на правах рукописи

Рындина Светлана Валентиновна

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА РЕЛАКСАЦИОННЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА КОШИ

Специальность 01.01.03- математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2003

Рындина

Диссертация выполнена на кафедре математического анализа Московского государственного областного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Латышев Анатолий Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Борисов Владимир Федорович

кандидат физико-математических наук, доцент Сакбаев Всеволод Жанович

Ведущая организация Институт вычислительной математики РАН

Защита состоится <*16*> *февраля* 2004 г. в «15 » часов на заседании диссертационного совета К.212.155.05 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика в Московском государственном областном университете по адресу: 105005, г. Москва, ул. Радио, д. 10а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного областного университета.

Автореферат разослан « 21» декабря 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Нелаев Нелаев А.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Значительное число физических процессов описывается с помощью интегро-дифференциальных уравнений. Линейные интегро-дифференциальные уравнения переноса применяются в нейтронной физике, в задачах изучения стационарных, многоэнергетических и изотропных процессов переноса, а также в кинетической теории. Точные решения можно получить для тех граничных задач, которые сводятся к одномерным и односкоростным уравнениям, либо скалярным, либо векторным, с полиномиальными ядрами.

Предметом исследования диссертации является линейное интегро-дифференциальное кинетическое уравнение, выведенное Вильямсом М.М.Р. в 1971 году

$$\frac{\partial h}{\partial t}+(\mathbf{c}\nabla_r)h+ch(\mathbf{r},\mathbf{c},t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}c\int\rho(c')k(\mathbf{c},\mathbf{c}')h(\mathbf{r},\mathbf{c}',t)d^3c', \qquad (1)$$

где $$\rho(c)=\pi^{-3/2}ce^{-c^2}, \qquad k(\mathbf{c},\mathbf{c}')=1+\frac{3}{2}\mathbf{cc}'+\frac{1}{2}(c^2-2)(c'^2-2).$$

Вильямс М.М.Р. получил уравнение (1) на основании релаксационного кинетического уравнения с частотой столкновений молекул пропорциональной модулю молекулярной скорости.

Кейз К. предложил метод, позволяющий в явном виде построить решения уравнений переноса нейтронов, родственных к уравнению (1). Метод состоит в разложении решения по собственным обобщенным сингулярным функциям характеристического уравнения, соответствующего исходному кинетическому уравнению. Система собственных функций, отвечающая уравнению, должна быть полной в смысле метрики некоторого функционального пространства, но до Кейза в нее включали только регулярные собственные функции. Возможность применить идеи Кейза К. к решению физических задач (задачи Милна, задачи Рэлея, задачи распространения звука в ультрарелятивистском газе и др.) привлекла к ним внимание многих ученых: П. Цвайфеля, Ч. Сиверта, Х. Фриш, Ю. Фриш, У. Гринберга и др. В их работах метод Кейза К. был распространен на другие классы интегро-дифференциальных уравнений.

В силу сложного характера нелинейного пятимерного интеграла столкновений уравнения Больцмана используют его модели, сохраняющие основные свойства последнего, но более удобные для исследования. Наиболее употребительным модельным интегралом столкновений является интеграл столкновений в форме БКВ (Больцман, Крук, Веландер). Черчиньяни К. в 1962 году использовал метод Кейза для получения аналитического решения БКВ-модели уравнения Больцмана. Эта модель часто называется также БГК-моделью (Бхатнагар, Гросс, Крук). Для вывода уравнения (1) Вильямс М.М.Р. использовал интеграл столкновений типа БКВ.

Круг вопросов рассматриваемых в диссертационном исследовании связан с построением аналитических решений граничных задач, поставленных для уравнения (1). В первой главе рассматривается проблема построения точного решения в функциональных пространствах (пространствах Лебега). Функциональный подход в теории переноса разрабатывался многими учеными, в частности вопросам существования следов (граничных значений) у функций с сохранением свойств гладкости, существования решений уравнений переноса, а также исследованию свойств гладкости решений посвящены работы Владимирова В.С., Гермогеновой Т.А., Агошкова В.И., Шутяева В.П.. Значительные результаты, касающиеся разрешимости задач, поставленных для уравнения переноса, в пространствах Лебега, получены В.И. Агошковым. Современное развитие вычислительной техники позволяет при рассмотрении прикладных задач (в частности задач о переносе частиц) использовать алгоритмы нахождения приближенного решения. Построение точного решения - другой метод рассмотрения тех же задач. Этот метод позволяет получить решение в явном виде. Отметим, что в первой главе диссертации основной целью является построение аналитического решения исследуемой задачи в пространствах Лебега. Этот вопрос для простых классов кинетических уравнений впервые был рассмотрен в работах Ларсена Е., Гринберга Б., Цвайфеля П., которые получили их аналитические решения в пространствах L_p ($p>1$).

