КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Шурыгин Вадим Вадимович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ПУАССОНОВЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2006

Работа выполнена на кафедре геометрии Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент **Малахальцев Михаил Арменович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Лосик Марк Вольфович,**
	доктор физико-математических наук, профессор **Яковлев Евгений Иванович**
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 20 апреля 2006 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина.

Автореферат разослан 18 марта 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент М.А. Малахальцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время теория пуассоновых многообразий является одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов современной дифференциальной геометрии, имеющим широкие применения в математической физике (см., например, монографии В.И. Арнольда и А.Б. Гивенталя [1], М.В. Карасева и В.П. Маслова [6], В.В. Трофимова и А.Т. Фоменко [8], А. да Силвы и А. Вейнстейна [23], И. Вайсмана [25]).

Активно изучаются различные геометрические свойства пуассоновых структур, особенно в связи с задачами квантования. Здесь в первую очередь следует отметить работы Ф. Байена, М. Флато, К. Фронсдаля, А. Лихнеровича и Д. Штернхаймера [11], Дж. Донина [14], Я. Грабовского [15], М. Концевича [18], Х. Омори, Й. Маеды и А. Йошиоки [22]. Алгебраические аспекты теории деформаций пуассоновых структур исследовались в работе Й. Хюбшманна [17].

А. Лихнерович [20] ввел в расмотрение так называемые пуассоновы когомологии пуассонова многообразия и показал, что в случае симплектического многообразия они изоморфны когомологиям де Рама. Ж.-Л. Кошуль [19] ввел понятие гомологий пуассонова многообразия, впоследствии названных Ж.-Л. Брылинским каноническими.

В работе Х.-Д. Као и Ж. Чжоу [13] было начато изучение когомологий комплекса, получаемого деформацией комплекса де Рама пуассонова многообразия. Эти когомологии были названы ими квантовыми когомологиями де Рама пуассонова многообразия. В частности, было доказано, что для случая симплектического многообразия квантовые когомологии получаются деформационным квантованием когомологий де Рама. В работе Ж.-Л. Брылинского [12], с использованием результатов работ [19] и [20], был получен ряд результатов о строении дифференциального комплекса, естественным образом ассоциированного с пуассоновой структурой.

В работах Ю.М. Воробьева и М.В. Карасева [5], Й. Хюбшманна [17], И. Вайсмана [24], А.Вейнстейна [27] изучены свойства пуассоновых когомологий и приведены многочисленные примеры их вычисления. Работа в этом направлении активно ведется и в настоящее время.

Расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}}M$ гладкого многообразия M, определяемое локальной алгеброй $\mathbb{A}$ (алгеброй Вейля), было введено А. Вейлем [26]. К классу расслоений Вейля относятся, в частности, касательные расслоения. В работах Я. Грабовского и П. Урбанского [16], Г. Митрича и И. Вайсмана [21] были построены и изучены различного типа лифты симплектических и пуассоновых структур на касательные расслоения.

А.П. Широковым [10] было обнаружено, что расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}}M$ несет на себе структуру гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$. Это позволило применять при изучении геометрических структур на расслоениях Вейля методы теории многообразий над алгебрами. Изучению геометрии многообразий над коммутативными ассоциативными алгебрами и их вещественных реализаций посвящены работы А.П. Широкова [9], В.В. Вишневского [2], [3], Г.И. Кручковича [7] и других авторов (ссылки на обширную литературу можно найти в монографии В.В. Вишневского, А.П. Широкова и В.В. Шурыгина [4]). Наличие структуры гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ на расслоении Вейля $T^{\mathbb{A}}M$ приводит к появлению на этом расслоении геометрических объектов специального типа, а именно, $\mathbb{A}$-гладких геометрических объектов (в частности, $\mathbb{A}$-продолжений геометрических объектов с базового многообразия M), а также вещественных геометрических объектов, являющихся реализациями $\mathbb{A}$-гладких геометрических объектов. Реализации тензоров и тензорных операций в пространствах над фробениусовыми алгебрами посвящены работы В.В. Вишневского [3] и Г.И. Кручковича [7].

Цели работы:

1. Вычисление квантовых когомологий де Рама пуассоновых много-

образий.

2. Построение лифтов контравариантных тензорных полей и пуассоновых структур с гладкого многообразия на его расслоение Вейля.

