Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский государственный университет
им. В.И. Ульянова-Ленина"

На правах рукописи

УДК 617.98

ТУРИЛОВА ЕКАТЕРИНА АЛЕКСАНДРОВНА

СВОЙСТВА КЛАССОВ ПОДПРОСТРАНСТВ УНИТАРНОГО ПРОСТРАНСТВА, ПРИСОЕДИНЕННОГО К АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

01.01.01 - Математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ - 2003

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Казанского государственного университета.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор А. Н. Шерстнев.

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук, ст. научн.сотр. С, А. Григорян, кандидат физико-математических наук Г. Г. Амосов

Ведущая организация — Самарский государственный университет.

Защита состоится 25 декабря 2003 г. в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета К 212.081.07 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, II учебный корпус, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомила в научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "   " ноября 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Ю. Р. Агачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Различные свойства подпространств унитарного пространства (не обязательно полного) уже достаточно давно являются предметом детального изучения. Так в 1932 году Дж. фон Нейман при математическом обосновании квантовой механики использовал аппарат подпространств (замкнутых линеалов) гильбертова пространства. Поскольку вместе с каждым унитарным пространством можно рассматривать и гильбертово пространство, являющееся пополнением этого унитарного, представляет интерес изучение подпространств унитарного пространства.

На протяжении нескольких последних десятилетий значительный интерес вызывали алгебраические, топологические и порядковые свойства подпространств унитарного пространства. Исследованию этих вопросов посвящены работы И. Амемия и Х. Араки, Г. Гросса и Г. Келлера, Ж. Каттанео и Д. Марино, С. Гаддера и С. Холланда, Ж. Халмхалтера и П. Птака, А. Двуреченского.

В 30-е гг. прошлого столетия работы Дж. фон Неймана и Ф. Мюррея положили начало развитию теории операторных алгебр. Теория алгебр фон Неймана получила свое развитие и обобщение в работах Ж. Диксмье, Ш. Сакаи и М. Такесаки. Вслед за этим в работах Ф. Комба, У. Хаагерупа и Г. Педерсена, М. Такесаки была развита теория нормальных весов на алгебрах фон Неймана, которая позволила рассматривать конструкцию пространства представления алгебры фон Неймана, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом.

В 1957 г. А. Глисоном были описаны состояния на множестве подпространств сепарабельного гильбертова пространства над полем действительных или комплексных чисел (за исключением пространства размерности два). Этот результат инициировал многочисленные исследования, связанные с проблемой продолжения меры на ортопроекторах до функционала в контексте общих алгебр фон Неймана. Решениями подобных задач занимались Д. Аарнес, Д. Гансон, Е. Кристенсен, Ф. Иедон, М.С. Матвейчук. Различные вопросы, связанные с мерами и интегрированием на алгебрах фон Неймана, рассматривались в работах Г.Д. Луговой, Н.В. Трунова и А.Н. Шерстнева.

На основании вышеизложенного представляется актуальным изучение подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана, действующей в пополнении этого унитарного пространства. При этом рассматриваются подпространства, также присоединенные к алгебре фон Неймана. В такой ситуации, позволяющей соединить несколько направлений исследований, возникают не просто новые классы подпространств, но и появляются новые задачи и свойства.

Цель работы - изучение свойств классов ортозамкнутых и расщепляющих подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана. Особое внимание уделяется исследованию вопроса о совпадении классов подпространств, а также изучению связей между мерами на ортопроекторах алгебры фон Неймана и мерами на рассматриваемых классах подпространств.

Методика исследований. Основные результаты работы получены с применением методов функционального анализа и теории операторных алгебр. В ходе исследований были использованы конструкции обобщенных гильбертовых алгебр и пространства представления алгебры фон Неймана, ассоциированного с весом, а также техника работы с функциями реперного типа.