Интегро-дифференциальные уравнения, являясь математическими объектами, возникают при рассмотрении физических проблем, поэтому отметим работы Г.Я. Румянцева по теории переноса нейтронов в плоских решетках, М.В. Масленникова по проблеме Милна с анизотропным рассеянием, Ю.И. Ершова, С.Б. Шихова и А.В. Крянева по вопросам математической теории реакторов. А также работу Гермогеновой Т.А., в которой рассматривается полнота системы собственных функций характеристического уравнения, и работу Фельдмана И.А., содержащую обоснование конечности дискретного спектра. Значительный вклад в метод Кейза внесли Латышев А.В. и Юшканов А.А., разработавшие методику сведения интегрального уравнения к краевой задаче Римана-Гильберта, что позволило подключить к решению задач мощный аппарат ТФКП.

Задача Рэлея для модельного кинетического уравнения с интегралом столкновений в форме БКВ впервые была решена в работах Черчиньяни К. В дальнейшем Латышевым А.В. и Юшкановым А.А. получено решение нестационарного кинетического БКВ-уравнения при критических значениях параметров движения стенки, ограничивающей занятое газом полупространство.

Рассмотренные в настоящей диссертации вопросы являются продолжением и обобщением результатов, полученных А.В. Латышевым и А.А. Юшкановым для стационарных и нестационарных модельных кинетических уравнений.

Цель работы. При моделировании различных физических процессов возникает целый ряд уравнений вида (1), для которых поставлены граничные задачи, с заданными начальным условием и асимптотикой на бесконечности. Цель работы заключается в исследовании поставленных граничных задач и получении аналитических представлений для их решений.

Научная новизна работы. Все результаты данной работы получены автором впервые. Основные результаты автора, выносимые на защиту:

1. Для модели уравнения (1), записанной в операторной форме, выведено интегральное представление оператора переноса и интегральное представление для резольвенты. Доказано, что формулы (далее называемые С-преобразованиями, см. ниже формулы (6) и (7)), полученные Кейзом К. при решении граничных задач в пространстве гельдеровских функций, справедливы в пространствах суммируемых функций L_p (p>1). Показано, что операторная функция, порождаемая оператором переноса, является аналогом раз-

ложения единицы в гильбертовом пространстве. Разработанный метод позволяет получить аналитические представления решений граничных задач в пространствах Лебега (p>1), что для исследуемого класса уравнений известно не было.

2. Найдено аналитическое решение задачи Рэлея для нестационарного уравнения (1). В явном виде построено решение задачи. Исследован спектр, возникающий при приведении нестационарного скалярного уравнения к стационарному, и его влияние на количество решений соответствующего стационарного уравнения.

3. Впервые проведено полное исследование общей граничной задачи для уравнения Вильямса(1).

Научная и практическая ценность работы. Результаты работы относятся к теории аналитических решений кинетических уравнений. Отметим, по крайней мере, два направления проведенного исследования, имеющих прикладное значение: применение методов функционального анализа (спектральной теории линейных операторов) для получения решений граничных задач в пространствах Лебега и использование полученных результатов при решении конкретных задач математической физики, в частности при исследовании граничных задач кинетической теории газа и плазмы.

Апробация работы и публикации. Результаты проведенных исследований докладывались и публиковались на ежегодных научных конференциях МПУ-МГОУ (Москва, 1998-2003 гг.), на международных научно-технических конференциях, включая конференции "Математика, компьютер, образование" в г. Дубна в 1998 г., в 2000 г. и в г. Пущино в 2001 г., "Математические модели нелинейных возбуждений, переноса, динамики, управления в конденсированных системах и других средах" в г. Тверь в 1998 г., на научно-исследовательском семинаре кафедры математического анализа Московского государственного областного университета. По материалам диссертации опубликовано 11 работ.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и библиографии. Объём работы составляет 120 страниц текста, в том числе 13 рисунков. Библиография включает в себя 71 наименование и публикации диссертанта по теме исследования.

Основное содержание работы

Во введении представлен обзор предшествующих результатов, обосновываются цели, актуальность, новизна и практическая значимость исследования, в реферативной форме изложены основные результаты диссертации.

В главе 1 получены аналитические представления решения полупространственных граничных задач для стационарных уравнений вида

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,\mu)+\psi(x,\mu)=\frac{3}{4}c\int_{-1}^{1}(1-\mu'^2)\psi(x,\mu')d\mu', \qquad (2)$$

здесь $x\in(0,+\infty)$, $\mu\in(-1,1)$, $c\in R^+$ $(c\neq 1)$, $\psi(x,\mu)\in\Re$,

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,\mu)+\psi(x,\mu)-\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(1-\mu'^2)\psi(x,\mu')d\mu'=q(x,\mu), \qquad (2a)$$

здесь $x\in(0,+\infty)$, $\mu\in(-1,1)$, $q(x,\mu)\in L_p\,(p>1)$, $\psi(x,\mu)\in\Re$.