3. Изучение свойств пуассоновых структур на расслоениях Вейля гладких многообразий, их связей с пуассоновыми структурами на базовых многообразиях и вычисление их модулярных классов.

Методы исследования. В работе используются методы геометрии и топологии пуассоновых многообразий, теории многообразий над алгебрами, теории слоений.

Научная новизна. Результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут найти применение при проведении научных исследований и чтении спецкурсов в Казанском, Московском, Нижегородском, Новосибирском и Саратовском государственных университетах.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

Международная конференция «Колмогоров и современная математика» (Москва, 16–21 июня 2003 г.).

IX Международная конференция «Дифференциальная геометрия и приложения» (Чехия, Прага, 30 августа – 3 сентября 2004 г.).

XII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 12–15 апреля 2005 г.).

Всероссийские молодежные научные конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 2003, 2005 г.).

Кроме того, результаты работы регулярно докладывались на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета и заседаниях Казанского городского геометрического семинара.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 7 работ, в том числе 5 статей и тезисы 2 докладов, сделанных на конференциях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Работа набрана в системе LaTeX и содержит 135 страниц. Список литературы насчитывает 112 наименований.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

1. Вычислены когомологии двойного комплекса Брылинского пуассонова многообразия и квантовые когомологии де Рама пуассонова многообразия.

2. Развит единый метод построения лифтов тензорных полей с гладкого многообразия M на тотальное пространство его расслоения Вейля $T^{\mathbb{A}}M$ для фробениусовой алгебры Вейля $\mathbb{A}$.

3. Показано, что операция взятия полного лифта дифференциальных форм индуцирует гомоморфизм когомологий де Рама $H^*_{dR}(M) \to H^*_{dR}(T^{\mathbb{A}}M)$. Выяснена структура этого гомоморфизма в зависимости от выбора фробениусова ковектора на алгебре $\mathbb{A}$.

4. Исследованы свойства пуассоновых структур на расслоении Вейля $T^{\mathbb{A}}M$ пуассонова многообразия (M, w), определяемых полным w^C и вертикальным w^V лифтами тензора Пуассона w. Вычислены модулярные классы пуассоновых многообразий $(T^{\mathbb{A}}M, w^C)$ и $(T^{\mathbb{A}}M, w^V)$.

Краткое содержание диссертации

Введение содержит обзор литературы по теме диссертации, обоснование актуальности выбранной темы и краткое содержание работы.

Глава 1, состоящая из 5 параграфов, носит в основном реферативный характер. Здесь приводятся необходимые для дальнейшего понятия и результаты из теории слоений, теории пуассоновых многообразий, теории локальных алгебр Вейля и многообразий над алгебрами. Также эта глава содержит ряд самостоятельных результатов автора, носящих вспомогательный характер и используемых в дальнейшем.

В **§1.1** даются определения слоения на гладком многообразии и слоевых когомологий де Рама. Приводятся некоторые результаты вычисления этих когомологий.

В **§1.2** приводится определение скобки Схоутена-Нейенхейса на внешней алгебре поливекторных полей на гладком многообразии и перечисляются ее свойства.

§1.3 посвящен краткому изложению теории пуассоновых многообразий. В п. **1.3.1** дается определение симплектического многообразия, приводятся примеры и простейшие свойства симплектических многообразий, в частности, теорема Дарбу о каноническом виде симплектической формы. В п. **1.3.2** приводятся определения скобки Пуассона и тензора Пуассона на гладком многообразии, определение регулярного пуассонова многообразия. Также здесь приводятся теоремы А. Вейнстейна о каноническом виде тензора Пуассона и теорема А. Кириллова о симплектическом слоении. В п. **1.3.3** рассматриваются пуассоновы когомологии, введенные А. Лихнеровичем, и TP-когомологии регулярного пуассонова многообразия. Приводятся некоторые результаты их вычисления. Кроме того, здесь дается определение модулярного класса пуассонова многообразия. Наконец, в п. **1.3.4** рассматривается дифференциал Ж.-Л. Кошуля на пуассоновых многообразиях, приводятся определение канонических гомологий пуассонова многообразия, данное Ж.-Л. Брылинским, и некоторые результаты их вычисления, принадлежащие автору.

