вычислить интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 dt.$$

Далее, используя равенство Парсеваля показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6 Граничные свойства конформных отображений

Аннотация: В данной теме исследуются граничные свойства конформных отображений на основе закона повторного логарифма, доказанного Н.Г. Макаровым.

Ключевые слова: закон повторного логарифма, граничные свойства

Методические рекомендации по изучению темы.

Вначале необходимо изучить лекционный материал с определениями основных понятий. После этого следует ответить на контрольные вопросы. Ответы нужно оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю. При решении задач, представленных в теме, необходимо опираться на изученный лекционный материал. Решение задач необходимо оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю.

Источники информации:

Основная литература: 1) Garnett J.B., Marshall D.E. Harmonic measure, Cambridge University Press, 2005, 571 pp.

2) Pommerenke Ch. Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

3)Авхадиев Ф.Г. Введение в геометрическую теорию функций. Учебное пособие. Казань, 2012, 127 с.

Дополнительная литература: Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. - 628 с.

Глоссарий по теме 6

Определение 1. *Предположим, что функция f аналитична и однолистна в круге $\mathbb{D}$. Законом повторного логарифма Н.Г. Макарова на-*

зывается неравенство

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}} \le C||\log f'||_{\mathbb{B}}$$

для почти всех ζ на окружности $|\zeta| = 1$, где

$$||\log f'||_{\mathbb{B}} = \sup_{|z|<1}(1-|z|^2)\left|\frac{f''}{f'}(z)\right|$$

– стандартная полунорма Блоха.

Определение 2. *Пусть Ω – конечносвязная область на плоскости, ограниченная жордановыми кривыми $\partial\Omega$. Пусть E – произвольное борелевское множество на $\partial\Omega$. Гармоническая мера $\omega(z, E, \Omega)$ определяется как решение задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u = 1 \text{ на } E, \end{cases}$$

т.е. является гармонической в области Ω функцией, причем в силу принципа максимума, положительной.

Закон повторного логарифма

Интегральные средние производных конформных отображений тесно связаны с законом повторного логарифма для однолистных функций, доказанного Н.Г. Макаровым в 1985 году.

Предположим, что функция f аналитична и однолистна в круге $\mathbb{D}$. Н.Г. Макаров доказал, что существует положительная постоянная C такая, что

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}} \le C||\log f'||_{\mathbb{B}} \tag{8}$$

для почти всех ζ на окружности $|\zeta| = 1$, где

$$||\log f'||_{\mathbb{B}} = \sup_{|z|<1}(1-|z|^2)\left|\frac{f''}{f'}(z)\right|$$

– стандартная полунорма Блоха.

Х.Поммеренке показал, что неравенство (8) верно при $C = 1$, но существует аналитическая и однолистная в круге $\mathbb{D}$ функция, для которой это неравенство перестает быть верным при $C \leq 0.685$. Таким образом, результат Н.Г. Макарова является точным в смысле порядка.

Ф. Прзытички, М. Урбаньски и А. Здуник установили, что для некоторых классов областей с фрактальными границами на самом деле выполняется равенство

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}} \leq C||\log f'||_{\mathbb{B}}$$

для почти всех ζ на окружности $|\zeta| = 1$, где

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \limsup_{r\to 1} \frac{\int\limits_0^{2\pi} |\log f'(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta}{|\log(1-r)|}$$

– асимптотическая дисперсия. Отметим, что в статье авторы использовали другое определение асимптотической дисперсии, которое фактически эквивалентно, указанному выше определению.

Нашей целью является получение точной формы макаровского закона закона повторного логарифма для локально однолистных функций, т.е. функций f для которых $f'(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{D}$.