Через $\Re$ обозначается множество функций $f(x,\mu)$ непрерывных по x на полуоси $x\in[0,+\infty]$ при всех $\mu\in(-1,1)$; удовлетворяющих условию Гельдера по μ на промежутке $[0,1]$ при всех $0<x<+\infty$; непрерывно дифференцируемых по x на полуоси $x\in(0,+\infty)$ при всех $\mu\in(-1,1)$ и интегрируемых по μ на $(-1,1)$ при всех $x\in(0,+\infty)$ с весом $\rho(\mu)=1-\mu^2$.

В параграфе 1.1 разделение переменных в уравнении (2) приводит к выражению

$$\psi_\eta(x,\mu)=\exp(-x/\eta)\Phi(\eta,\mu),\ \eta\in C\backslash\{0\}, \qquad (3)$$

здесь функции $\psi_\eta(x,\mu)$ - семейство решений уравнения (2), зависящие от произвольного параметра η, вообще говоря, комплексного.

Используя (3), сводим уравнение (2) к характеристическому

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\frac{3}{4}c\eta n(\eta),\quad \eta\in C\backslash\{0\},\quad n(\eta)=\int_{-1}^{1}(1-\mu'^2)\Phi(\eta,\mu')d\mu'.$$

Спектр комплексного параметра η есть объединение непрерывного спектра (интервал $(-1,1)$) и дискретного, значения которого являются решениями уравнения $\Lambda_c(z)=0$ и зависят от коэффициента $c\in(0,+\infty)$.

Собственными функциями непрерывного спектра называются решения характеристического уравнения, принадлежащие классу обобщенных функций

$$\Phi(\eta,\mu)=\frac{3}{4}c\eta P\frac{1}{\eta-\mu}+(1-\eta^2)^{-1}\Lambda_c(\eta)\delta(\eta-\mu),\ \eta\in(-1,1),$$

здесь $\Lambda_c(\eta)=1+\frac{3}{4}c\eta\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)\frac{d\mu}{\mu-\eta}$ - дисперсионная функция, $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака, P(1/x) - обозначение для обобщенной функции $P\left(\frac{1}{x},\phi\right)=V.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\phi(x)}{x}dx$.

В параграфе 1.2 исследуются свойства собственных функций непрерывного спектра.

Доказывается (теорема 2.1), что для них справедливо следующее соотношение ортогональности

$$\int_{-1}^{1}\mu(1-\mu^2)\Phi(\eta,\mu)\Phi(\eta',\mu)d\mu=N(\eta)\delta(\eta-\eta'),\ \eta\neq\eta',\quad \eta,\eta'\in(-1,1),$$

здесь
$$N(\eta)=\eta(1-\eta^2)^{-1}\left[\Lambda_c^2(\eta)+\left(\frac{3}{4}c\pi\eta(1-\eta^2)\right)^2\right]. \qquad (4)$$

Так как область аналитичности дисперсионной функции $\Lambda_c(z)$ уже, чем необходимо при решении полупространственных граничных задач, в параграфе 1.3 формулируется задача факторизации (или соответствующая однородная краевая задача Римана-Гильберта), заключающаяся в нахождении функции *X(z),* аналитической в C\[0,1], для которой выполняется соотношение

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)}=\frac{\Lambda_c^+(\mu)}{\Lambda_c^-(\mu)},\quad 0<\mu<1,$$

где Λ_c^+, Λ_c^-, X^-, X^+ - граничные значения соответствующих функций на разрезе (0,1). Для дисперсионной функции граничные значения имеют вид:

$$\Lambda_c^{\pm}(\eta)=1+\frac{3}{4}c\eta\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)\frac{d\mu}{\mu-\eta}\pm\frac{3}{4}\pi i c\eta(1-\eta^2).$$

Приведем решение краевой задачи Римана-Гильберта:

$$X(z)=\frac{1}{z^{\chi(c)}}\exp(V(z)),$$

$$\mathbf{X(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\left[\ln\frac{\Lambda_c^+(\tau)}{\Lambda_c^-(\tau)}-2\pi i\chi(c)\right]\frac{d\tau}{\tau-z},\ \chi(c)=\begin{cases}0, c\in(0,2/3],\\ 1, c\in(2/3,+\infty).\end{cases}$$

