на правах рукописи

ТИМЕРБАЕВ Марат Равилевич

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ОСОБЕННОСТЯМИ НА ГРАНИЦЕ

Специальность 01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань — 2007

Работа выполнена
в государственном образовательном учреждении
высшего профессионального образования
"Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина"

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Гулин Алексей Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор
Корнеев Вадим Глебович,

доктор физико-математических наук, профессор
Лапин Александр Васильевич.

Ведущая организация: Институт математического моделирования РАН, г.Москва

Защита состоится 25 октября 2007 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г.Казань, ул. Кремлевская 18, корп.2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета

Автореферат разослан "   "   2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.м.н., доцент   О.А.Задворнов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Проекционно-сеточные методы и метод конечных элементов (МКЭ) в их числе, являются одними из самых распространенных и эффективных методов решения краевых задач, возникающих в различных областях научной и практической деятельности. Теория аппроксимации функций в пространствах Соболева и теоремы гладкости обосновывают эффективность использования в МКЭ базиса с кусочно-полиномиальными финитными функциями для аппроксимации решений регулярных задач, т.е. краевых задач с гладкими входными данными. Теория таких задач хорошо разработана, известны оценки их решений в нормах пространств Соболева, что позволяет на основе априорной информации оптимальным образом строить аппроксимирующее подпространство кусочно-полиномиальных функций для достижения заданной точности приближения. В то же время, использование стандартных аппроксимаций, не учитывающих особенности решений задач с негладкими данными, приводит к существенному понижению точности конечноэлементных приближенных решений и снижает эффективность всего метода в целом, что подтверждается теоретическим анализом и практическими расчетами. Поэтому актуальным является построение проекционно-сеточных схем для нерегулярных задач, которые имели бы повышенную точность по сравнению со стандартными кусочно-полиномиальными аппроксимациями.

Важным классом задач с особенностями являются краевые задачи для дифференциальных уравнений с вырождающимися коэффициентами, систематическое изучение которых было начато работами М.В.Келдыша, М.И.Вишика, С.Г.Михлина, Л.А.Люстерника и продолжено В.В.Грушиным, В.П.Глушко, О.А.Олейник, С.М.Никольским и его учениками, в статьях зарубежных математиков Н.Симакуры, П.Боллей и Ж.Камю, Х.Трибеля, М.С.Бауэнди и К.Гулауика, С.Бенашура.

Одной из первых работ, посвященных сеточным методам решения вырождающихся уравнений, была работа Ю.А.Гусмана и Л.А.Оганесяна (1965 г.), в которой исследовалась конечно-разностная схема первого порядка точности для уравнения с оператором типа Трикоми в прямоугольнике. Метод конечных элементов для аналогичного вырождающегося уравнения рассматривался в работах В.В.Катрахова и А.А.Катраховой, П.Моинга, М.Хатри. Большое количество работ было посвящено численному решению одномерного вырождающегося уравнения. Например, П.Сьярле, Ф.Наттерер и Р.Варга использовали L-сплайны в методе Ритца-Галеркина; обобщенные L-сплайны в проекционно-сеточном методе применялись в работе Д.Дейли и Д.Пирса; Р.Шрейбер представил приближение Галеркина в виде произведения кусочно-полиномиальной функции на специальный вес. Д.Марини и П.Пиетра исследовали смешанный метод конечных элементов для задачи с сингулярными коэффициентами в прямоугольнике. Б.Франчи и М.К.Тези рассмотрели задачу Дирихле для дифференциального уравнения типа Грушина, вырождающегося внутри прямоугольника и построили схему МКЭ с кусочно-линейным базисом на сгущающейся в окрестности точек вырождения сетке.

Важной задачей является построение оптимальных в том или ином смысле проекционно-сеточных схем. Для обсуждения оптимальности метода в некоторой норме нужно помимо верхней оценки скорости сходимости метода установить *нижнюю* неулучшаемую оценку скорости сходимости в этой норме для класса допустимых методов и входных данных. Получение верхних и нижних оценок приближения векторов некоторого компакта данного банахова пространства элементами конечномерных подпространств является ключевой проблемой теории аппроксимации и связана с оценками некоторых геометрических характеристик компактных операторов и компактов в банаховых пространствах таких, как *поперечники по Колмогорову, поперечники по Гельфанду, аппроксимационные числа.* Если для некоторого метода нижняя оценка достигается (с точностью до постоянного множителя), то этот приближенный метод для рассматриваемого класса задач является оптимальным.

Целью работы является построение оптимальных проекционно-сеточных методов для краевых задач с негладкими входными данными, включающих в себя как подкласс и регулярные задачи. Рассматриваются эллиптические краевые задачи Дирихле и Неймана с особенностями следующих типов: вырождение коэффициентов дифференциального оператора на границе или ее части, в частности в угловых точках; сингулярность правой части дифференциального уравнения; наличие угловых точек у границы области; смена типа граничных условий. Исследуется также краевая задача на собственные значения вырождающегося дифференциального оператора.

Методы исследования решений краевых задач с особенностями опираются на аппарат функционального анализа, спектральную теорию самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, теорию дифференциальных уравнений в частных производных, теоремы вложения весовых пространств Соболева. При получении оценок погрешности аппроксимаций конечными элементами в весовых нормах Соболева используется теория метода конечных элементов.

Научная новизна работы. Найдены специальные весовые нормировки, не эквивалентные, вообще говоря, весовым нормам Соболева, адекватно описывающие структуру решений задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения на классе правых частей из весового пространства Лебега. На основании оценок решений в этих нормах и известных оценок поперечников Колмогорова в весовых пространствах

Соболева, для методов типа Галеркина приближенного решения указанных задач получены нижние оценки скорости сходимости в энергетической норме. Предложены проекционно-сеточные методы решения рассматриваемых классов задач, основанные на мультипликативном выделении особенности, для которых нижняя оценка скорости сходимости достигается; тем самым доказана их оптимальность.

Основные результаты диссертации:

1. Для двухточечных граничных задач Дирихле и Неймана с вырождающимися операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве получены оценки решений в весовых пространствах Соболева вектор-функций.

2. Для эллиптических краевых задач Дирихле и Неймана с вырождающимися на границе или ее части коэффициентами доказаны теоремы существования и установлены оценки решений в весовых нормах. Доказано, что решение задачи Дирихле вырождающегося уравнения можно представить в виде произведения фиксированной весовой функции, снимающей особенность у решения, на некоторую гладкую функцию.

3. В весовом пространстве Соболева построен оператор проектирования в пространство конечных элементов, не использующий значения функций в узлах конечных элементов. С применением этого оператора доказаны неулучшаемые оценки погрешности конечноэлементной аппроксимации в пространствах Соболева с весом.

4. Для произвольного метода Галеркина решения эллиптических краевых задач Дирихле и Неймана с вырождающимися коэффициентами получены неулучшаемые нижние оценки скорости сходимости. Предложены проекционно-сеточные методы аппроксимации решений этих задач, основанные на мультипликативном выделении особенности. Доказана их оптимальная сходимость.

5. Для краевой эллиптической задачи с вырождающимися в угловой точке коэффициентами построены оптимальные методы двух типов: основанные на сгущении сетки в окрестности особой точки и на мультипликативном выделении особенности.

6. Для краевых задач на собственные значения вырождающегося эллиптического оператора исследован метод конечных элементов с мультипликативным выделением особенности. Получены оценки погрешности аппроксимации собственных значений и собственных функций. Доказана оптимальная сходимость предложенного метода.

Практическая значимость. Полученные в диссертации результаты и предложенные приближенные методы могут быть использованы для конструирования эффективных алгоритмов численного решения конкретных прикладных задач с сингулярными входными данными.