Научная новизна. В работе вводятся новые классы подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана и изучаются некоторые свойства этих классов. Кроме того, предложен топологический подход к определению меры на рассматриваемых классах подпространств, устанавливаются связи между мерами на классах подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана, и мерами на ортопроекторах этой алгебры фон Неймана. Все полученные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при изучении отдельных разделов теории операторных алгебр. Результаты, связанные с продолжением мер, допускают физическую интерпретацию и могут оказаться полезными в теории квантовых структур математической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета за 1998,1999, 2001 и 2002 гг., на XIX и XXII конференциях молодых ученых мехмата Московского государственного университета (1997, 2000 гг.), на международной школе-конференции "Алгебра и анализ", посвященной 100-летию со дня рождения Б.М.Гагаева (Казань, 1997г.), на четвертой, пятой, шестой международных школах-конференциях "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 1999, 2001, 2003 гг.). Кроме того, результаты диссертации по мере их получения неоднократно докладывались и обсуждались на городском научном семинаре "Алгебры операторов и их приложения" в Казанском государственном университете.

Публикации. По теме диссертации опубликовано восемь работ, две из которых ([2] и [8]) написаны в соавторстве с научным руководителем. В [2] анонсируются результаты работы [8]. В [8] теоремы 2, 3 и предложение 5 получены авторами статьи совместно, остальные результаты принадлежат автору данной диссертации. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация объемом в 87 страниц состоит из введения, одиннадцати параграфов, объединенных в три главы, и списка литературы, содержащего 71 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении рассматриваются основные задачи, решаемые в диссертации, приводится краткий обзор посвященных им работ и излагается краткое содержание полученных автором результатов.

В первой главе (§ 1 - 3) вводятся ортозамкнутые и расщепляющие подпространства унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана, и изучаются свойства классов названных подпространств в терминах ортогональных проекторов из алгебры фон Неймана.

В § 1 приводятся основные факты из общей теории алгебр фон Неймана, теории состояний и весов на алгебре фон Неймана. Кроме того, описывается конструкция, изучаемая в том или ином виде на протяжении двух первых глав работы: пусть S — плотный линеал в гильбертовом пространстве H, присоединенный к алгебре фон Неймана M, действующей в H. Для $X \subseteq S$ замыкание X в S будем обозначать через $\overline{X}$, а замыкание X в H через $[X]$. Вводятся следующие классы подпространств унитарного пространства S:

— класс подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана ***M:***

$$L_{\mathcal{M}}(S) = \{X \subseteq S | X = \overline{X},\ \ X \eta \mathcal{M}\},$$

— класс ортозамкнутых подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана *Л4:*

$$F_{\mathcal{M}}(S) = \{X \subseteq S | X = X^{\perp\perp},\ \ X \eta \mathcal{M}\},$$

— класс расщепляющих подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана *M.:*

$$E_{\mathcal{M}}(S) = \{X \subseteq S | X \oplus X^{\perp} = S,\ \ X \eta \mathcal{M}\}.$$

Показано, что в общем случае имеет место следующая цепочка включений:

$$E_{\mathcal{M}}(S) \subseteq F_{\mathcal{M}}(S) \subseteq L_{\mathcal{M}}(S). \qquad (1)$$

В этом параграфе описываются ортомодулярные свойсва классов подпространств, а также рассматриваются примеры линеалов, плотных в некотором гильбертовом пространстве и присоединенных к алгебре фон Неймана, действующей в этом гильбертовом пространстве. В частности, описывается случай алгебры фон Неймана с бициклическим вектором.

В § 2 приводится характеризация классов $E_{\mathcal{M}}(S)$, $F_{\mathcal{M}}(S)$, $L_{\mathcal{M}}(S)$ с помощью ортопроекторов из $\mathcal{M}$. Рассматриваются следующие классы подпространств:

$LP_{\mathcal{M}}(S) = \{\mathcal{R}(p) \cap S \mid p \in \mathcal{M}^{pr}\}$,

$FP_{\mathcal{M}}(S) = \{\mathcal{R}(p) \cap S \mid [\mathcal{R}(p) \cap S] = \mathcal{R}(p),$

$[\mathcal{R}(I-p) \cap S] = \mathcal{R}(I-p), p \in \mathcal{M}^{pr}\}$,

$EP_{\mathcal{M}}(S) = \{\mathcal{R}(p) \cap S \mid \mathcal{R}(p) \cap S = pS, p \in \mathcal{M}^{pr}\}$.