Пусть функция f локально однолистна в единичном круге $\mathbb{D}$, и пусть p – произвольное комплексное число. Для всех $\delta > 0$ определим

$$\beta_\delta(p) = \sup_{r\in[0,1)} \frac{\log\left[\delta \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| \mathrm{d}\theta\right]}{|\log(1-r)|}.$$

Это определение эквивалентно тому, что $\beta_\delta(p)$ – минимальное число, для которого выполняется равенство

$$\int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| \mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\beta_\delta(p)}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Если p вещественно, то

$$\beta_\delta(p) \to \beta(p) \text{ при } \delta \to 0,$$

где $\beta(p)$ – спектр интегральных средних. Докажем этот факт. Поскольку

$$\beta_\delta(p) = \sup_{r \in [0,1)} \frac{\log\left[\delta \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| \mathrm{d}\theta\right]}{|\log(1-r)|},$$

то

$$\beta_\delta(p) \geq \limsup_{r \to 1} \frac{\log\left[\delta \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| \mathrm{d}\theta\right]}{|\log(1-r)|} = \beta(p).$$

С другой стороны, в силу определения $\beta_\delta(p)$ ясно, что либо $\beta_\delta(p) = \beta(p)$, либо существует r_δ такое, что

$$\beta_\delta(p) = \frac{\log\left[\delta \int\limits_0^{2\pi} |f'(r_\delta e^{i\theta})^p| \mathrm{d}\theta\right]}{|\log(1-r_\delta)|},$$

причем $r_\delta \to 1$ при $\delta \to 0$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$ заключаем, что

$$\lim_{\delta \to 0} \beta_\delta(p) \leq \beta(p).$$

Результаты, полученные Х. Поммеренке, Н.Г. Маккровым, Л. Карлесоном и П. Джонсом, устанавливают существование нетривиальной связи между граничным поведением конформных отображений и спектром интегральных средних. С другой стороны, Н.Г. Макаровым показано, что закон повторного логарифма тесно связан с граничными свойствами конформных отображений. Отсюда вытекает естественный вопрос: *существует ли явная связь между законом повторного логарифма для конформных отображений и спектром интегральных средних?*

Возможным ответом на этот вопрос является следующий результат, который доказан в нашей работе:

Теорема 27 *Предположим, что функция f локально однолистна и аналитична в круге $\mathbb{D}$. Пусть δ – произвольное положительное число. Тогда*

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}} \leq \sigma(\delta)$$

для почти всех ζ на $|\zeta| = 1$, где

$$\sigma^2(\delta) = 4\limsup_{p\to 0} \frac{\beta_\delta(p)}{|p|^2}.$$

Отметим, что результат Х. Поммеренке с константой $C = 1$ легко следует из теоремы 27, поскольку хорошо известно, что если $\log f'$ – функция Блоха, то $\sigma^2(0+) \leq ||\log f'||^2_{\mathbb{B}}$.

Следующая лемма может быть выведена из приведенного в книге Х. Поммеренке доказательства закона повторного логарифма для конформных отображений, полученного Н.Г. Макаровым.

Лемма 1. *Пусть A – произвольное положительное число. Пусть C_k – последовательность положительных чисел таких, что*

$$C_k^{1/k} \to 1 \text{ при } k \to \infty.$$

Если

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log f'(re^{i\theta})|^{2n} \mathrm{d}\theta \leq C_n n! A^{2n} \log^n \frac{1}{1-r}$$

для всех натуральных n и всех $r \in [1-\exp(-\exp e^n), 1)$, то

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(re^{i\theta})|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}} \leq A$$

для почти всех $\theta \in [0, 2\pi)$.

Метрические свойства гармонической меры

Закон повторного логарифма Н.Г. Макарова эквивалентен тому, что существует абсолютная положительная постоянная C такая, что

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}} \leq C \tag{9}$$

для почти всех ζ на окружности $|\zeta| = 1$. Из результатов, полученных Х. Поммеренке, следует, что данное неравенство справедливо при $C = 6$. Используя теорему 27, мы доказываем, что этот закон верен при $C = 1.23$. Это позволяет уточнить метрические свойства образов подмножеств единичной окружности положительной меры при конформных отображениях круга на области ограниченные жордановой кривой.