В **§1.4** приводится определение локальной алгебры $\mathbb{A}$ в смысле А. Вейля, рассматриваются основные понятия, касающиеся локальных алгебр, приводится определение $\mathbb{A}$-гладкого многообразия. Также здесь вводится расслоение Вейля $\pi_{\mathbb{A}} : T^{\mathbb{A}}M \to M$ гладкого многообразия M, рассматривается структура $\mathbb{A}$-гладкого многообразия на $T^{\mathbb{A}}M$. Кроме того, приводится определение фробениусовой алгебры Вейля. **§1.5** посвящен изучению структуры фробениусовых алгебр Вейля. Он содержит ряд самостоятельных результатов автора, используемых в Главе 3.

Глава 2 посвящена рассмотрению некоторых дифференциальных комплексов, ассоциированных с пуассоновыми многообразиями и вычислению их когомологий. В **§2.1** на пуассоновом многообразии (M, w) определяется дифференциал $D = d + \delta$ и строится изоморфизм между дифференциальными группами $(\Omega^*(M), d)$ и $(\Omega^*(M), D)$. После этого вводится двойной комплекс $\mathcal{A} = (\Omega^{q-p}(M), \delta, (-1)^p d)$, построенный Ж.-Л. Брылинским. Основным результатом параграфа является

Теорема 2.1. *Для любого пуассонова многообразия (M, w) четномерные пространства когомологий комплекса $\mathcal{A}$ изоморфны прямой сумме пространств когомологий де Рама $\bigoplus\limits_{k\geqslant 0} H^{2k}_{dR}(M)$, а нечетномерные пространства когомологий комплекса $\mathcal{A}$ изоморфны прямой сумме пространств когомологий де Рама $\bigoplus\limits_{k\geqslant 0} H^{2k+1}_{dR}(M)$.*

В **§2.2** рассматривается квантовый комплекс де Рама, введенный Х.-Д. Као и Ж. Чжоу [13]. Основной результат этого параграфа:

Теорема 2.4. *Внешняя алгебра квантовых когомологий де Рама пуассонова многообразия (M, w) изоморфна внешней алгебре, полученной деформационным квантованием алгебры его когомологий де Рама.*

Доказанная теорема полностью решает задачу вычисления квантовых когомологий де Рама, поставленную Х.-Д. Као и Ж. Чжоу.

В **Главе 3** рассматриваются операции построения лифтов тензорных полей с гладкого многообразия M на тотальное пространство $T^{\mathbb{A}}M$ его расслоения Вейля для фробениусовой алгебры Вейля $\mathbb{A}$ и изучаются свойства этих лифтов, в частности, их согласованность с основными дифференциальными операциями на гладких многообразиях.

В **§3.1** рассматриваются лифты ковариантных и контравариантных тензорных полей с гладкого многообразия M на тотальное пространство расслоения $T^{\mathbb{A}}M$. В п. **3.1.1** приводится определение реализации $\mathbb{A}$-значного тензора на $\mathbb{A}$-модуле $\mathbb{L}$ и устанавливаются некоторые свойства операции реализации, такие, как инъективность и согласованность с $\mathbb{A}$-линейными отображениями $\mathbb{A}$-модулей. Пп. **3.1.2–3.1.3** посвящены рассмотрению полных лифтов тензорных полей на расслоения Вейля. Полный лифт тензорного поля t определяется как реализация его аналитического продолжения $t^{\mathbb{A}}$. Показано, что полный лифт внешних форм индуцирует гомоморфизм когомологий де Рама

$$h_{\mathbb{A}} : H^*_{dR}(M) \longrightarrow H^*_{dR}(T^{\mathbb{A}}M), \qquad [\xi] \longmapsto [\xi^C].$$

Доказана

Теорема 3.1. *Пусть $(\mathbb{A}, q)$ — фробениусова алгебра Вейля, p — ее фробениусов ковектор, $1_{\mathbb{A}}$ — единица алгебры $\mathbb{A}$, а M — гладкое многообразие. Если $p(1_{\mathbb{A}}) \neq 0$, то гомоморфизм $h_{\mathbb{A}}$ является изоморфизмом. Если $p(1_{\mathbb{A}}) = 0$, то гомоморфизм $h_{\mathbb{A}}$ является нулевым.*

Кроме того, показано, что операция взятия полного лифта сохраняет скобку Схоутена-Нейенхейса поливекторных полей на многообразии M:

$$[u, v]^C = [u^C, v^C]$$

для любых $u, v \in \mathcal{V}^*(M)$.