Далее доказывается, что для функции *X(z)* справедливо интегральное представление:

$$X(z)=\frac{3}{4}c\int_0^1(1-\tau^2)\tau\frac{X^+(\tau)}{\Lambda_c^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z},\qquad z\in C\setminus[0,1].$$

В параграфе 1.4 уравнение (2) представляется в операторной форме с помощью оператора K

$$(K\psi)(x,\mu)=\frac{1}{\mu}\left[\psi(x,\mu)-\frac{3}{4}c\int_{-1}^1(1-\mu'^2)\psi(x,\mu')d\mu'\right]. \qquad \textbf{(5)}$$

Обозначим через H_p множество функций $f(\mu)$ таких, что $f(\mu)\mu(1-\mu^2)\in H[-1;1]$, где H[-1,1] - класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на множестве [-1,1].

Доказывается (теорема 4.1), что разложение функции $f(\mu)\in H_p$, по собственным функциям в случае $0<c\leq 2/3$ (т.е. при отсутствии дискретного спектра) имеет вид:

$$f(\mu)=\int_{-1}^1 a(\eta)\Phi(\eta,\mu)d\eta, \qquad (6)$$

где

$$a(\eta)=\frac{1}{N(\eta)}\int_{-1}^1\mu(1-\mu^2)f(\mu)\Phi(\eta,\mu)d\mu, \qquad (7)$$

а $N(\eta)$ находится по формуле (4). Формулы (6), (7) назовем С- преобразованиями (прямым и обратным) для случая $0<c\leq 2/3$.

В случае $c>2/3$ $(c\neq 1)$ кроме непрерывного существует дискретный спектр, включающий в себя два собственных значения $\pm\eta_0$, поэтому С- преобразованиями назовем формулы (8), (9) и (6):

$$f(\mu)=a(\eta_0)\Phi_{\eta_0}(\mu)+a(-\eta_0)\Phi_{-\eta_0}(\mu)+\int_{-1}^1 a(\eta)\Phi(\eta,\mu)d\eta, \qquad (8)$$

$$a(\pm\eta_0)=\frac{1}{N(\pm\eta_0)}\int_{-1}^1\mu(1-\mu^2)f(\mu)\Phi_{\pm\eta_0}(\mu)d\mu. \qquad (9)$$

Доказывается, что введенные С-преобразования применимы в пространствах Лебега (L_p, $p>1$).

Теорема. *Область определения оператора переноса K может быть расширена до пространства* $X_p=\{f(\mu):\mu(1-\mu^2)f(\mu)\in L_p(-1,1)\}$ *с нормой*

$$\|f\|_{X_p}=\left(\int_{-1}^1|\mu(1-\mu^2)f(\mu)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,\qquad p>1,$$

и С-преобразованиш (6) и (7) справедливы для любой функции $f(\mu)\in X_p$.

В этом случае коэффициент разложения $a(\eta)\in Z_p$, где $Z_p=\{a(\eta):\eta a(\eta)\in L_p(-1,1)\}$ - нормированное пространство, с нормой

$$\|a\|_{Z_p}=\left(\int_{-1}^{1}|\eta a(\eta)|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,\qquad p>1.$$

Для введенного в параграфе 1.5 оператора $\mathbf{E}(\omega)$

$$E(\omega)f(\mu)=\int_{-1}^{\omega}a(\eta)\Phi(\eta,\mu)d\eta,\ \omega\in(-1,1),$$

порождаемого оператором переноса, доказано выполнение свойств аналогичных свойствам разложения единицы в гильбертовом пространстве. Поэтому далее $\mathbf{E}(\omega)$ рассматривается как аналог разложения единицы в пространствах Лебега (при p=2 - гильбертово пространство) или иначе спектральная мера оператора переноса. Спектральная мера $\mathbf{E}(\omega)$ позволяет найти интегральное представление оператора переноса K^{-1}.

В параграфе 1.6 развитый аппарат применяется для решения полупространственной однородной граничной задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,\mu)+K\psi(x,\mu)=0,\ x>0,\ \psi(x,\mu)\in\Re,$$

$$\psi(+0,\mu)=\psi_0(\mu),\ 0<\mu<1,\ \psi_0(\mu)\in H[0,1],\ \mu(1-\mu^2)\psi_0(\mu)\in L_p(0,1),$$

$$\psi(+\infty,\mu)=0,\ -1<\mu<0.$$

Здесь *H[0,1]* - класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера на множестве [0,1]. Полученное решение имеет вид

$$\psi(x,\mu)=\int_0^1\exp(-x/\eta)d\left[E(\eta)\psi_e\right](\mu),$$

где

$$\psi_e(\mu)=\begin{cases}\psi_0(\mu), & 0\le\mu\le1,\\ \dfrac{3}{4}c\displaystyle\int_0^1\frac{s(1-s^2)\psi_0(s)}{\Lambda_c(s)(s-\mu)}ds, & -1\le\mu<0,\end{cases}$$

функция $\psi_0(\mu)$ определена на [0,1].