Достоверность научных результатов. Все результаты, полученные в диссертации, строго математически доказаны и подтверждены результатами численных экспериментов для модельных задач с особенностями.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Всероссийской конференции "Математическое моделирование и вычислительный эксперимент"(Казань, 26-30 июня 1991 г.), на первом - третьем Всероссийских семинарах "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач"(Казань, 24-28 июня 1996 г., 18-21 сентября 1998 г., 18-21 сентября 2000 г.), четвертом - шестом Всероссийских семинарах "Сеточные методы для краевых задач и приложения"(Казань, 13-16 сентября 2002 г., 17-21 сентября 2004 г., 1-4 октября 2005 г.), четвертой Всероссийской школе молодых ученых "Численные методы механики сплошной среды"(Абрау-Дюрсо, 26-31 мая 1992 г.), восьмой и девятой Всероссийской школе-семинаре "Современные проблемы математического моделирования"(Абрау-Дюрсо, 5-17 сентября 1999 г., 8-13 сентября 2001 г.), Международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Н.Г.Чеботарева (Казань, 5-11 июня 1994 г.), Международной конференции и чебышевских чтениях, посвященных 175-летию П.Л. Чебышева (Москва, 13-16 мая, 1996), на Международной конференции "Математические модели и численные методы механики сплошных сред"(Новосибирск, 27 мая-2 июня 1996 г.), Международной школе-конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М. Гагаева "Алгебра и анализ"(Казань, 16-22 июня 1997 г.), Международной конференции "Математическое моделирование в науке и технике"(Ижевск, 5-7 февраля 1998г.), Всероссийской школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы"(Казань, 17-20 июня 1999 г.), Международных конференциях "Optimization of Finite Element Approximations"(С.-Петербург, 25-29 июня 1995 г., 25-29 июня 2001 г.), научной конференции "Актуальные проблемы математического моделирования и информатики"(Казань, 30 января-6 февраля 2002 г.), Всероссийской конференции, посвященной 70-летию со дня рождения акад. А.Ф.Сидорова (Екатеринбург, 3-7 февраля 2003 г.), первой Международной конференции "Computational Methods in Applied Mathematics"(Минск, 20-24 июля 2003 г.), третьей Международной научной конференции "Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания"(Обнинск, 14-18 мая 2006 г.), седьмой Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения"(Саранск, 17-21 мая 2006 г.), научной конференции "Теория управления и математическое моделирование"(Ижевск, 3-8 июля 2006 г.), на четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи"(Самара, 29-31 мая 2007 г.), Всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ -2007 (Новосибирск, 18-20 июня 2007 г.), на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета за 1993-2006 г.г., научном семинаре кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета под руководством А.Д.Ляшко, И.Б.Бадриева и М.М.Карчевского.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 55 работ. Основные результаты опубликованы в работах [1]-[36], из которых 14 — в журналах, входящих в перечень ВАК Российской Федерации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего 226 наименований. Общий объем составляет 247 страниц, включая 7 рисунков и 3 таблицы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 98-01-00260, 01-01-000616, 03-01-00380, 04-01-0821, 06-01-00633, 07-01-00674).

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность тематики исследований, сформулирована цель работы, дан обзор работ, близких к тематике диссертации, изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава носит вспомогательный характер. В **разделе 1** вводятся банаховы пространства с нормой графика. Многие функциональные пространства, встречающиеся в теории и приложениях, например, пространства Соболева (с весом или без веса), можно трактовать как пространства с нормой графика некоторого замкнутого оператора. Для пространств с нормой графика получены абстрактные аналоги теоремы Дени-Лионса и теоремы Соболева о перенормировках, неоднократно используемые в работе.

В **разделе 2** даны определения весовых пространств Лебега и Соболева вектор-функций переменной $t \in T = (0, \tau)$ со значениями в гильбертовом пространстве X со скалярным произведением $x \cdot y$ и нормой $|x|_X = \sqrt{x \cdot x}$. Для вещественного γ через $L_{2,\gamma}(T; X)$ обозначается пространство измеримых по Бохнеру (или сильно измеримых) функций $f : T \to X$ таких, что скалярная функция $t \in T \to t^{-\gamma}|f(t)|_X$ является элементом пространства Лебега $L_2(T)$; при этом полагаем

$$\|f|L_{2,\gamma}(T; X)\|^2 = \|t^{-\gamma} f|L_2(T; X)\|^2 = \int\limits_T |t^{-\gamma} f(t)|_X^2 dt.$$

(Здесь и далее t^γ обозначает, в зависимости от контекста, не только степень γ числа t, но и символ степенной функции $t \to t^\gamma$). Как обычно, если $\gamma = 0$ или пространство X совпадает с полем скаляров, то эти символы в обозначении пространства опускаются.

Через D обозначается оператор обобщенного дифференцирования в пространстве X-значных распределений $\mathcal{D}'(T;X)$, так что $Du = u'$ – обобщенная производная распределения u (для производной используются оба обозначения u' и Du). Для натурального m и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ вводится весовое пространство Соболева X-значных функций $H^m_\alpha(T;X) = \{u \in L_{1,\mathrm{loc}}(T;X) : D^m u \in L_{2,\alpha}(T;X)\}$ с нормой

$$\|u|\ H^m_\alpha(T;X)\|^2 = \|D^m u|L_{2,\alpha}(T;X)\|^2 + \|u|L_2(\Delta;X)\|^2,$$

где Δ произвольный фиксированный компакт из T ненулевой меры, отделенный от нуля, например, $\Delta = [\tau/3, 2\tau/3]$ или $\Delta = [\tau/3, \tau]$ (различный выбор Δ приводит лишь к эквивалентным нормировкам). В тех случаях, когда интервал T и пространство X подразумеваются из контекста, используются сокращенные обозначения $L_{2,\gamma}$ и H^m_α. Через $\overset{\circ}{H}{}^m_\gamma(T;X)$ и $\dot{H}^m_\gamma(T;X)$ обозначаются подпространства пространства $H^m_\alpha(T;X)$, являющиеся замыканиями (в норме последнего) бесконечно дифференцируемых функций и равных нулю в окрестности $\partial T = \{0,1\}$ и $t = \tau$ соответственно.

Далее вводится класс интегральных операторов типа Харди на пространствах вектор-функций и дается критерий непрерывности таких операторов в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(T;X)$.

Раздел 3 посвящен теоремам вложения пространств вектор-функций. Аналогичные вопросы, но для пространств с другими весами, рассматривались в работах П.И.Лизоркина и В.Б.Шахмурова. В частности, с помощью спектрального представления неограниченного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве доказываются так называемые теоремы о промежуточных производных. Устанавливается также теорема о компактном вложении:

Теорема 1. *Пространство $H^m_\alpha(T;X) \cap L_{2,\nu}(T;X_1)$ компактно вложено в $L_{2,\gamma}(T;X)$, если X_1 компактно вложено в X и $\gamma < \min(\alpha + m,\ 1/2)$, а ν — любое.*

Глава 2 посвящена весовым оценкам решений вырождающихся двухточечных граничных задач в гильбертовом пространстве с операторными коэффициентами. Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения рассматривались в работах А.А.Дезина (уравнение 2-го порядка), Л.П.Тепояна (уравнение 4-го порядка) и Н.М.Ятаева (уравнение 3-го порядка), в которых главное внимание уделено корректным постановкам граничных условий. Установленные в этой главе результаты используются в дальнейшем, во-первых, для получения оценок решений в весовых пространствах вырождающихся на границе уравнений в частных производных; во-вторых, для доказательства оценок скорости сходимости рассматриваемых в данной работе проекционно-сеточных аппроксимаций для задач с вырождением; в-третьих, для обоснования оптимальной сходимости этих аппроксимаций.

В главе исследуется дифференциально-операторное уравнение

$$Au \equiv -D_t(t^\alpha a(t) D_t u(t)) + t^\beta b(t) u(t) = f(t) \text{ в } T = (0,\tau), \quad u(\tau) = 0, \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$ – самосопряженные положительно определенные операторы в гильбертовом пространстве X при каждом $t \in [0,\tau]$, $a(t) \in \mathcal{B}(X)$, $b(t) \in \mathcal{B}(X_1 \to X)$, где гильбертово пространство X_1 непрерывно и плотно вложено в X. Параметры α, β могут быть произвольными, удовлетворяющие условию $\alpha < \beta+2$. В граничной точке $t = 0$ рассматриваются два типа краевых условий: условие Неймана и условие Дирихле. Анализ проводится в три этапа по следующей схеме: (i) $a(t) = 1$, $b(t) = \lambda > 0$ — скалярные функции $\to$ (ii) $a(t) = \mathbf{id_X}$ (тождественный оператор в X), $b(t) = b \in \mathcal{B}(X_1 \to X)$ — постоянный оператор $\to$ (iii) $a(t)$, $b(t)$ — операторнозначные коэффициенты, удовлетворяющие естественным условиям гладкости по переменной $t \in [0,\tau]$ — предполагается, что $a : [0,\tau] \to \mathcal{B}(X)$, $b : [0,\tau] \to \mathcal{B}(X_1 \to X)$ являются непрерывными функциями в соответствующих операторных нормах и, кроме этого, для функции a выполнены следующие условия:

1) для любого $t \in T$ существует предел $a'(t) = \lim\limits_{h\to 0}(a(t+h) - a(t))/h$ в норме $\mathcal{B}(X)$;

2) $\|a'(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \le \text{const}$ на $[0,\tau]$.