В п. **3.1.4** понятие вертикального лифта поливекторных полей на тотальное пространство касательного расслоения TM обобщается на случай расслоения Вейля $T^{\mathbb{A}}M$ для произвольной фробениусовой алгебры Вейля $\mathbb{A}$. Здесь устанавливаются соотношения, связывающие вертикальный лифт со скобкой Схоутена-Нейенхейса:

Предложение 3.1.8. *Для любых $u, v \in \mathcal{V}^*(M)$ имеют место соотношения*

$$a) \qquad [u, v]^V = [u^V, v^C] = [u^C, v^V];$$

$$b) \qquad [u^V, v^V] = 0.$$

Кроме того, здесь вычисляется полный лифт тензорного произведения двух тензорных полей.

§3.2 посвящен изучению пуассоновых структур, возникающих на тотальном пространстве $T^{\mathbb{A}}M$ расслоения Вейля пуассонова многообразия (M, w).

Так, в п. **3.2.1** доказано, что полный лифт w^C тензора w есть тензор Пуассона на $T^{\mathbb{A}}M$ и показано, что в том случае, когда w есть симплектическая структура, полный лифт w^C также есть симплектическая структура. Здесь показано, что полный лифт поливекторных полей индуцирует гомоморфизм когомологий Пуассона

$$H_P^*(M, w) \longrightarrow H_P^*(T^{\mathbb{A}}M, w^C), \qquad [u] \longmapsto [u^C]$$

и указано, каким образом этот гомоморфизм связан с гомоморфизмом когомологий де Рама $h_{\mathbb{A}}$, рассмотренным в п. **3.1.2**, что позволяет вычислить его для случая симплектического многообразия. Также рассмотрен ряд примеров, показывающих, что в общем случае этот гомоморфизм может иметь различные свойства в зависимости от свойств тензора Пуассона w и от размерности пространства когомологий.

Рассмотрению аналогичных вопросов для вертикального лифта w^V пуассоновой структуры посвящен п. **3.2.2**. Показано, что вертикальный лифт поливекторных полей также индуцирует гомоморфизм соответствующих когомологий Пуассона

$$H_P^*(M, w) \longrightarrow H_P^*(T^{\mathbb{A}}M, w^V), \qquad [u] \longmapsto [u^V].$$

Кроме того, здесь приведены примеры, показывающие, что в общем случае этот гомоморфизм может быть как мономорфизмом, так и иметь ненулевое ядро в зависимости от свойств тензора Пуассона w и от размерности пространства когомологий.

В пп. **3.2.3–3.2.4** показано, что полный лифт регулярной пуассоновой структуры w является регулярной пуассоновой структурой на $T^{\mathbb{A}}M$ и что имеют место естественные гомоморфизмы пространств когомологий соответствующих симплектических слоений и TP-когомологий.

Эти гомоморфизмы вычислены для случая пуассонова многообразия $M = S \times N$, являющегося произведением симплектического многообразия S и произвольного гладкого многообразия N, а именно, доказаны

Теорема 3.3. *Пусть* $(M = S\times N, \mathcal{F})$ *— многообразие со слоением* $\mathcal{F}$ *на слои* $S\times\{y\}$, $y \in N$. *Пусть* $(\mathbb{A}, q)$ *— фробениусова алгебра Вейля,* p *— ее фробениусов ковектор. Тогда для любого* $s = 0, \ldots, \dim S$ *справедливы утверждения:*

1) *При* $r \geqslant 1$ *гомоморфизм*

$$H^{r,s}(M, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{r,s}(T^{\mathbb{A}}M, \overline{\mathcal{F}}), \qquad [\xi] \longmapsto [\xi^C]$$

является мономорфизмом.

2) *При* $p(1_{\mathbb{A}}) \neq 0$ *гомоморфизм*

$$H^{0,s}(M, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{0,s}(T^{\mathbb{A}}M, \overline{\mathcal{F}}), \qquad [\xi] \longmapsto [\xi^C]$$

является мономорфизмом. При $p(1_{\mathbb{A}}) = 0$ *его ядро изоморфно* $H^s_{dR}(S)$.

Теорема 3.5. *Пусть регулярное пуассоново многообразие* (M, w) *является произведением* $M = S \times N$ *симплектического многообразия* S *и произвольного гладкого многообразия* N. *Предположим, что* $\dim H^s_{dR}(S) < \infty$.