Разработанный метод применен также для решения неоднородного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,\mu)+K\psi(x,\mu)=q_0(x,\mu),\ \ \psi(x,\mu)\in\Re,$$

где $$q_0(x,\mu) = \frac{1}{\mu} q(x,\mu) \in X_p,\ p>1.$$

Решение этого уравнения

$$\psi(x,\mu) = \int_{-1}^{1} d\left[E(\eta)\psi_\eta\right](x,\mu),$$

здесь $$\psi_\eta(x,\mu) = \exp\left(\frac{x_0 - x}{\eta}\right)\psi_\eta(x_0,\mu) + \int_{x_0}^{x} \exp\left(\frac{s-x}{\eta}\right) q_0(s,\mu)ds, \text{ при } \eta>0,$$

$$\psi_\eta(x,\mu) = \exp\left(\frac{x_1 - x}{\eta}\right)\psi_\eta(x_1,\mu) + \int_{x_1}^{x} \exp\left(\frac{s-x}{\eta}\right) q_0(s,\mu)ds, \text{ при } \eta<0.$$

При рассмотрении уравнения (2) случай равенства коэффициента *c* единице был исключен. Он отдельно исследуется в уравнении (2а). Это связано с тем, что введенный в параграфе 1.7 для уравнения (2а) оператор переноса неограниченный и необратимый, поэтому определим подпространство пространства X_p - области определения оператора *K:*

$$Y_p = \left\{ f \in X_p:\ \int_{-1}^{1} \mu^\alpha (1-\mu^2) f(x,\mu) d\mu \neq 0,\ \alpha = 1,2 \right\},$$

такое что сужение оператора K на это подпространство - оператор $K|Y_P$ - обратимый оператор. Доказывается (теорема 7.1), что область определения оператора *K* разлагается в прямую сумму: $X_p = Y_p \oplus Y_{p_0}$,

здесь $Y_{p_0} = S_p\{e_0, e_1\}$ - линейная оболочка, натянутая на векторы $e_0(x,\mu) = 1$ и $e_1(x,\mu) = \mu$.

Введение оператора $K|Y_p$ позволяет воспользоваться результатами предыдущих параграфов в отношении уравнения (2а). Для резольвенты выводится интегральное представление и показывается, что С-преобразования, определенные формулами (6), (7) на [-1,1] применимы в области определения оператора переноса.

В параграфе 1.8 рассматривается граничная задача, состоящая из уравнения (2.а) и граничных условий вида:

$$\psi(0,\mu)=0,\ 0<\mu<1, \tag{10}$$

$$\psi(x,\mu)=x-\mu+o(1),\ x\to\infty,\ -1<\mu<0. \tag{11}$$

Находится разложение решения граничной задачи (2.а), (10), (11) по собственным функциям в пространствах L_p (p>1).

В главе 2 находится аналитическое решение граничной задачи, поставленной для нестационарного уравнения (1):

$$\frac{\partial\psi(x,\mu,t)}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi(x,\mu,t)}{\partial x}+\psi(x,\mu,t)=\frac{3}{4}c\int_{-1}^{1}(1-\mu'^2)\psi(x,\mu',t)d\mu', \qquad (12)$$

здесь $x\in(0,+\infty)$, $\mu\in(-1,1)$, $t\in(0,+\infty)$, $c\in R^+$,

с граничными условиями

$$\psi(0,\mu,t)=2u_0e^{st}, \quad 0<\mu<1, \quad t>0, \quad s\in C, \qquad (13a)$$

$$\psi(\infty,\mu,t)=0, \quad -1<\mu<0, \quad t>0, \quad s\in C. \qquad (13b)$$

Граничная задача (12, 13a-b) - задача Рэлея - задача нахождения отклика газа (функции распределения $\psi(x,\mu,t)$) на движение пластины, ограничивающей этот газ.

В параграфе 2.1, применяя метод Фурье, переходим от исходного нестационарного уравнения (12) к стационарному с комплексным параметром s. Для этого положим

$$\psi(x,\mu,t)=T_s(t)\varphi(x,\mu,s),$$

здесь $T_s(t)=\exp(st)$. а $\varphi(x,\mu,s)$ - функция, дифференцируемая по x и интегрируемая по μ на интервале (-1,1) с весом $\rho(\mu)=1-\mu^2$.