(Здесь и далее $\mathcal{R}(x)$ — область значений оператора x)

Показано, что имеют место следующие равенства:

$$LP_{\mathcal{M}}(S) = L_{\mathcal{M}}(S);\ FP_{\mathcal{M}}(S) = F_{\mathcal{M}}(S),\ EP_{\mathcal{M}}(S) = E_{\mathcal{M}}(S). \qquad \mathbf{(2)}$$

§ 3 посвящен изучению рассматриваемых классов подпространств в некоторых частных случаях в контексте исследования вопроса о совпадении классов подпространств. В случае, когда $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана $(\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}')$, доказана

ТЕОРЕМА 3.1. *Если* $p \in \mathcal{M}^{pr}$, *то* $\mathcal{R}(p) \cap S = pS$.

Из этой теоремы с учетом (1) и (2) следует цепочка равенств

$$E_{\mathcal{M}}(S) = F_{\mathcal{M}}(S) = L_{\mathcal{M}}(S).$$

Глава 2 (§ 4 - 8) посвящена подробному изучению классов подпространств в случае алгебры фон Неймана с бициклическим вектором. Такая конструкция часто возникает как результат представления алгебры фон Неймана, ассоциированного с точным нормальным состоянием. Некоторые из полученных в рамках изучения этой конструкции результатов обобщаются для случая представления алгебры фон Неймана (и в частности алгебры *B(H)),* ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом.

В § 4 приводится общий вид подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана в случае алгебры с бициклическим вектором, описывается общая конструкция представления произвольной алгебры фон Неймана, действующей в сепарабельном гильбертовом пространстве, ассоциированного с точным нормальным состоянием. С использованием этой конструкции в терминах расщепляющих подпространств получен критерий того, что точное нормальное состояние на алгебре фон Неймана является следом.

В § 5 продолжается исследование указанной конструкции применительно к алгебре $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H: пусть φ — точное нормальное состояние на алгебре $B(H)$ и гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ — пополнение $B(H)$ по скалярному произведению

$$\langle\bar{x},\bar{y}\rangle \equiv \varphi(y^*x) \quad (x,y \in B(H)).$$

(Здесь $\bar{x}$ — образ элемента x при вложении $B(H)$ в $\mathfrak{H}$.)
Пусть $\mathfrak{M} = \pi_\varphi(B(H))$ — образ $B(H)$ при каноническом представ-

лении, ассоциированном с φ, $\xi = \bar{1}$ — бициклический вектор для $\mathfrak{M}$, $S = \mathfrak{M}'\xi$. Пусть далее t — неотрицательный ядерный оператор в H, однозначно определенный по состоянию φ равенством:

$$\varphi(x) = \tau_0(tx) \quad (x \in \mathcal{B}(H)^+)$$

(здесь τ_0 — стандартный след на $B(H)$).

В этом случае, как показано в предложении 4.1,

$$L_{\mathfrak{M}}(S) \subseteq \{\mathfrak{M}' \cdot p' f_0 \mid p' \in \mathfrak{M}'^{pr}\}.$$

В рамках описанной конструкции получены критерии расщепляемости и ортозамкнутости подпространств в терминах ортопроекторов исходной алгебры фон Неймана.