Тогда при $p(1_{\mathbb{A}}) \neq 0$ *гомоморфизм*

$$H^s_{TP}(M, w) \longrightarrow H^s_{TP}(T^{\mathbb{A}}M, w^C), \qquad [u] \longmapsto [u^C]$$

является мономорфизмом. При $p(1_{\mathbb{A}}) = 0$ *его ядро изоморфно* $H^s_{dR}(S)$.

Наконец, п. **3.2.5** посвящен вычислению модулярных классов пуассоновых многообразий, получаемых в результате наделения тотального пространства $T^{\mathbb{A}}M$ расслоения Вейля полным w^C и вертикальным w^V лифтами пуассоновой структуры w, заданной на многообразии M. Здесь доказаны

Теорема 3.6. *Пусть* Δ_μ *— модулярное векторное поле пуассонова многообразия* (M, w). *Тогда для всякой фробениусовой алгебры Вейля*

$(\mathbb{A}, q)$ *модулярное векторное поле пуассонова многообразия* $(T^{\mathbb{A}}M, w^C)$ *имеет вид*

$$\Delta_{\overline{\mu}} = \dim \mathbb{A} \cdot \Delta_{\mu}^{V},$$

где верхний индекс V *означает вертикальный лифт.*

Теорема 3.7. *Для любой фробениусовой алгебры Вейля* $(\mathbb{A}, q)$ *модулярный класс пуассонова многообразия* $(T^{\mathbb{A}}M, w^V)$ *равен нулю.*

Список литературы

[1] Арнольд, В.И. Симплектическая геометрия / В.И. Арнольд, А.Б. Гивенталь. – Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 2000. – 168 с.

[2] Вишневский, В.В. Пространства над алгебрами, определяемые аффинорами: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.04. – 1972.

[3] Вишневский, В.В. О вещественных реализациях тензорных операций в пространствах над алгебрами / В.В. Вишневский // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 62–65.

[4] Вишневский, В.В. Пространства над алгебрами / В.В. Вишневский, А.П. Широков, В.В. Шурыгин. – Казань: Изд-во Казанского университета, 1984. – 264 с.

[5] Воробьев, Ю.М. О пуассоновых многообразиях и скобке Схоутена / Ю.М. Воробьев, М.В. Карасев // Функ. Анализ и Прилож. – 1988. – Т. 22, Вып. 1. – С. 1–11.

[6] Карасев, М.В. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование / М.В. Карасев, В.П. Маслов. – М.: Наука, 1991. – 368 с.

[7] Кручкович, Г.И. Гиперкомплексные структуры на многообразиях, I / Г.И. Кручкович // Труды семин. по вект. и тенз. анализу. – Вып. 16. – М.: Изд-во МГУ, 1972. – С. 174–201.

[8] Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко. – М.: Факториал, 1995. – 448 с.

[9] Широков, А.П. Об одном типе G-структур, определяемых алгебрами / А.П. Широков // Труды геометр. семин. / ВИНИТИ. – Т. 1. – М., 1966. – С. 425–456.

[10] Широков, А.П. Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами / А.П. Широков // Итоги науки и техники. / ВИНИТИ. – Т. 12: Проблемы геометрии. – М., 1981. – С. 61–95.

[11] Bayen, F. Deformation theory and quantization / F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer // Ann. of Physics. – 1978. – Vol. 111. – Pp. 61–110.

[12] Brylinski, J.-L. A differential complex for Poisson manifolds / J.-L. Brylinski // J. Diff. Geom. – 1988. – Vol. 28. – Pp. 93–114.

[13] Cao, H.-D. On quantum de Rham cohomology [Электронный ресурс] / H.-D. Cao, J. Zhou. – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/math.DG/9806157, свободный.

[14] Donin, J. On the quantization of Poisson brackets / J. Donin // Adv. in Math. – 1997. – Vol. 127. – Pp. 73–93.

[15] Grabowski, J. Deformational Quantization of Poisson structures / J. Grabowski // Rep. Math. Phys. – 1995. – Vol. 35. – Pp. 267–281.

[16] Grabowski, J. Tangent and cotangent lifts and graded Lie algebras associated with Lie algebroids / J. Grabowski, P. Urbański // Ann. Global. Anal. Geom. – 1997. – Vol. 15. – Pp. 447–486.