Пусть Ω – односвязная область на комплексной плоскости, ограниченная жордановой кривой. Тогда по теореме Римана существует конформное отображение f круга $\mathbb{D}$ на Ω.

Основная проблема: *Пусть A – множество положительной линейной меры на $\partial\mathbb{D}$. Требуется охарактеризовать метрические свойства $f(A)$.*

Как уже было доказано, теорема Рисса–Привалова утверждает, что если область $f(\mathbb{D})$ имеет спрямляемую границу, то линейная мера $f(A)$ также положительна. М.А. Лаврентьевым было показано, что в общем случае этот результат неверен.

Л. Карлесоном в 1973 году была доказана

Теорема А. *Пусть f – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на односвязную область Ω. Предположим, что множество $A \subset \partial\mathbb{D}$ имеет положительную линейную меру. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\Lambda_{1/2+\varepsilon}(f(A)) > 0$.*

В 1985 году Н.Г. Макаров показал, что в качестве ε можно взять любое положительное число из интервала $(0, 1/2)$. Более того, им была доказана

Теорема В. *Предположим, что A – борелевское множество положительной линейной меры на окружности $\partial\mathbb{D}$. Тогда найдется константа $C > 0$ такая, что, $\Lambda_\varphi(f(A)) > 0$, где*

$$\varphi(t) = t \exp\left(C \sqrt{\log \frac{1}{t} \log\log\log \frac{1}{t}} \right).$$

В 1992 году Х. Поммеренке показал, что в качестве константы C

можно взять число 30. Мы понижаем эту константу до 1.24. Отметим важность константы C: при различных ее значениях получаются не эквивалентные меры Хаусдорфа.

Справедлива

Теорема 28 *Пусть f – однолистная в круге $\mathbb{D}$ функция, отображающая его на область с жордановой границей. Предположим, что A – борелевское множество положительной линейной меры на окружности $\partial\mathbb{D}$. Тогда $\Lambda_\varphi(f(A)) > 0$, где*

$$\varphi(t) = t \exp\left(1.24\sqrt{\log\frac{1}{t}\log\log\log\frac{1}{t}}\right),$$

а ε – произвольное положительное число.

Этот результат может быть сформулирован на языке гармонической меры следующим образом.

Пусть Ω – односвязная область на плоскости, ограниченная жордановой кривой $\partial\Omega$. Пусть E – произвольное борелевское множество на этой кривой. Через $\omega(z, E, \Omega)$ обозначим гармоническую меру множества E относительно точки $z \in \Omega$. Зафиксируем точку $z_0 \in \Omega$ и будем рассматривать функцию $\omega(E) = \omega(z_0, E, \Omega)$ как функцию на борелевских множествах кривой $\partial\Omega$. Полученная таким образом мера ω, как было замечено выше, не зависит от выбора точки $z_0 \in \Omega$. Теорема 28 фактически утверждает, что гармоническая мера ω абсолютно непрерывна относительно меры Хаусдорфа Λ_φ.

В работе построен пример показывающий, что константа C не может быть ниже, чем 0.91. Оценка снизу для константы получается из примера конформного отображения f для которого справедливо неравенство $\beta_f(t) > t^2/5$ при малых t. В качестве функции f берется предел

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_q \circ f_{q^2} \circ f_{q^3} \circ \cdots \circ f_{q^n}(z).$$

Здесь

$$f_m(z) = \sqrt[m]{g(z^m)}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где

$$g(z) = \frac{z}{K} \exp \int\limits_0^z \frac{\exp\{(a/b)\,\mathrm{sh}(bt)\} - 1}{t}\,\mathrm{d}t,$$

$a = 1.906$, $b = 1.246$,

$$K = \exp \int\limits_0^1 \frac{\exp\{(a/b)\,\mathrm{sh}(bt)\} - 1}{t}\,\mathrm{d}t = 73.677030\ldots$$

Гипотеза Бреннана

Одной из наиболее интригующих проблем интегральных средних однолистных функций является гипотеза Бреннана. Пусть Ω – односвязная область на плоскости, не совпадающая с ней, и φ – конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на Ω. Й. Бреннаном была высказана гипотеза о том, что $\varphi' \in L_p(\Omega)$, $4/3 < p < 4$, т.е.