ТЕОРЕМА 5.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathfrak{M}'p'\xi \in F_{\mathfrak{M}}(S)$,

(ii) $[\mathcal{R}(t) \cap \mathcal{R}(1-p)] = \mathcal{R}(1-p)$,

(iii) $\mathcal{R}(q) = \mathrm{Ker}(pt)$ *влечет* $\mathrm{Ker}(qt) = \mathcal{R}(p)$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathfrak{M}'p'\xi \in E_{\mathfrak{M}}(S)$,

(ii) *существует ортопроектор* $q \in \mathcal{B}(H)^{pr}$ *со свойствами:*

$$ptq = 0, \;\; \mathcal{R}(p) + \mathcal{R}(q) = H.$$

Кроме того, построен пример, иллюстрирующий тот факт, что рассматриваемые классы подпространств, вообще говоря, различны.

В § 6 разобрана конструкция представления полуконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом φ. Рассматривается гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, являющееся пополнением $n_\varphi = \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) < +\infty\}$ по скалярному произведению

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \equiv \varphi(y^*x) \quad (x, y \in n_\varphi)$$

(здесь $\tilde{x}$ - элемент пополнения, соответствующий $x \in n_\varphi$). В качестве алгебры фон Неймана возьмем $\mathfrak{M} = \pi_\varphi(\mathcal{M})$ — образ $\mathcal{M}$ при каноническом представлении, ассоциированном с φ. Положим $S \equiv \mathcal{D}_{\varphi_\pi}$ — присоединений к $\mathfrak{M}$ и плотный в $\mathfrak{H}$ линеал веса φ_π.

Показано, что если φ — след, то $E_\mathfrak{M}(S) = F_\mathfrak{M}(S) = L_\mathfrak{M}(S)$.

В § 7 подробно исследуется линеал веса в пространстве стандартного представления алгебры всех ограниченных линейных операторов, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом. Описана конструкция, позволяющая отождествлять элементы линеала веса с операторами Гильберта-Шмидта, действующими в исходном гильбертовом пространстве. Доказана

ТЕОРЕМА 7.1. *Отображение* $x \to \overline{xk^{1/2}}$ $(x \in n_\varphi)$ *определяет изометрический изоморфизм между гильбертовым пространством* $\mathfrak{H}$ *и гильбертовым пространством* $\mathfrak{C}_2$ *операторов Гильберта - Шмидта в исходном пространстве H.*

В восьмом параграфе результаты § 5 обобщаются на случай точного нормального полуконечного веса с ограниченной производной Радона-Никодима. А именно, в этом параграфе изучаются классы ортозамкнутых и расщепляющих подпространств линеала веса, описанного в § 6 и § 7, при существенном ограничении:

оператор k, определенный равенством

$$\varphi(x) = \tau_0(kx) \qquad (x \in \mathcal{B}(H)^+),$$

является ограничении (здесь τ_0 — стандартный след на $\mathcal{B}(H)$).

В этом случае имеет место

ТЕОРЕМА 8.1. *Если* $X \in L_{\mathfrak{M}}(S)$, *то существует* $p \in \mathcal{B}(H)^{pr}$ *такой, что*

$$X = S_p \equiv \{k^{1/2}px^* \mid x^* = px^* \in n_\varphi^*\}.$$

В рамках рассматриваемой конструкции получены критерии расщепляемости и ортозамкнутости подпространства линеала веса в терминах ортопроекторов исходной алгебры *B(H)*. Следует отметить, что формулировки этих критериев идентичны соответствующим формулировкам из § 5.

Глава 3 (§ 9 - 11) посвящена решению задачи мероопределения на введенных классах подпространств и изучения связей между мерами на классах подпространств и мерами на ортопроекторах исходной алгебры фон Неймана. Задача обусловлена показанным в главе 1 соответствием между подпространствами унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана, и ортогональными проекторами из этой алгебры.

В § 9 вводится "топологическое" определение меры на классе $K_{\mathcal{M}}(S)$ (здесь под $K_{\mathcal{M}}(S)$ понимается один из классов $\{E_{\mathcal{M}}(S)$, $F_{\mathcal{M}}(S)$, $L_{\mathcal{M}}(S)\}$).