Ключевым моментом является переход $(i) \to (ii)$, где существенно используется спектральное разложение неограниченного самосопряженного оператора b в гильбертовом пространстве X.

В **разделе 1** исследуется уравнение (1) с граничным условием Неймана при $t = 0$: $t^\alpha Du(t)|_{t=0} = 0$. Показано, что при $\beta \le -1$ решения не существует даже в скалярном случае ($X = \mathbb{R}$) на классе правых частей $C_0^\infty(T)$; таким образом, условие $\beta > -1$ необходимо для разрешимости задачи с краевым условием Неймана в особой точке $t = 0$.

Вводится пространство $W = W_\gamma = W_{\gamma,\alpha,\beta}(T; X, X_1) = H^2_{\gamma-\alpha}(T; X) \cap H^1_{\gamma-\alpha+1}(T; X) \cap L_{2,\gamma-\beta}(T; X_1)$ с нормой пересечения и подпространство $\dot W = \{v \in W : v(\tau) = 0\}$. Используя детальный анализ интегральных операторов типа Харди, проведенный в первой главе, доказывается

Теорема 2. *Пусть $-1/2 < \gamma < \beta + 1/2$ и выполнено хотя бы одно из двух условий: 1) $\gamma \ge \alpha/2 - 1$ или 2) пространство X_1 компактно вложено в X. Тогда оператор*

A изоморфно отображает пространство $\dot W$ на $L_{2,\gamma}(T;X)$. Следовательно, в условиях теоремы для решения (1) *с граничным условием $t^\alpha Du(t)|_{t=0}=0$ имеет место двусторонняя оценка*

$$\|D^2u|L_{2,\gamma-\alpha}(T;X)\|+\|Du|L_{2,\gamma-\alpha+1}(T;X)\|+ \\ +\|u|L_{2,\gamma-\beta}(T;X_1)\|\sim\|f|L_{2,\gamma}(T;X)\|.$$

Замечание. Оценка в теореме 2 не будет иметь места, если $\gamma\le-1/2$ или $\gamma\ge\beta+1/2$.

В **разделе 2** рассматривается уравнение (1) с граничным условием Дирихле в точке вырождения:

$$Au=f \text{ в } T,\quad u(0)=u(\tau)=0. \tag{2}$$

Следует отметить, что граничное условие $u(0)=0$ корректно только при $\alpha<1$; таким образом предполагается, что $\alpha<\min(1,\beta+2)$. Поведение решения этой задачи в окрестности особой точки $t=0$ существенно отличается от поведения решения задачи с граничным условием Неймана, поскольку у решения задачи Дирихле производная Du в окрестности нуля неограничена при сколь угодно гладкой правой части. Центральной идеей этого раздела и всей главы является представление решения задачи Дирихле в факторизованном виде $u(t)=t^{1-\alpha}\hat u(t)$ и получение оценок $\hat u(t)$ в весовых нормах Соболева.

Пространство $H^2_{\gamma,\alpha,\beta}=H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(T;X,X_1)$ определяется как пространство функций с конечным квадратом нормы

$$\|u|H^2_{\gamma,\alpha,\beta}\|^2=\|D(t^\alpha Du)|L_{2,\gamma}(T;X)\|^2+\|u|L_{2,\gamma-\beta}(T;X_1)\|^2$$

и удовлетворяющих условию $u(\tau)=0$; пространством решений однородной задачи Дирихле является подпространство $\dot H^2_{\gamma,\alpha,\beta}=\{u\in H^2_{\gamma,\alpha,\beta}:u(0)=u(\tau)=0\}$. Условия разрешимости и оценки решения задачи (2) на классе правых частей $L_{2,\gamma}(T;X)$ даются в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть $\alpha-3/2<\gamma<1/2$ и выполнено хотя бы одно из двух условий: 1) $\gamma\ge\alpha/2-1$ или 2) пространство X_1 компактно вложено в X. Тогда оператор A изоморфно отображает пространство $\dot H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(T;X,X_1)$ на $L_{2,\gamma}(T;X)$. Следовательно, в условиях теоремы для решения задачи* (2) *имеет место двусторонняя оценка $\|u|H^2_{\gamma,\alpha,\beta}\|\sim\|f|L_{2,\gamma}\|$.*

Пусть σ обозначает оператор умножения на функцию $\sigma(t)=t^{1-\alpha}$. В разделе доказано, что при условии $\alpha-3/2<\gamma<1/2$ оператор σ изоморфно отображает пространство $\hat U_\gamma\equiv H^2_{\gamma-1}(T;X)\cap\dot H^1_\gamma(T;X)\cap L_{2,\gamma-1+\alpha-\beta}(T;X_1)$ на $\dot H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(T;X,X_1)$.

Отсюда следует, что в условиях теоремы 3 дифференциальный оператор $A \circ \sigma$ является изоморфизмом пространства $\hat{U}_\gamma$ на $L_{2,\gamma}(T;X)$ и справедлива двусторонняя оценка $\|\hat{u}|H^2_{\gamma-1}(T;X)\| + \|\hat{u}|L_{2,\gamma-1+\alpha-\beta}(T;X_1)\| \sim \|f|L_{2,\gamma}(T;X)\|$, где решение задачи (2) $u \in \dot{H}^2_{\gamma,\alpha,\beta}(T;X,X_1)$ и $\hat{u} \in \hat{U}_\gamma$ связаны соотношением $u = \sigma\hat{u}$.

Раздел 3 второй главы посвящен разрешимости уравнения (1) с неоднородными условиями Дирихле и Неймана в точке $t = 0$. Для описания пространства следов решений $u(0)$ в граничной точке $t = 0$ или следов "потока" $t^\alpha Du|_{t=0}$, привлекаются так называемые промежуточные между X и X_1 (или интерполяционные) пространства $X_\theta = [X, X_1]_\theta$, $\theta \in (0,1)$.

В п.3.2 рассматривается неоднородная 2-точечная граничная задача Дирихле

$$Au \equiv -D(t^\alpha aDu) + t^\beta bu = f \text{ в } T,\ u(0) = g,\ u(\tau) = 0 \tag{3}$$

и доказывается

Теорема 4. *Пусть* $\alpha < 1$, $\alpha - 3/2 < \gamma < \min(1/2, \beta + 1/2)$ *и, кроме того, выполнено одно из условий: 1)* $\gamma \geq \alpha/2 - 1$ *или 2)* X_1 *компактно вложено в* X. *Положим* $\theta = \frac{3/2+\gamma-\alpha}{2+\beta-\alpha}$. *Тогда для любой правой части* $f \in L_{2,\gamma}(T;X)$ *и произвольного граничного значения* $g \in X_\theta$ *существует единственное решение* $u \in H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(T;X,X_1)$ *задачи* (3)*; более того, имеет место двусторонняя оценка* $\|u|H^2_{\gamma,\alpha,\beta}\| \sim \|f|L_{2,\gamma}\| + |g|_{X_\theta}$.

В п.3.3 исследуется разрешимость в классе $H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(T;X,X_1)$ задачи с неоднородным граничным условием Неймана в $t = 0$. Доказывается

Теорема 5. *Пусть* $-1/2 < \gamma < \min(1/2, \beta + 1/2)$ *и, кроме того, выполнено одно из условий: 1)* $\gamma \geq \alpha/2 - 1$ *или 2) пространство* X_1 *компактно вложено в* X. *Положим* $\theta = \frac{1/2+\gamma}{2+\beta-\alpha}$. *Тогда для любой правой части* $f \in L_{2,\gamma}(T;X)$ *и произвольного граничного значения* $g \in X_\theta$ *существует единственное решение* $u \in H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(T;X,X_1)$ *задачи*

$$-D(t^\alpha aDu) + t^\beta bu = f \text{ в } T,\ (t^\alpha Du)(0) = g,\ u(\tau) = 0;$$

кроме того, справедлива двусторонняя оценка $\|u|H^2_{\gamma,\alpha,\beta}\| \sim \|f|L_{2,\gamma}\| + |g|_{X_\theta}$.