Полученное стационарное уравнение имеет вид

$$\mu\frac{\partial\varphi(x,\mu,s)}{\partial x}+(s+1)\varphi(x,\mu,s)=\frac{3}{4}c\int_{-1}^{1}(1-\mu'^2)\varphi(x,\mu',s)d\mu', \; s\in C,$$

а соответствующее ему характеристическое уравнение (уравнение на неизвестные функции $\varphi_\eta(x,\mu,s)$)

$$(\eta-\mu)(s+1)\Phi(\eta,\mu,s)=\frac{3}{4}c\eta\int_{-1}^{1}(1-\mu'^2)\Phi(\eta,\mu',s)d\mu'. \qquad (14)$$

Спектр характеристического уравнения состоит из объединения непрерывного спектра (интервал (-1,1)) и дискретного, который в зависимости от значений параметра s является пустым множеством или содержит одну или две точки. Собственные функции непрерывного спектра имеют вид

$$\Phi(\eta,\mu,s)=\frac{3}{4}c\eta P\frac{1}{\eta-\mu}+(1-\eta^2)^{-1}\Lambda_c(\eta,s)\delta(\eta-\mu), \; \eta\in(-1,1),$$

здесь $\Lambda_c(\eta,s)=s+1+\frac{3}{4}c\eta\int_{-1}^{1}\frac{(1-\mu^2)}{\mu-\eta}d\mu$ - дисперсионная функция.

В параграфе 2.2 рассматривается зависимость между значениями спектрального параметра s ($s=\sigma+i\omega$) и индексом краевой задачи Римана-Гильберта $\chi(s)$, соответствующей характеристическому уравнению (14).

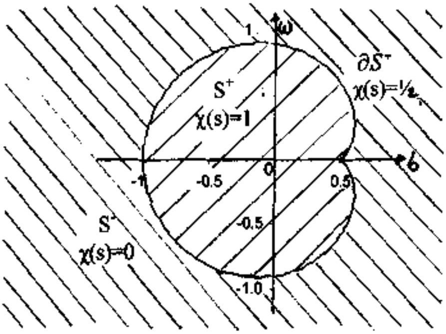

Рис.1 Плоскость комплексного параметра s. При $s\in S^+$: $\chi(s)=1$; при $s\in\partial S^+$: $\chi(s)=1/2$; при $s\in S^-$: $\chi(s)=0$.

В явном виде находятся формулы для вычисления нулей дисперсионной функции $\eta_0(s)=\pm\frac{1}{X(0,s)}\sqrt{\frac{s+1}{s}}$.

В параграфе 2.3 показывается, что, при стремлении параметра η к нулям дисперсионной функции, собственная функция непрерывного спектра переходит в собственную функцию дискретного спектра.

В параграфе 2.4 решается граничная задача (12), (13a-b). Оказалось, что решение различно для случая $s\in S^+$ (когда индекс краевой задачи Римана равен единице), и для случая $s\in S^-$ (индекс равен нулю).

В параграфе 2.5 граничная задача решается для критического случая, когда спектральный параметр s принадлежит границе ∂S^+.

В параграфе 2.6 продолжается исследование граничной задачи. В явном виде строится решение $\psi(x,\mu,t)$ при $\mu<0$, x=0. Это решение исследуется при различных значениях параметра $s\in C$. Показывается непрерывность решения $\psi(x,\mu,t)$ в плоскости комплексного параметра s.

В главе 3 рассматривается линеаризованное уравнение Вильямса, одномерное и стационарное. Разложение функции распределения по трем ортогональным направлениям позволяет перейти от него к векторному уравнению

$$\mu\frac{\partial h(x,\mu)}{\partial x}+h(x,\mu)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}K(\mu,\mu')h(x,\mu')d\mu',\ K(\mu,\mu')=\begin{pmatrix}1 & 4\alpha & 0\\ 6\alpha\mu\mu' & 3\mu\mu' & 3\alpha\mu\mu'\\ 0 & \alpha & 1\end{pmatrix}, \qquad (15)$$

здесь $x\in(0,+\infty)$, $\mu\in(-1,1)$, $\alpha\in R$.

В параграфе 3.1 приводится вывод уравнения (15) и формулируются граничные условия:

$$h(0,\mu)=h_0(\mu)=\left(h_{01}(\mu),h_{02}(\mu),h_{03}(\mu)\right)^T,\qquad 0<\mu<1, \qquad (16)$$

$$h(x,\mu)=h_{as}(x,\mu)+o(1),\ \ x\to\infty,\quad -1<\mu<0, \qquad (17)$$

здесь T - означает транспонирование, $h_{0i}(\mu)\in H[0,1]$ при i=1,2,3, а функция $h_{as}(x,\mu)$ определяется ниже, как линейная комбинация собственных решений дискретного спектра.