§ 10 решает следующую проблему: как, имея меру на ортопроекторах исходной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, задать меру на классе .$K_{\mathcal{M}}(S)$. Показано, что е m с $\mathcal{M}^{\Pi} \to$ и$\mathbb{R}^{+}$ — мера (соответственно конечно-аддитивная, вполне аддитивная мера), то равенство

$$\mu(X) \equiv m(p_{[X]}) \quad (X \in K_{\mathcal{M}}(S))$$

определяет меру (соответственно конечно-аддитивную, вполне аддитивную меру) на классе $K_{\mathcal{M}}(S)$.

Задача, заключающаяся в изучении условий, при которых мера (конечно-аддитивная мера, вполне аддитивная мера) на классе *KM(S)* допускает "поднятие" до меры (соответственно конечно-аддитивной меры, вполне аддитивной меры) на ортопроекторах алгебры $\mathcal{M}$, по всей видимости, не имеет столь простого и однозначного решения. В параграфе 11 эта задача решается в рамках конструкций, изученных в главах 1 и 2. "Поднятие" удалось осуществить в следующих случаях:

— если класс расщепляющих подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана, совпадает с классом подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана;

— если мера задана на $K_{B(H)}(S)$, где S — бесконечномерное сепарабельное унитарное пространство, а *H* — его пополнение;

— если мера задана на $K_{\mathfrak{M}}(S)$, где $\mathfrak{M} = \pi_{\varphi}(B(H))$ — образ *B(H)* при представлении алгебры *B(H),* ассоциированном с точным нормальным полуконечным весом φ, обладающим ограниченной производной Радона-Никодима, а *S* - соответствующий линеал веса.

Сформулируем основные результаты диссертации:

1. Введены и изучены классы ортозамкнутых и расщепляющих подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана. Получено описание каждого из названных классов подпространств в терминах ортопроекторов из алгебры фон Неймана.

2. Получены условия совпадения классов ортозамкнутых и расщепляющих подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана.

3. Получены описания исследуемых классов подпространств линеала веса в пространстве представления алгебры всех ограниченных линейных операторов, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом с ограниченной производной Радона-Никодима.

4. Предложен топологический подход к определению меры на классах подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана. Установлены связи этой меры с мерой на ортопроекторах алгебры фон Неймана.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору А.Н. Шерстневу за ценные советы и постоянное внимание к работе.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Турилова Е. А. *Свойства замкнутых подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана*// Алгебра и анализ: Тез. докл. школы-конф. - Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 1997. - С. 219 - 220.

2. Турилова Е. А., Шерстнев А. Н. *О классах подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана//* Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы школы-конф. - Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 1999. - С. 229 - 231.

3. Турилова Е. А. *О классах подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана, в пространстве представления, ассоциированного с весом//* Труды XXII конф. молодых ученых мехмата МГУ. - Москва, 2001. - С. 163 - 165.

4. Турилова Е. А. *О классах подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана, в пространстве представления, ассоциированного с весом//* Межд. конф. по теории операторов и ее прил.: Тез. докл. - Ульяновск, 2001. - С. 35 - 36.

5. Турилова Е. А. *Описание классов подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана, в пространстве представления B(H), ассоциированного с весом//* Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. - 2001. - Т. 8. - С. 223 - 225.

6. Турилова Е. А. *О мерах на классах подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана, в пространстве представления B(H), ассоциированного с весом//* Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. - 2003. - Т. 19. - С. 215 - 216.

7. Турилова Е. А. *О классах подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана, в пространстве представления алгебры B(H), ассоциированного с весом//* Казан, ун-т. - Казань, 2003. - 21 с. - Деп. в ВИНИТИ 21.06. 2003 N 1196-B2003.

8. Sherstnev A. N.,Turilova E. A. *Classes of Subspaces Affiliated with a von Neumann Algebra//* Russian Journ. of Math. Physics. - 1999. - V. 6. - N 4. - P. 426 - 434.