Глава 3 посвящена анализу вырождающихся на границе или ее части дифференциальных уравнений в частных производных. Рассматриваются два типа регулярных ограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^m$: цилиндрические и общего вида с гладкой границей класса C^2. В случае цилиндрических областей, т.е. областей вида $\Omega = \Omega' \times (0,1)$, где область $\Omega' \subset \mathbb{R}^{m-1}$ регулярная (выпуклая или класса C^2), при получении теорем разрешимости в весовых классах функций граничных задач с вырождающимся дифференциальным оператором, непосредственно используются результаты главы 2. В случае областей общего вида рассмотрения сводятся к цилиндрическим областям применением метода локальных карт.

Вопросам повышения гладкости решений вырождающихся на границе уравнений посвящены многочисленные работы С.М.Никольского, П.И.Лизоркина, их коллег и учеников. Подход, развиваемый в диссертационной работе, принципиально отличается выбором нормировок для пространств решений, что позволяет расширить диапазоны изменения параметров задачи, таких как степень вырождения и степень веса правой части.

В **разделе 1** устанавливаются весовые оценки решений задач Дирихле и Неймана для вырождающегося на части границы эллиптического уравнения в частных производных в цилиндрической m-мерной области.

Пусть ограниченная область $\Omega' \subset \mathbb{R}^{m-1}$ выпукла или класса C^2. В области $\Omega = \Omega' \times (0,1) \subset \mathbb{R}^m$ рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных эллиптического типа, вырождающееся на части границы $\Gamma = \partial\Omega \cap \{x_m = 0\}$:

$$Au \equiv -\partial_m(x_m^\alpha a_{mm}\partial_m u) - x_m^\beta \sum_{i,j<m} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + a_0 u = f. \tag{4}$$

(∂_i — обобщенное дифференцирование по переменной x_i). Всюду в данном разделе предполагается, что $\alpha < \beta + 2$ и

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \setminus \Gamma. \tag{5}$$

Условия разрешимости рассматриваемой задачи, как следует из предыдущей главы, зависят от типа граничного условия на части границы Γ — Дирихле или Неймана. Предполагается, что что коэффициенты $a_{mm}(x)$ и $a_{ij}(x)$ $(i,j < m)$ — функции класса $C^1(\overline{\Omega})$, причем матрица коэффициентов $(a_{ij}(x))$ равномерно положительно определена на $\overline{\Omega}$, т.е. для некоторой положительной постоянной c_0 имеет место оценка $a_{mm}(x)\xi_m^2 + \sum\limits_{i,j<m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$ для всех $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^m$. Предполагается также, что коэффициент $a_0(x)$ неотрицателен в Ω; условия на рост $a_0(x)$ при $x_m \to 0$ будут зависеть от параметров α, β, от класса правых частей, а также от типа граничных условий на Γ.

Уравнение в частных производных (4) вместе с граничным условием (5) в цилиндрической области $\Omega' \times (0,1)$ можно записать как обыкновенное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве $X = L_2(\Omega')$ на интервале $T = (0,1)$:

$$Au(t) \equiv -D(t^\alpha a(t)Du(t)) + t^\beta b(t) + a_0(t)u(t) = f(t),\ u(1) = 0, \tag{6}$$

если для $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega$ положить $t = x_m \in T = (0,1)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \Omega'$ и ввести пространства

$$X = L_2(\Omega'), \quad X_1 = W_2^2(\Omega') \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega').$$

Тогда промежуточное пространство $X_{1/2} \equiv [X, X_1]_{1/2}$ совпадет с пространством $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega')$. Из классических теорем вложения пространств Соболева следует компактность вложения гильбертова пространства X_1 в X. Для каждого $t \in [0,1]$ операторы $a(t) \in \mathcal{B}(X)$, $b(t) \in \mathcal{B}(X_1 \to X)$, $a_0(t) \in \mathcal{B}(X)$ определяются формулами

$$(a(t)v)(x') = a_{mm}(x', t)v(x'), \quad (b(t)v)(x') = -\sum_{i,j<m} \partial_i(a_{ij}(x', t)\partial_j v(x')),$$
$$(a_0(t)v)(x') = a_0(x', t)v(x').$$

Из условий на коэффициенты уравнения следует, что при каждом $t \in T$ $a(t)$ является ограниченным самосопряженным положительно определенным оператором в X, а $b(t)$ — неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором в X, причем $b(t)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает X_1 на X; последнее следует из классического результата для регулярных дифференциальных эллиптических операторов второго порядка по переменным $x' = (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \Omega'$. В этом контексте пространство $H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(T; X, X_1)$ обозначается как $H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)$ — это множество функций с конечным квадратом нормы

$$\|u|H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)\|^2 = \int\limits_\Omega |x_m^{-\gamma}\partial_m(x_m^\alpha \partial_m u)|^2 + \sum_{i,j<m} |x_m^{\beta-\gamma}\partial_{ij}u|^2 dx$$

и удовлетворяющих условию $u = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$. При $\alpha < 1$ корректно определено подпространство $\dot{H}^2_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega) = \{u \in H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega) : \ u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$.

В п.1.1 для задачи с однородными краевыми условиями Дирихле (при обязательном условии $\alpha < 1$) доказана

Теорема 6. *Пусть выполнены условия: 1) $\alpha - 3/2 < \gamma < \min(1/2, 3/2 + \beta - \alpha)$ и 2) $x_m^\delta a_0 \in L_\infty(\Omega)$ для некоторого $\delta < \min(2 - \alpha, 3/2 - \alpha - \gamma)$. Тогда дифференциальный оператор A является изоморфизмом пространства $\dot{H}^2_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)$ на $L_{2,\gamma}(\Omega)$. Таким образом, для решения задачи $Au = f$ в Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$ имеет место двусторонняя оценка $\|u|H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)\| \sim \|f|L_{2,\gamma}(\Omega)\|$.*

Отдельного внимания заслуживает случай изотропного вырождения $\alpha = \beta$ (далее используются обозначения $H^2_{\gamma,\alpha} = H^2_{\gamma,\alpha,\alpha}$ и $\dot{H}^2_{\gamma,\alpha} = \dot{H}^2_{\gamma,\alpha,\alpha}$). Доказывается, что при $\alpha - 3/2 < \gamma < 1/2$ оператор умножения на функцию $\sigma(x) = x_m^{1-\alpha}$ является изоморфизмом весового пространства Соболева $\dot{H}^2_{\gamma-1}(\Omega) = \{v \in H^2_{\gamma-1}(\Omega) : \ v = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma\}$ на пространство $\dot{H}^2_{\gamma,\alpha}(\Omega)$. Отсюда и из теоремы 6 вытекает

Теорема 7. *Пусть выполнены условия: 1)* $\alpha - 3/2 < \gamma < 1/2$ *и 2)* $x_m^\delta a_0 \in L_\infty(\Omega)$ *для некоторого* $\delta < \min(2-\alpha, 3/2-\alpha-\gamma)$*. Тогда дифференциальный оператор* $A \circ \sigma$ *является изоморфизмом пространства* $\dot{H}^2_{\gamma-1}(\Omega)$ *на* $L_{2,\gamma}(\Omega)$*. Таким образом, если* $u(x)$ *— решение задачи* $Au = f$ *в* Ω*,* $u = 0$ *на* $\partial\Omega$*, то для* $\hat{u}(x) = x_m^{\alpha-1}u(x)$ *имеет место двусторонняя оценка* $\|\hat{u}|H^2_{\gamma-1}(\Omega)\| \sim \|f|L_{2,\gamma}(\Omega)\|$*.*

В п.1.2 вместе с (4), (5) рассматривается неоднородное граничное условие

$$u = g \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{7}$$

где $g(x')$ — заданная функция на Ω' из промежуточного пространства $X_\theta = [X_1, X]_\theta = [W_2^2(\Omega') \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega'), L_2(\Omega')] = \overset{\circ}{W}{}_2^{2\theta}(\Omega')$ для некоторого $\theta \in (0,1)$. Пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{2\theta}(\Omega')$ есть пространство Соболева-Слободецкого с дробным (при $\theta \neq 1/2$) порядком дифференцирования. Граничную задачу (4), (5), (7) можно записать в операторном виде

$$\mathcal{L}u \equiv (Au; \mathrm{tr}\, u) = (f; g), \tag{8}$$

где через tr обозначен оператор следа на Γ. С использованием результатов предыдущей главы, в частности теоремы 4, доказывается теорема о разрешимости краевой задачи с неоднородным условием Дирихле в точках вырождения Γ.