$$\int\limits_\Omega |\varphi'|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty, \quad 4/3 < p < 4.$$

Если Ω – плоскость с разрезом по некоторому лучу, то при $p \notin (4/3, 4)$

$$\int\limits_\Omega |\varphi'|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \infty.$$

Обозначим $f : \mathbb{D} \to \Omega$ – конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на Ω. Показано, что гипотеза Бреннана эквивалентна соотношению

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|^2}\mathrm{d}\theta = O\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \to 1-,$$

что равносильно неравенству

$$\beta_f(t) \le |t| - 1, \quad t \le -2, \tag{10}$$

где $\beta_f(t)$ – спектр интегральных средних.

Неравенство (10) было установлено Л. Карлесоном и Н.Г. Макаровым для достаточно больших $|t|$.

Д. Бертильсон, в своей диссертации, исследовал локальную версию гипотезы Бреннана для функций близких к функции Кебе.

Из концепции интегральных средних следует, что гипотезу Бреннана достаточно проверить для областей с фрактальными границами. Эвристически этот факт можно объяснить тем, что если граница области достаточно хороша, то интегрирование по окружности уменьшает порядок роста производной на единицу. Первый шаг в этом направлении был сделан К. Бараньски, А. Вольбергом и А. Здуник. Они доказали эту гипотезу для всех односвязных областей притяжения бесконечности квадратичных полиномов.

Другой важный класс фракталов состоит из конформных отображений f, для которых $\log f'$ представим в виде лакунарного ряда Адамара, т.е. когда

$$\log f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1.$$

Такие отображения оказались весьма полезны для получения нижних оценок спектра интегральных средних. С другой стороны, нетрудно показать, что если существует абсолютная положительная постоянная C такая, что неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|^2} \mathrm{d}\theta \leq \frac{C}{1-r}$$

выполнено для всех функций из этого класса, то гипотеза Бреннана верна в общем случае.

Мы докажем эту гипотезу в предположении, что $q \geq 15$. Для этого нам понадобится несколько полезных лемм.

Лемма 2. *Пусть* $0 \leq x \leq 3\pi/2$ *и* $q \geq 15$. *Тогда*

$$\left| x\cos\theta - \log\left(I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{q-1} I_n(x)\cos n\theta \right) \right| \leq \frac{C}{q!}\left(\frac{x}{2}\right)^q, \quad C = 370,$$

где

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{4^\nu \nu!(\nu+n)!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

– модифицированные функции Бесселя.

Лемма 3. *Пусть $\{\theta_k\}$ – последовательность вещественных чисел. Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=0}^{\infty} \left[I_0(t|a_k|r^{n_k}) + 2\sum_{s=1}^{q-1} I_s(t|a_k|r^{n_k}) \cos(sn_k\theta + s\theta_k) \right] \mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\pi \prod_{k=0}^{\infty} I_0(t|a_k|r^{n_k}),$$

и следовательно, значения этого интеграла не зависят от последовательности $\{\theta_k\}$.

Теорема 29 *Предположим, что функция f аналитична, однолистна в круге $\mathbb{D}$ и $\log f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$, $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$. Если $q \geq 15$, то*

$$\beta_f(-2) \leq 1.$$

Достоверность гипотезы Бреннана также установлена в случае, когда тейлоровские коэффициенты функции$\log(zf'/f)$ неотрицательны. Нами доказана

Теорема 30 *Предположим, что аналитическая функция f однолистна в круге $\mathbb{D}$, $f(0) = 0$. Если тейлоровские коэффициенты функции $\log(zf'/f)$ неотрицательны, то $\beta_f(-2) \leq 1$, что эквивалентно достоверности гипотезы Бреннана в рассматриваемом случае. Равенство $\beta_f(-2) = 1$ достигается, например, для функции Кебе $f = z/(1-z)^2$.*

Контрольные вопросы по теме 6

1. Предположим, что функция f отображает единичный круг на область со спрямляемой границей. Показать, что

$$\limsup_{r\to 1-}\frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}}=0$$

для почти всех ζ на окружности $|\zeta|=1$

2. Используя закон повторного логарифма Н.Г. Макарова оценить

$$|f(re^{i\theta})-f(e^{i\theta})|$$

при $r\to 1$, где f – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на односвязную область с жордановой границей.