В параграфе 3.2, разделяя переменные, получаем векторное характеристическое уравнение $(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{2}\eta\int_{-1}^{1}K(\mu,\mu')\Phi(\eta,\mu)d\mu'$,

которое далее приводится к виду $(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu)=\frac{1}{2}\eta\Delta(\mu,\eta)n(\eta)$,

здесь $n(\eta)=\int_{-1}^{1}\Phi(\eta,\mu')d\mu'$, $\Delta(\mu,\eta)=\begin{pmatrix}1 & 4\alpha & 0\\ 0 & 3c\mu\eta & 0\\ 0 & \alpha & 1\end{pmatrix}$, $c=1-9\alpha^2$.

Собственные векторы характеристического уравнения, отвечающие непрерывному спектру, можно представить в виде $\Phi(\eta,\mu)=\tilde{\Phi}(\eta,\mu)n(\eta)$, где

$$\tilde{\Phi}(\eta,\mu)=\frac{1}{2}\eta\Delta(\mu,\eta)P\frac{1}{\eta-\mu}+\Lambda_c(\eta)\delta(\eta-\mu),\qquad \mu,\ \eta\in(-1,1) \qquad (18)$$

- собственные матрицы непрерывного спектра, которые выражаются через дисперсионную матрицу

$$\Lambda_c(z)=\begin{pmatrix}\lambda_0(z) & 2\alpha zt(z) & 0\\ 0 & \omega_c(z) & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\alpha zt(z) & \lambda_0(z)\end{pmatrix}.$$

Здесь $t(z) = \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\mu - z}$, $\lambda_0(z) = 1 + \frac{1}{2} z t(z)$, $\omega_c(z) = 1 + 3cz^2 \lambda_0(z)$,

дисперсионная функция $\lambda_c(z) = \det \Lambda_c(z) = \lambda_0^2(z)\omega_c(z)$.

Собственные векторы, отвечающие дискретному спектру при $\forall c \in (-\infty, 1]$ (нули функции $\lambda_0(z)$): $h^{(1)}(x,\mu) = (1,0,0)^T$; $h^{(2)}(x,\mu) = (0,0,1)^T$; $h^{(3)}(x,\mu) = (0,\mu,0)^T$; $h^{(4)}(x,\mu) = (x-\mu)\left(-\frac{1}{2},0,1\right)^T$; при 0<c<1 к ним добавляется еще два, отвечающих значениям дискретного спектра $\pm\eta_0$ (нулям функции $\omega_c(z)$)

$h_{\pm\eta_0}(x,\mu) = \exp(-x/\pm\eta_0)\Phi(\pm\eta_0,\mu)$, где $\Phi(\pm\eta_0,\mu) = \frac{1}{2}(\pm\eta_0)\frac{\Delta(\mu,\pm\eta_0)}{\pm\eta_0 - \mu} m(\pm\eta_0)$.

В параграфе 3.3 для факторизации матричного коэффициента решается однородная векторная краевая задача Римана-Гильберта.

В параграфе 3.4 решается граничная задача (15), (16), (17) при различных значениях параметра а, входящего в ядро $K(\mu,\mu')$.

Теорема. *Граничная задача* (15), (16), (17) *при 0<c<1 имеет единственное решение, представимое в виде разложения по собственным векторам дискретного спектра и собственным матрицам непрерывного спектра*

$$h(x,\mu) = h_{as}(x,\mu) + A_0 h_{\eta_0}(x,\mu) + \int_0^1 \exp(-x/\eta)\Phi(\eta,\mu)A(\eta)d\eta. \qquad (19)$$

$$h_{as}(x,\mu) = \left(q_0 - \frac{1}{2}q_3(x-\mu), q_1\mu, q_2 + q_3(x-\mu)\right)^T,$$

где q_1 и q_3 -заданные постоянные, а собственные матрицы непрерывного спектра имеют вид (18).

В разложении (19) *неизвестными являются коэффициенты A_0, q_o, q_2 - отвечающие дискретному спектру и вектор-функция $A(\eta)$, являющаяся коэффициентом непрерывного спектра.*

В явном виде найдены все неизвестные коэффициенты разложения (19). Доказательство единственности основано на невозможности нетривиального разложения вектор-нуля по собственным векторам характеристического уравнения.

В качестве замечания к доказанной теореме рассматривается случай отрицательных значений параметра с.

Отдельно рассматривается случай c=1, когда $h_{as}(x,\mu)$ определяется как комбинация всех шести дискретных решений, соответствующих этому случаю:

$$h_{as}(x,\mu) = \left(j_1 + j_2(x-\mu), j_3\mu + j_4\mu(x-\mu), j_5 + j_6(x-\mu)\right)^T,$$

где j_2, j_4 и j_6 - заданные постоянные, j_1, j_3 и j_5 - неизвестные константы.