Теорема 8. *Пусть* $\alpha < 1$*,* $\alpha - 3/2 < \gamma < \min(1/2, \beta + 1/2)$ *и* $x_m^\delta a_0 \in L_\infty(\Omega)$ *для некоторого* $\delta < 1/2 - \gamma$*. Тогда оператор* $\mathcal{L}$ *является изоморфизмом пространства* $H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)$ *на* $L_{2,\gamma}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^{2\theta}(\Omega')$*, где* $\theta = \frac{3/2+\gamma-\alpha}{2+\beta-\alpha}$*.*

В п.1.3 для уравнения (4), (5) рассматривается граничное условие Неймана

$$x_m^\alpha \partial_m u = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{9}$$

Решение ищется в пространстве функций $W_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)$ с конечным квадратом нормы

$$\|u|W_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)\|^2 = \int\limits_\Omega |x_m^{\alpha-\gamma}\partial_m^2 u|^2 + |x_m^{\alpha-\gamma-1}\partial_m u|^2 + \sum_{i,j<m} |x_m^{\beta-\gamma}\partial_{ij}u|^2 dx, \tag{10}$$

удовлетворяющих условию (9). Пространство $W_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)$ является замкнутым подпространством пространства $H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)$, поэтому нормы этих пространств эквивалентны на $W_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)$. Переформулируя абстрактную теорему разрешимости 2 для рассматриваемой задачи, получим следующее утверждение.

Теорема 9. *Если* $-1/2 < \gamma < \beta + 1/2$ *и* $x_m^\delta a_0 \in L_\infty(\Omega)$ *для какого-нибудь* $\delta < \min(2-\alpha, 1/2-\gamma)$*, то оператор* A *является изоморфизмом пространства* $W_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)$ *на пространство* $L_{2,\gamma}(\Omega)$*.*

В случае неоднородного граничного условия $x_m^\alpha \partial_m u = g$ на Γ, где $g \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2\theta}(\Omega')$ для некоторого $\theta \in (0,1)$, задачу можно записать в операторном виде:

$$\mathcal{L}_N u \equiv (Au;\ \mathrm{tr}\, x_m^\alpha \partial_m u) = (f; g). \tag{11}$$

Используя теорему 5, доказывается

Теорема 10. *Пусть* $-1/2 < \gamma < \min(\beta + 1/2, 3/2 + \beta - \alpha)$ *и* $x_m^\delta a_0 \in L_\infty(\Omega)$ *для некоторого* $\delta < \min(1/2 - \gamma, 3/2 - \alpha - \gamma)$. *Тогда оператор* $\mathcal{L}_N$ *является изоморфизмом пространства* $H^2_{\gamma,\alpha,\beta}(\Omega)$ *на пространство* $L_{2,\gamma}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^{2\theta}(\Omega')$, *где* $\theta = \frac{1/2+\gamma}{2+\beta-\alpha}$.

Раздел 2 главы 3 посвящен исследованию разрешимости уравнения 2-го порядка в частных производных

$$Au \equiv -\operatorname{div} \rho^\alpha a \nabla u + a_0 u = f \tag{12}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ класса C^2. Здесь $\rho(x)$ — положительная в Ω функция класса C^1, совпадающая в окрестности границы $\partial\Omega$ с расстоянием до нее от точки $x \in \Omega$, матрица коэффициентов $a(x) = (a_{ij}(x))$ симметрична и равномерно положительно определена в $\overline{\Omega}$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ и $a_0 \geq 0$.

В п.2.1 вводятся классы функций с весом вида $\rho^\mu(x)$. Для произвольного вещественного γ через $L_{2,\gamma}(\Omega)$ обозначается множество измеримых на Ω функций с конечным квадратом нормы

$$\|u|L_{2,\gamma}(\Omega)\|^2 = \|\rho^{-\gamma} u|L_2(\Omega)\|^2 = \int\limits_\Omega |\rho(x)^{-\gamma} u(x)|^2\, dx.$$

Для натурального $k \geq 1$ через $H^k_\gamma(\Omega)$ обозначается пространство Соболева с весом — это множество тех функций из $L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$, для которых конечен квадрат полунормы

$$\|\nabla^k u|L_{2,\gamma}(\Omega)\|^2 = \|\rho^{-\gamma}\nabla^k u|L_2(\Omega)\|^2 = \sum_{|i|=k} \int\limits_\Omega |\rho(x)^{-\gamma} D^i u(x)|^2\, dx,$$

где D^i — обобщенная производная, соответствующая мультииндексу $i = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$. Норму можно определить, например, формулой

$$\|u|H^k_\gamma(\Omega)\|^2 = \|\rho^{-\gamma}\nabla^k u|L_2(\Omega)\|^2 + \|u|L_2(\Omega')\|^2,$$

где $\Omega' \subset\subset \Omega$ (т.е. $\overline{\Omega'} \subset \Omega$) — непустая подобласть области Ω. Через $\overset{\circ}{H}{}^k_\gamma(\Omega)$ обозначается замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $H^k_\gamma(\Omega)$. Можно показать, что $\overset{\circ}{H}{}^1_\gamma(\Omega) = H^1_\gamma(\Omega)$, если $\gamma \leq -1/2$, и $\overset{\circ}{H}{}^1_\gamma(\Omega) = \{u \in H^1_\gamma(\Omega) :\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ при $\gamma > -1/2$.

$H^2_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ — пространство функций из $L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ с конечной полунормой, определяемой формулой

$$|u|^2_{\gamma,\alpha} = \sum_{i,j=1}^{m} \int\limits_{\Omega} |\rho(x)^{-\gamma}\partial_i(\rho(x)^{\alpha}\partial_j u(x)|^2 dx;$$

за норму можно взять, например, $\|u\|_{\gamma,\alpha} = (|u|^2_{\gamma,\alpha} + \|u|L_2(\Omega')\|^2)^{1/2}$. Отметим, что пространство $H^2_{\gamma,\alpha}(\Omega)$, в общем случае, не совпадает с весовым пространством Соболева $H^2_{\gamma-\alpha}(\Omega)$, однако имеют место следующие соотношения между этими пространствами (все равенства и включения понимаются не только в теоретико-множественном, но и в топологическом смысле): 1) $H^2_{\gamma,\alpha} \cap H^1_{1+\gamma-\alpha} = H^2_{\gamma-\alpha} \cap H^1_{1+\gamma-\alpha}$; 2) $H^2_{\gamma,\alpha} \subset H^2_{\gamma-\alpha}$, если $\gamma < -1/2$; 3) $H^2_{\gamma-\alpha} \subset H^2_{\gamma,\alpha}$, если $\gamma < \alpha - 1/2$; таким образом $H^2_{\gamma,\alpha} = H^2_{\gamma-\alpha}$, если $\gamma < \min(-1/2, \alpha - 1/2)$. Доказывается, что при $\alpha < \min(1, \gamma + 3/2)$ для функций из $H^2_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ корректно определен след на $\partial\Omega$; в этом случае определяется подпространство $\dot{H}^2_{\gamma,\alpha}(\Omega) = \{u \in H^2_{\gamma,\alpha}(\Omega) : \ u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$.

В п.2.2 приводятся формулы замены переменных в дифференциальных выражениях и доказывается важное для дальнейшего утверждение.