3. Пусть

$$b(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}.$$

Оценить величину

$$\limsup_{r\to 1-}\frac{|b(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}}$$

для почти всех ζ на окружности $|\zeta|=1$

7 Информационные источники

Основная литература:

1) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989, 623 с.

2) Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств, М.: Мир, 1971, 312 с.

3): Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. - 628 с.

4): Кусис П. Лекции по теории пространств Hp. М.: Мир, 1984. - 368 с.

5) Garnett J.B., Marshall D.E. Harmonic measure, Cambridge University Press, 2005, 571 pp.

6) Pommerenke Ch. Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

7)Авхадиев Ф.Г. Введение в геометрическую теорию функций. Учебное пособие. Казань, 2012, 127 с.

Дополнительная литература:

8) Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950, 336 с.

8 Глоссарий

Нормированное векторное пространство. *Пусть V – векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пространство V называется нормированным векторным пространством, если существует функция $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ такая, что*

1) $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \to f = 0$;

2) $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in V$;

3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ для любых $f, g \in V$.

Отметим, что любое нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой $\rho(f, g) = \|f - g\|$.

Банахово пространство. *Полное нормированное пространство называется Банаховым.*

Унитарное пространство. *Пусть V – векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. Пространство V называется унитарным пространством, если существует функция $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ такая, что*

1) $(f, f) \geq 0$, $(f, f) = 0 \to f = 0$;

2) $(\lambda_1 f_1 + \mu f_2, g) = \lambda_1(f_1, g) + \lambda_2(f_2, g)$ для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $f_1, f_2, g \in V$;

3) $(f, g) = \overline{(g, f)}$ для любых $f, g \in V$.

Отметим, что любое унитарное пространство является нормированным пространством с нормой $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Гильбертово пространство. *Полное унитарное пространство называется Гильбертовым.*

Сначала определим меру Лебега на открытых итервалах таким образом:

$$m(a,b) = b - a.$$

Пусть A – открытое ограниченное множество из $\mathbb{R}$. Тогда существует конечное или счетное число непересекающихся интервалов (a_j, b_j) таких, что

$$A = \cup_j (a_j, b_j).$$

Положим

$$m(A) = \sum_j m(a_j, b_j).$$

Пусть B – замкнутое множество на прямой. Тогда найдется открытое множество A, содержащее B. Положим

$$m(B) = m(A) - m(A \setminus B).$$

Таким образом, нами определена мера Лебега на открытых и замкнутых множествах. Пусть теперь Ω – произвольное множество на прямой $\mathbb{R}$. Внешней мерой Лебега множества Ω называется величина

$$m^*(\Omega) = \inf_{A \supset \Omega} m(A),$$

где инфимум ищется среди всех открытых множеств A содержащих в себе Ω.

Внутренней мерой Лебега множества Ω называется величина

$$m_*(\Omega) = \sup_{B \subset \Omega} m(B),$$

где супремум ищется среди всех замкнутых множеств B, содержащихся в Ω.

Измеримое по Лебегу множество. *Множество* Ω *называется измеримым по Лебегу, если его внутренняя и внешняя меры совпадают, т.е.* $m^*(\Omega) = m_*(\Omega)$.

Напомним, что множество Ω называется борелевским (измеримым по Борелю), если оно может быть получено из открытых множеств путем не более чем счетного применения операций объединения и пересечения.

По построению меры m любое борелевское множество измеримо по Лебегу.

Важным свойством меры Лебега является счетная аддитивность: если $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, где множества A_j попарно не пересекаются, то $m(A) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j)$.