[17] Huebschmann, J. Poisson cohomology and quantization / J. Huebschmann // J. für Reine und Angew. Math. – 1990. – Vol. 408. – Pp. 57–113.

[18] Kontsevich, M. Deformation quantization of Poisson manifolds / M. Kontsevich // Lett. Math. Phys. – 2003. – Vol. 66. – Pp. 157–216.

[19] Koszul, J.-L. Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie / J.-L. Koszul // "Elie Cartan et les Math. d'Aujour d'Hui", Astérisque, hors-série. – 1985. – Pp. 251–271.

[20] Lichnerowicz, A. Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées / A. Lichnerowicz // J. Diff. Geom. – 1977. – Vol. 12. – Pp. 253–300.

[21] Mitric, G. Poisson structures on tangent bundles / G. Mitric, I. Vaisman // Diff. Geom. and Appl. – 2003. – Vol. 18. – Pp. 207–228.

[22] Omori, H. Weyl manifolds and deformation quantization / H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka // Adv. in Math. – 1991. – Vol. 85. – Pp. 224–255.

[23] Silva, A.C. da. Geometric Models for Noncommutative Algebras / A.C. da Silva, A. Weinstein. – Berkeley Lecture Notes. – 2000. — Vol. 10. – 184 pp.

[24] Vaisman, I. Remarks on the Lichnerowicz-Poisson cohomology / I. Vaisman // Ann. Inst. Fourier Grenoble. – 1990. – Vol. 40. – Pp. 951–963.

[25] Vaisman, I. Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds / I. Vaisman. – Progress in Math. – Vol. 118. – Basel: Birkhäuser, 1994. – 205 pp.

[26] Weil, A. Théorie des points proches sur les variétés différentiables / A. Weil // Colloque internat. centre nat. rech. sci. – Vol. 52. – Strasbourg, 1953. – Pp. 111–117.

[27] Weinstein, A. The modular automorphism group of a Poisson manifold / A. Weinstein // J. Geom. Phys. – 1997. – Vol. 23. – Pp. 379–394.

Список работ автора по теме диссертации

[1] Шурыгин, В.В. (мл.) Тейлоровские и лорановские квантовые когомологии де Рама симплектического многообразия / В.В. Шурыгин (мл.) // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Т. 21: Материалы III всероссийской молодежной науч. школы-конференции «Лобачевские чтения–2003», Казань, 1–4 декабря 2003 г. – Казань: Каз. мат. общ-во, 2003. – С. 243–244.

[2] Шурыгин, В.В. (мл.) Когомологии двойного комплекса Брылинского пуассоновых многообразий и квантовые когомологии де Рама / В.В. Шурыгин (мл.) // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 10 (509). – С. 75–81.

[3] Шурыгин, В.В. (мл.) О структуре кольца квантовых когомологий де Рама пуассоновых многообразий / В.В. Шурыгин (мл.) // Уч. зап-ки. / Казан. гос. ун-т. – Т. 147, кн. 1. – Казань: Изд-во КГУ, 2005. – С. 192–196.

[4] Shurygin, V.V., jr. Poisson structures on Weil bundles / V.V. Shurygin, jr. // Lobachevskii J. Math. – 2005. – Vol. 17. – Pp. 229–256.

[5] Шурыгин, В.В. (мл.) Гомоморфизм когомологий де Рама, индуцированный полным лифтом дифференциальных форм в расслоение Вейля / В.В. Шурыгин (мл.) // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Т. 31: Материалы IV всероссийской молодежной науч. школы-конференции «Лобачевские чтения–2005», Казань, 16–18 декабря 2005 г. – Казань: Каз. мат. общ-во, 2005. – С. 177–179.

[6] Shurygin, V.V., jr. On the projective limit of fibered manifolds / V.V. Shurygin, jr. // International Conference "Kolmogorov and Contemporary Mathematics", Moscow, Russia, June 16–21, 2003: Abstracts. – Moscow, 2003. – P. 853.

[7] Shurygin, V.V., jr. Brylinski cohomology of Poisson manifolds and quantum de Rham cohomology / V.V. Shurygin, jr. // 9th International Conference on Differential Geometry and its Applications, Prague, Czech Republic, August 30 – September 3, 2004: Abstracts. – Prague, 2004. – Pp. 44–45.