Лемма 1. *Пусть задан дифференциальный оператор*

$$Au = -\operatorname{div} |c \cdot x|^{\alpha} a \nabla u$$

с положительно определенной симметричной матрицей a, не зависящей от x, $c \in \mathbb{R}^m$ — ненулевой вектор. Тогда существует такая невырожденная матрица φ, что в новых координатах $y = \varphi x$ оператор A примет вид

$$\tilde{A}\tilde{u} = -\partial_{y_m}(|y_m|^{\alpha}\partial_{y_m}\tilde{u}) - |y_m|^{\alpha} \sum_{i=1}^{m-1} \partial^2_{y_i}\tilde{u}.$$

В п.2.3 рассматривается вырождающееся со степенью $\alpha < 1$ на $\partial\Omega$ дифференциальное уравнение (12) с граничными условиями Дирихле: $u = 0$ на $\partial\Omega$. Используя метод локальных карт и так называемое разбиение единицы, доказывается

Теорема 11. *Пусть $\alpha - 3/2 < \gamma < 1/2$ и $\rho^{\delta} a_0 \in L_{\infty}(\Omega)$ для некоторого $\delta < \min(2-\alpha, 3/2-\alpha-\gamma)$. Тогда дифференциальный оператор A в (12) является изоморфизмом пространства $\dot{H}^2_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ на $L_{2,\gamma}(\Omega)$; следовательно, для решения рассматриваемой задачи имеет место двусторонняя оценка $\|u\|_{\gamma,\alpha,\Omega} \sim \|f|L_{2,\gamma}(\Omega)\|$.*

Замечание 1. Классический результат для регулярной задачи есть частный случай доказанный теоремы при $\alpha = \gamma = 0$; при этом допускается рост коэффициента a_0 вблизи границы $\partial\Omega$, ограниченный условием $\rho^{3/2-\varepsilon} a_0 \in L_{\infty}(\Omega)$, где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Замечание 2. Поскольку $\alpha < 1$ и $\gamma < 1/2$, то $\min(2-\alpha, 3/2-\alpha-\gamma) > 0$. Поэтому условие $0 \le a_0(x) \le \mathrm{const}$ (т.е. $\beta = 0$) является достаточным для того, чтобы дифференциальный оператор A был изоморфизмом из $\dot{H}^2_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ на $L_{2,\gamma}(\Omega)$.

Обозначим через σ оператор умножения на функцию $\sigma(x) = \rho^{1-\alpha}(x)$. Доказывается, что при условии $\alpha - 3/2 < \gamma < 1/2$ оператор σ является изоморфизмом весового пространства Соболева $H^2_{\gamma-1}(\Omega)$ на пространство $\dot{H}^2_{\gamma,\alpha}(\Omega)$. Таким образом, имеет место

Теорема 12. *Решение задачи* (12) *с однородными условиями Дирихле можно представить в виде* $u(x) = \sigma(x)\hat{u}(x)$ *и в условиях теоремы 11 для* $\hat{u}(x)$ *будет выполняться двусторонняя оценка* $\|\hat{u}|H^2_{\gamma-1}(\Omega)\| \sim \|f|L_{2,\gamma}(\Omega)\|$.

Глава 4 посвящена построению специального оператора конечноэлементной аппроксимации, определенного на пространстве Лебега L_1, а также получению (неулучшаемых) оценок погрешности этой аппроксимации для функций весовых пространств Соболева. Процедура аппроксимации строится с использованием средних значений в общих узлах соседних элементов локальных проекций, т.е. проекций на конечных элементах, и позволяет сочетать различные методы локального проектирования на разных элементах, удовлетворяющие основной весовой оценке погрешности на конечном элементе (теорема 14). В частности, при использовании оператора ортогонального проектирования в L_2 на элементе, этот подход близок к известной процедуре Клемана.

В разделе 1 вводятся основные понятия и определения теории метода конечных элементов и доказываются вспомогательные утверждения.

Определение 1. *Пусть* k *- натуральное число. Лагранжевым конечным элементом типа* (k) *в* $\mathbb{R}^m$*, или лагранжевым* m*-симплексом типа* (k) *называется пара* (e, ω_e)*, где* e *есть невырожденный* m*-симплекс в* $\mathbb{R}^m$ *с вершинами* a_i*,* $i = \overline{1, m+1}$*, а*

$$\omega_e = \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i a_i : \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1, \lambda_i = (j-1)/k,\ 1 \le i, j \le k+1 \right\}$$

— множество узлов конечного элемента.

Через $P_k(e)$ обозначается множество всех полиномов на e степени k по совокупности переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$. Если e - конечный элемент типа (k), то всякий полином $\varphi \in P_k(e)$ однозначно определяется своими значениями в узлах ω_e. В частности, соотношениями

$$\varphi_z(x) = \delta_{z,x} \quad \forall z, x \in \omega_e$$

($\delta_{s,t}$ - символ Кронекера абстрактных индексов s, t) определяется базис Лагранжа $\{\varphi_z \in P_k(e) : z \in \omega_e\}$.

Далее через Ω обозначается полигональная область в $\mathbb{R}^m$. Пусть $\mathcal{T}_h$ - триангуляция области Ω на лагранжевые конечные элементы типа (k), т.е. разбиение области на элементы типа (k), при котором всякая грань конечного элемента является либо частью границы $\partial\Omega$, либо гранью другого элемента. Множество узлов триангуляции обозначается через ω_h, $\omega_h = \bigcup\limits_{e\in\mathcal{T}_h} \omega_e$. X_h — пространство конечных элементов, ассоциированное с триангуляцией $\mathcal{T}_h$ и определяемое как подмножество непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций таких, что сужение каждой из них на любой элемент $e \in \mathcal{T}_h$ принадлежит пространству полиномов $P_k(e)$.

Для $e \in \mathcal{T}_h$ положим $h_e = \operatorname{diam} e$ — диаметр элемента e и d_e — диаметр вписанного в e шара, так что $d_e < h_e$. Рассматривая семейство триангуляций $(\mathcal{T}_h)$ с параметром $h = \max\limits_{e\in\mathcal{T}_h} h_e \to 0$, предполагается выполненным условие регулярности

$$h_e \le C d_e \tag{13}$$

с постоянной $C > 1$, не зависящей от шага конечноэлементной сетки h. В двумерном случае это условие равносильно условию М.Зламала о не вырождении углов треугольников, образующих триангуляцию области.

В разделе 2 вводится оператор проектирования на конечном элементе. Для каждого $z \in \omega_e$ существует единственная функция $\psi_{z,e} \in P_k(e)$, удовлетворяющая тождеству

$$(\psi_{z,e}, \varphi)_e = \varphi(z) \quad \forall\varphi \in P_k(e), \tag{14}$$

где $(u,v)_e = \int\limits_e u(x)v(x)dx$ - скалярное произведение в $L_2(e)$. Следовательно, $(\psi_{z,e}, \varphi_{\xi,e})_e = \delta_{z,\xi}\ \forall z,\xi \in \omega_e$. Определим оператор проектирования I_e в пространство $P_k(e)$ формулой

$$I_e u(x) = \sum_{z\in\omega_e} (\psi_{z,e}, u)_e \varphi_z(x). \tag{15}$$

Функцию $\eta = I_e u \in P_k(e)$ можно определить как решение вариационной задачи: $(u-\eta, \varphi)_e = 0\ \forall\varphi \in P_k(e)$. По определению, $I_e\varphi = \varphi\ \forall\varphi \in P_k(e)$. В отличие от стандартного оператора лагранжевой интерполяции, определенного на непрерывных функциях и использующий значения функции в узлах ω_e, проектор I_e корректно определен на более широком классе $L_1(e)$.

Для компакта $\Gamma \subset \partial\Omega$ определяются весовые пространства Соболева $W^k_{q,\alpha}(\Omega)$, состоящие из функций с конечной полунормой

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^k u|_{q,\Omega} = (\sum_{|i|=k} \int\limits_\Omega |\rho^{-\alpha} D^i u|^q)^{1/q},$$

где $\rho(x)$ есть расстояние от точки x до компакта Γ.