Общая формула разложения решения граничной задачи при $\forall c \in (-\infty, 1]$ $(c \neq 0)$ имеет вид:

$$h(x,\mu) = h_{as}(x,\mu) + \chi_+(c)\cdot A_0 h_{\eta_0}(x,\mu) + \int_0^1 \exp(-x/\eta)\Phi(\eta,\mu)A(\eta)d\eta, \qquad (20)$$

здесь
$$\chi_+(c) = \begin{cases} 1, & 0 < c < 1, \\ 0, & c < 0,\ c = 1. \end{cases}$$

Формула (20) вместе с явными представлениями коэффициентов непрерывного и дискретного спектров дает решение граничной задачи (15), (16), (17) при $\forall c \in (-\infty, 1]$ $(c \neq 0)$.

Основные положения выносимые на защиту.

1. Для оператора *K* (5) найдена область определения и показано, что коэффициент непрерывного спектра осуществляет непрерывное отображение одного нормированного пространства: $X_p = \{f(\mu): \mu(1-\mu^2)f(\mu) \in L_p(-1,1)\}$ в другое: $Z_p = \{a(\eta): \eta a(\eta) \in L_p(-1,1)\}$. Показано, что оператор переноса K^{-1} порождает аналог разложения единицы $E(-1,\omega)$ - его спектральную меру. Получено интегральное представление оператора переноса. Показано, что оператор переноса коммутирует с «разложением единицы». Развитый аппарат применен для решения полупространственной однородной граничной задачи, поставленной для уравнения (2).

2. Для уравнения (2а) введен оператор *K,* который является замкнутым, неограниченным и необратимым на всей области определения. Показано, что область определения оператора *K* разлагается в прямую сумму двух пространств, в одном из которых этот оператор обратим, поэтому рассмотрено сужение оператора *K* на это пространство. Выведено интегральное представление для резольвенты и показано, что C-преобразования на (-1,1)

применимы в области определения оператора переноса K^{-1}. С помощью развитой теории получено разложение решения полупространственной граничной задачи по собственным функциям в пространствах Лебега.

3. Решена полупространственная граничная задача, поставленная для нестационарного уравнения (12).
4. Проведено полное исследование общей граничной задачи для линеаризованного уравнения (15) при различных значениях параметра а.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Рындина СВ., Луканкин Г.Л., Латышев А.В. Аналитическое решение общей граничной задачи для БКВ-уравнения // Владикавказский математический журнал - 2002. - Т. 4. - Вып. 4. - С. 4-33 - 4-46.
2. Рындина СВ., Луканкин Г.Л., Латышев А.В. Граничная задача для одного класса линейных релаксационных нестационарных уравнений // Известия МАНВШ.-2001.-№2(16)-С 94-102.
3. Рындина СВ., Латышев А.В. Общая граничная задача для БКВ-уравнения // Сборник научных трудов, посвященный 100-летию со дня рождения проф. Темлякова «Комплексный анализ и математическая физика» - М.: МГОУ, 2003.-С. 154-161.
4. Рындина СВ. Граничная задача для Э.-С. уравнения с переменной частотой// VII международная конференция «Математика, компьютер, образование»: Тезисы докладов. - Дубна, 2000. - С.172.
5. Рындина СВ. Полупространственная граничная задача для Э.-С уравнения с частотой столкновений, пропорциональной скорости// Тезисы докладов III Международной научной конференции «Математические модели нелинейных возбуждений, переноса, динамики, управления в конденсированных системах и других средах». - Тверь, 1998. - С. 121.
6. Рындина СВ. Операторный подход к решению модельных кинетических уравнений// Сборник научных трудов «Актуальные проблемы науки в исследованиях российских и зарубежных ученых». М., сентябрь 2000. - 3с.

7. Рындина СВ. Решение одного класса модельных кинетических уравнений в пространствах Lp .- Деп. в ВИНИТИ от 19.10.00, №2657-В00.
8. Рындина С.В. Решение граничной задачи для линеаризованного БКВ-уравнения// Межвузовский сборник научных трудов «Вестник математического факультета». - Архангельск: Изд-во Поморского государственного университета, 2001. - Вып. 5.- 3с.
9. Рындина СВ. Нестационарное уравнение для одного класса линейных, релаксационных, кинетических уравнений. - Деп. в ВИНИТИ от 19.10.00, NQ2655-В00.
10. Рындина СВ. Граничная задача для одного класса векторных модельных уравнений Больцмана.- Деп. в ВИНИТИ от 19.10.00, №2656-В00.
11. Рындина СВ. Граничная задача для одного класса кинетических нестационарных уравнений// VIII международная конференция «Математика, компьютер, образование»: Тезисы докладов. - М., 2001. - С. 179.