Измеримая функция. *Функция* f *называется измеримой, если прообраз любого измеримого множества измерим по Лебегу.*

Интеграл Лебега. *Пусть* A *– измеримое множество конечной меры на прямой. Измеримая функция* f *называется интегрируемой по Лебегу на множестве* A*, если существует последовательность простых интегрируемых на* A *функций* f_n*, сходящаяся равномерно на множестве* A*. Итегралом Лебега называется предел*

$$\int_A f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx.$$

Напомним хорошо известные факты теории функций. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция Φ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$, которую будем обозначать $V_a^b[\Phi]$.

Интеграл Римана – Стилтьеса. *Интегралом Римана – Стилтьеса (или просто интегралом Стилтьеса) называется предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}))$$

по всевозможным разбиениям отрезка $[a,b]$*, таким, что*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k\le n}(x_k - x_{k-1}) = 0,$$

причем $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. *Этот предел в дальнейшем будем обозначать символом*

$$\int\limits_a^b f(x)d\Phi(x).$$

Ряд Фурье. *Предположим, что* 2π *– периодическая функция* $f \in L_1[-\pi,\pi]$. *Рядом Фурье функции* f *называется формальный ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

Гармоническая функция. *Функция* $u(x,y)$, *заданная в области* Ω, *называется гармонической в этой области, если* $u \in C^2[\Omega]$ *и выполняется равенство*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega.$$

Принцип максимума. *Принцип максимума для гармонических функций утверждает, что если*

$$\sup_{z\in\Omega} u(z) = u(z_0)$$

для некоторой точки $z_0 \in \Omega$, *то* $u \equiv const$ *в* Ω.

Задача Дирихле имеет единственное решение, которое дается формулой

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\varphi(t)dt, \quad r<1.$$

Формула Пуассона. *Формула (2) называется формулой Пуассона, а выражение*

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}$$

ядром Пуассона, которое, по–существу, является нормальной производной функцией Грина для круга.

Неравенство Гарнака.

$$u(z_0)\frac{R-r}{R+r} \le u(z) \le u(z_0)\frac{R+r}{R-r},$$

где функция u гармонична в круге $|z|<R$, $|z-z_0|<r$.

Угловой предел. *Говорят, что функция* $g(z)$, *определенная в* $\mathbb{D}$, *имеет угловой (некасательный) предел в точке* $e^{i\theta}$, *если существует предел*

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} g(z),$$

когда точка z *стремится к* $e^{i\theta}$ *некасательным образом внутри круга* D, *т. е.* $|z-e^{i\theta}|<C(1-|z|)$ *для некоторой константы* C, *не зависящей от* z.

Пусть μ – функция ограниченной вариации на $[-\pi,\pi]$. Предположим, что в точке θ_0 существует производная $\mu'(\theta_0)$. Тогда существует угловой предел $\lim_{z\to e^{i\theta_0}} u(z)$, равный $\mu'(\theta_0)$, где

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}d\mu(t), \quad r<1.$$

Интеграл Пуассона – Стилтьева. *Интеграл (3) понимается в смысле Римана – Стилтьеса и называется интегралом Пуассона – Стилтьеса.*

Произведение Бляшке. *Произведением Бляшке называется функция*

$$B(z) = z^\lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k}\frac{z_k-z}{1-\overline{z}_k z},$$

где λ *– натуральное число,* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– последовательность комплексных чисел из* $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Пространство Харди. *Пусть* $p > 0$. *Говорят, что аналитическая в круге* $\mathbb{D}$ *функция* f *принадлежит пространству* H_p, *если*

$$\sup_{r \in (0,1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

В случае $p = \infty$ *класс* H_∞ *понимается как класс аналитических и ограниченных в* $\mathbb{D}$ *функций.*

Класс Неванлинны. *Говорят, что аналитическая в круге* $\mathbb{D}$ *функция* f *принадлежит классу Неванлинны* N, *если справедливо неравенство*

$$N(f) = \limsup_{r \to 1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty,$$

где $\ln^+ a = \max\{\ln a, 0\}$.