Пусть $1 < p \le q < \infty$, $\gamma \equiv k+1-m/p-s+m/q > 0$ (что обеспечивает компактное вложение $W_p^{k+1}(\Omega)$ в $W_q^s(\Omega)$), $\alpha < \beta+\gamma$ и $1 \in L_{q,\alpha}(\Omega)$. Выполнимость данных условий влечет компактность вложения $W_{p,\beta}^{k+1}(\Omega)$ в $W_{q,\alpha}^s(\Omega)$. Наконец, для корректного определения оператора I_e на классе $W_{p,\beta}^{k+1}(\Omega)$ будем предполагать, что имеет место вложение $W_{p,\beta}^{k+1}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$. Тогда справедлива

Теорема 13. *Существует постоянная $c > 0$, не зависящая от $e \in \mathcal{T}_h$, что для всех $u \in W_{p,\beta}^{m+1}(\Omega)$ справедлива оценка*

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^s(u-I_e u)|_{q,e} \le c h_e^{\gamma}\rho_e^{\beta-\alpha}|\rho^{-\beta}\nabla^{k+1}u|_{p,e},$$

где $\rho_e = \max\{\rho(x) : x \in e\}$.

Определение 2. *Пусть $r \ge 1$ некоторое число. Будем говорить, что семейство триангуляций $(\mathcal{T}_h)_h$ сгущается вблизи Γ со степенью сгущения r, если $h_e \sim h\rho_e^{1-1/r}$, где $h = \max\{h_e : e \in \mathcal{T}_h\}$.*

Эта оценка в определении означает, что вблизи множества особых точек Γ линейные размеры конечных элементов должны быть существенно меньше шага сетки h. Именно, для для тех элементов, для которых $h_e \sim \rho_e$ будет выполняться оценка $h_e \sim h^r$. Случаю $r=1$ соответствует квазиравномерное семейство триангуляций.

При выполнении тех же условий вложения, что и в теореме 13, имеет место

Теорема 14. *Если семейство триангуляций $(\mathcal{T}_h)$ сгущается вблизи Γ со степенью сгущения $r \ge 1$, то существует постоянная $c > 0$, не зависящая от $e \in \mathcal{T}_h$, что для всех $u \in W_{p,\beta}^{k+1}(\Omega)$ справедлива оценка*

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^s(u-I_e u)|_{q,e} \le c h^{\theta}|\rho^{-\beta}\nabla^{k+1}u|_{p,e},$$

где $\theta = \min(\gamma, r(\gamma+\beta-\alpha))$.

В разделе 3 четвертой главы вводится оператор проектирования в пространство конечных элементов X_h, определенный на функциях из $L_1(\Omega)$ и дается оценка погрешности аппроксимации в весовых нормах.

Для узла конечноэлементной сетки $z \in \omega_h$ обозначим $\mathcal{T}_h(z) = \{e \in \mathcal{T}_h : z \in e\}$, $n_h(z) = \operatorname{card}\mathcal{T}_h(z)$ и линейный функционал на $L_1(\Omega)$

$$l_{h,z}(u) = \frac{1}{n_h(z)}\sum_{e\in\mathcal{T}_h(z)} I_e u(z).$$

Определим оператор проектирования I_h из $L_1(\Omega)$ в X_h формулой

$$I_h u(x) = \sum_{z\in\omega_h} l_{h,z}(u)\varphi_z(x).$$

Таким образом, значение функции $\varphi = I_h u$ в каждом узле сетки $z \in \omega_h$ есть среднее арифметическое значений $I_e u(z)$ локальных проекций на элементах e, содержащих узел z. Если $\varphi \in X_h$, то, по свойству локальных операторов проектирования, $I_e\varphi = \varphi$ на e; поэтому для $e \in \mathcal{T}_h(z)$ $I_e\varphi(z) = \varphi(z)$. Следовательно, $I_h\varphi = \varphi$, и оператор I_h является проектором на пространство X_h.

Основной результат главы содержится в следующей оценке.

Теорема 15. *Пусть $\alpha < k + \beta$, $s \in \{0, 1\}$, $1 \in L_{p,\alpha}(\Omega)$ и выполнено включение $W^{k+1}_{p,\beta}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$. Тогда для сгущающегося к Γ со степенью $r \geq 1$ семейства триангуляций $(\mathcal{T}_h)$ справедлива оценка погрешности аппроксимации*

$$|\rho^{-\alpha}\nabla^s(u - I_h u)|_{p,\Omega} \leq ch^\theta |\rho^{-\beta}\nabla^{k+1}u|_{p,\Omega},$$

где $\theta = \min(k + 1 - s, r(k + 1 - s + \beta - \alpha))$.

Эта оценка обобщает хорошо известную оценку аппроксимации кусочно-полиномиальными функциями в невесовых пространствах Соболева при $\alpha = \beta = 0$, $r = 1$.

В **разделе 4** главы 4 устанавливаются условия оптимальности аппроксимаций конечными элементами функций из весовых пространств Соболева на основе специальных геометрических характеристик, количественно описывающих качественные свойства компактных операторов и компактов в банаховых пространствах. Обзор таких характеристик и их взаимосвязь имеется в работах Б.С.Митягина, В.М.Тихомирова, А.Пелчинского, А.Пича, Х.Трибеля. Такими характеристиками являются, в частности, поперечники по Колмогорову и аппроксимационные числа, описывающие аппроксимации компактных операторов конечномерными.

В главе 5 рассмотрен ряд эллиптических краевых задач с вырождением коэффициентов в граничных точках, получены нижние оценки скорости сходимости методов Галеркина для этих задач, построены проекционно-сеточные схемы их численного решения, установлены их оценки погрешности, которые доказывают их оптимальность в энергетической норме.

Рассматриваемые краевые задачи формулируются в эквивалентной вариационной форме: вводятся билинейная форма $\mathfrak{a}(u, v)$, порождаемая дифференциальным оператором в левой части уравнения, энергетическое пространстве V, состоящее из функций с конечной нормой $\|v\|_V = \sqrt{\mathfrak{a}(v, v)}$ и удовлетворяющих краевым условиям задачи, линейный функционал $\mathfrak{f}(v)$, определяемый правой частью уравнения, и ставится задача о нахождении функции $u \in V$ такой, что

$$\mathfrak{a}(u, v) = \mathfrak{f}(v) \quad \forall v \in V. \tag{16}$$

Эта задача решается приближенно методом Галеркина, т.е. выбирается аппроксимирующее подпространство $V_n \subset V$ и ищется приближенное решение $u_n = u_{f,n} \in V_n$, удовлетворяющее тождеству

$$\mathfrak{a}(u_n, v) = \mathfrak{f}(v) \quad \forall v \in V_n. \tag{17}$$

В разделе 1 в интервале $\Omega = (0,1)$ рассматривается двухточечная задача Дирихле 4-го порядка

$$(x^\alpha a u'')'' + x^\beta b u = f, \ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \tag{18}$$

Всюду предполагается, что выполнены условия $\alpha < 1, \ \alpha < \beta + 4, \ f \in L_\infty(\Omega)$.

Исследовались различные подходы для аппроксимации решения двухточечной краевой задачи 2-го порядка с вырождением коэффициентов в одном или обоих концах интервала, в том числе сгущение сетки и использование L-сплайнов. Здесь можно указать уже упомянутые работы П.Джамет, П.Сьярле, Ф.Наттерера, Р.Варга, а также М.Крузье, Д.М.Томаса, Д.Дейли, Д.Пирса, К.Эрикссона, В.Томи и других. Метод аппроксимации, используемый в диссертационной работе основан на мультипликативном выделении особенности, а именно на представлении решения исходной задачи в виде $u(x) = x^{1-\alpha}\hat{u}(x)$ для уравнения 2-го порядка и $u(x) = x^{2-\alpha}\hat{u}(x)$ для уравнения 4-го порядка.

Введем в рассмотрение билинейную форму $\mathfrak{a}$ и линейный функционал $\mathfrak{f}$:

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int_\Omega x^\alpha a u'' v'' + x^\beta b u v \, dx, \quad \mathfrak{f}(v) = \int_\Omega f v \, dx.$$

Пусть V обозначает гильбертово пространство функций $v(x)$ с конечной нормой $\|v\|_V = \sqrt{\mathfrak{a}(v,v)}$ и удовлетворяющих краевым условиям задачи. Тогда граничная задача (18) эквивалентна вариационной задаче (16).

Для сетки узлов $\omega_n = \{\frac{i}{n} : i = \underline{0,n}\}$ обозначим через $S^{3,1}(\omega_n)$ пространство кубических сплайнов класса C^1, т.е. множество всех непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций, сужение каждой из которых на любой отрезок $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ есть полином третьей степени (кубический конечный элемент класса C^1).