Класс Блоха. *Говорят, что аналитическая в круге* $\mathbb{D}$ *функция* f *принадлежит классу Блоха* $\mathbb{B}$, *если выполняется неравенство*

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

Локально-равномерная сходимость. *Пусть* f_n *– последовательность функций, определенных в некоторой области* $\Omega \subset \mathbb{C}$. *Говорят, что эта последовательность сходится к функции* f *локально равномерно в* Ω, *если последовательность* f_n *сходится равномерно к* f *на любом компакте* $K \subset \Omega$.

Нормальное множество. *Пусть* M *– некоторое множество функций, заданных на области* Ω. *Множество* M *называется нормальным, если из любой последовательности функций из* M *можно выделить сходящуюся локально равномерно в* Ω *подпоследовательность.*

Локально связная граница в точке. *Граница области* $\partial\Omega$ *называется локально связной в точке* $z \in \partial\Omega$, *если для любой последовательности точек* $z_n \in \partial\Omega$, *сходящейся к* z, *найдется связное множество* $K_n \subset \partial\Omega$, *содержащее* z *и* z_n, *такое, что* $\operatorname{diam} K_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Локально связная граница . *Граница области* $\partial\Omega$ *называется локально связной, если она локальна связна в каждой своей точке.*

Спектр интегральных средних. *Пусть* f *– конформное отображение круга* $|z| < 1$ *на односвязную область на плоскости. Спектром интегральных средних функции* f *называется величина*

$$\beta_f(p) = \limsup_{r\to 1} \frac{\log \int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta}{|\log(1-r)|}.$$

Размерность Минковского. *Размерностью Минковского ограниченного множества в метрическом пространстве называется величина*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N_\varepsilon}{|\ln\varepsilon|},$$

где N_ε *— минимальное число множеств диаметра* ε, *которыми можно покрыть наше множество.*

Закон повторного логарифма Н.Г. Макарова. *Предположим, что функция* f *аналитична и однолистна в круге* $\mathbb{D}$. *Законом повторного логарифма Н.Г. Макарова называется неравенство*

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)|\log\log|\log(1-r)|}} \le C||\log f'||_{\mathbb{B}}$$

для почти всех ζ *на окружности* $|\zeta| = 1$, *где*

$$||\log f'||_{\mathbb{B}} = \sup_{|z|<1} (1-|z|^2)\left|\frac{f''}{f'}(z)\right|$$

– стандартная полунорма Блоха.

Гармоническая мера. *Пусть Ω – конечносвязная область на плоскости, ограниченная жордановыми кривыми $\partial\Omega$. Пусть E – произвольное борелевское множество на $\partial\Omega$. Гармоническая мера $\omega(z, E, \Omega)$ определяется как решение задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \\ u = 1 \text{ на } E, \end{cases}$$

т.е. является гармонической в области Ω функцией, причем в силу принципа максимума, положительной.

9 Вопросы к зачету

1. Банаховы пространства.

2. Гильбертовы пространства.

3. Ряды Фурье, сходимость по Чезаро.

4. Задача Дирихле и формула Пуассона.

5. Интеграл Пуассона - Стилтьеса.

6. Представимость гармонических функций интегралом Пуассона - Стилтьеса.

7. Теорема Фату.

10. Произведения Бляшке.

11. Пространства Харди.

12. Пространство Блоха.

7. Теорема Римана о конформном отображении.

8. Теорема Каратеодори о граничном соответствии.

9. Теорема площадей и ее следствия.

13. Теорема Риссов - Привалова об отображении областей со спрямляемыми границами.

14. Гармоническая мера, основные свойства.

15. Закон повторного логарифма для конформных отображений.

16. Метрические свойства гармонической меры на жордановых кривых.

последняя страница

Конспект лекций

Каюмов Ильгиз Рифатович

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Дизайн обложки
М.А. Ахметов

Подписано в печать 14.09.2013.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60х84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. .
Тираж экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28