В качестве аппроксимирующего подпространства V_n берется множество всех функций вида $x^{2-\alpha}\psi(x)$, где $\psi \in S^{3,1}(\omega_n), \ \psi(1) = \psi'(1) = 0$.

Теорема 16. *Имеет место оценка скорости сходимости приближенного метода* (17) *для задачи* (16)*:* $\|u - u_n\|_V \le c n^{-2} \|f\|_{L_\infty}$.

Замечание. При использовании стандартного метода конечных элементов для задачи (16), т.е. когда в качестве аппроксимирующего пространства V_n берется множество функций из $S^{3,1}(\omega_n)$, удовлетворяющих граничным условиям задачи, имеет место лишь оценка $\|u-u_n\|_V \sim cn^{\frac{\alpha-1}{2}}\|f\|_{L_\infty}$.

В разделе 2 в области $\Omega = (0,1)\times(0,1) \subset R^2$ рассматривается краевая задача Дирихле

$$-\partial_1(x_1^\alpha a_1(x)\partial_1 u(x)) - \partial_2(x_1^\alpha a_2(x)\partial_2 u(x)) = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{19}$$

с вырождением коэффициентов уравнения по переменной x_1 на части границы $\Gamma = \{0\}\times[0,1]$. Предполагается, что $\alpha < 1$, коэффициенты $a_i(x)$ достаточно гладкие, $a_i(x) \geq c_0 > 0$ для $i = 1,2$, правая часть $f \in L_{2,\gamma}(\Omega)$ и выполнено условие $1+\gamma-\alpha/2 > 0$. Билинейная форма задачи определяется формулой

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int\limits_\Omega x_1^\alpha a_1(x)\partial_1 u(x)\partial_1 v(x) + x_1^\alpha a_2(x)\partial_2 u(x)\partial_2 v(x)\; dx,$$

линейный функционал $\mathfrak{f}(v) = \int\limits_\Omega f(x)v(x)dx$. Доказывается, что при сделанных предположениях существует единственное решение задачи (16).

Пусть $V_n \subset V$ — произвольная последовательность подпространств размерности $n = 1,2,\ldots$ Обозначим через u_f решение задачи (16) для правой части $f \in L_{2,\gamma}(\Omega)$ и через $u_f^n \in V_n$ приближение по Галеркину в подпространстве V_n, т.е. решение задачи (17). Введем функцию ошибки, положив

$$E_n = E(V_n) = \sup\{\|u_f - u_f^n\|_V : \|x_1^{-\gamma} f\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\}.$$

Для $\lambda > 0$ и натурального n определим также функцию

$$h_\lambda(n) = \begin{cases} n^{-1/2}\,, & \textbf{если} \;\; \lambda > \mathbf{1/2} \\ n^{-1/2}\ln^{1/2} n\,, & \textbf{если} \;\; \lambda = \mathbf{1/2} \\ h_\lambda(n) = n^{-\lambda}\,, & \textbf{если} \;\; \lambda < 1/2. \end{cases}$$

Используя оценку решения в теореме 6 главы 3 и оценки поперечников по Колмогорову в весовых пространствах Соболева, доказывается нижняя оценка скорости сходимости произвольного метода Галеркина.

Теорема 17. *Пусть $\lambda = 1+\gamma-\alpha/2 > 0$. Существует такая постоянная $c_0 > 0$, что для погрешности аппроксимаций (17) имеет место оценка $E_n \geq c_0 h_\lambda(n)$.*

Далее строится проекционно-сеточная схема на основе мультипликативного выделения особенности, для которой нижняя оценка достигается, т.е. с оптимальной скоростью сходимости. Пусть $(\mathcal{T}_n)$ — семейство триангуляций области Ω, $\operatorname{card}\mathcal{T}_n \simeq n$, X_n — пространство линейных конечных элементов. Введем пространство $V_n \subset V$, состоящее из функций вида $x_1^{1-\alpha}\psi(x)$, где $\psi \in X_n$ и $\psi(x) = 0$ на части границы $\partial\Omega\setminus\Gamma$. Заметим, что $\dim V_n \simeq n$.

Теорема 18. *В зависимости от* $\lambda = \min(1, 1+\gamma-\alpha/2)$ *выберем степень сгущения триангуляций* $(\mathcal{T}_n)$ $r = 1/\lambda$, *если* $\lambda \geq 1/2$ *и* $r \in (2, 1/\lambda]$, *если* $\lambda < 1/2$. *Тогда для решений* $u_f^n \in V_n$ *задач (17) имеет место сходимость* $E(V_n) \leq ch_\lambda(n)$. *В частности, для* $f \in L_\infty(\Omega)$ *справедлива оценка* $E(V_n) \leq cn^{-1/2}$ *на квазиравномерной сетке.*

Замечание. Стандартный метод конечных элементов, с использованием кусочно-линейных аппроксимаций, при вырождении $\alpha \in (0,1)$ дает лишь сходимость $E_n \geq c_0 n^{\frac{\alpha-1}{4}}$ на равномерной сетке и $E_n \geq c_0 n^{\frac{\alpha-1}{2}} >> h_\lambda(n)$ на сгущающейся сетке.

Раздел 3 главы 5 посвящен построению оптимальных проекционно-сеточных схем для задач с вырождением в угловой точке. Для задач в областях с угловыми точками без вырождения коэффициентов в работах Е.А.Волкова, И.Бабушки, Г.Стренга и Дж.Фикса, А.Шатса и Л.Уолбина, В.В.Шайдурова анализировались способы локального сгущения сетки. Р.З.Даутовым предложена схема МКЭ с мультипликативным выделением особенности в окрестности угловой точки. В диссертационной работе этот метод обобщается на случай вырождения коэффициентов в угловой точке.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — угловой сектор раствора $\theta \in (0, 2\pi]$ с вершиной в начале координат O, который описывается в полярных координатах условиями $0 < r < 1,\ 0 < \varphi < \theta$. В области Ω рассматривается модельная задача

$$-\operatorname{div}\ \rho^\alpha \nabla u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{20}$$

Здесь $\rho(x) = |x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $f \in L_{2,\gamma}(\Omega)$, т.е. $\rho^{-\gamma} f \in L_2(\Omega)$. Задача имеет три различных типа особенностей в угловой точке, характеризуемых тремя вещественными параметрами: θ, или $\lambda = \pi/\theta$, α и γ.

Билинейная форма и линейный функционал определяются формулами

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int\limits_\Omega \rho^\alpha \nabla u \cdot \nabla v dx, \qquad \mathfrak{f}(v) = \int\limits_\Omega f(x)v(x)dx$$

на энергетическом пространстве $V = \{v \in L_{2,\text{loc}} : \|v\|_V = \sqrt{a(v,v)} < \infty,\ v = 0$ на $\partial\Omega\}$. Краевая задача (20) эквивалентна вариационной задаче (16) с введенными $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{f}$ на пространстве V. Доказывается, что при условии $1 + \gamma - \alpha/2 \geq 0$ задача (16) имеет единственное решение.

Пусть $V_n \subset V$ — произвольная последовательность подпространств размерности $n \in \mathbb{N}$. Также как и в предыдущем разделе через u_f обозначается решение задачи (16) для правой части $f \in L_{2,\gamma}(\Omega)$ и через $u_f^n \in V_n$ — приближение по Галеркину в подпространстве V_n, т.е. решение задачи (17). Ошибка аппроксимации на классе правых частей $L_{2,\gamma}(\Omega)$ вычисляется по формуле

$$E_n = E(V_n) = \sup\{\|u_f - u_f^n\|_V : \|\rho^{-\gamma} f\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\}.$$

Справедлива

Теорема 19. *Если* $1+\gamma-\alpha/2>0$*, то имеет место нижняя оценка скорости сходимости* $E_n \geq c_0 n^{-1/2}$.

Обозначим через S часть границы $\partial\Omega$, состоящую из отрезков $\varphi=0$ и $\varphi=\theta$. Введем функцию

$$\sigma(r,\varphi)=r^{\beta}\sin\lambda\varphi, \text{ где } \lambda=\pi/\theta, \quad \beta=\frac{\sqrt{4\lambda^2+\alpha^2}-\alpha}{2}.$$

Пусть $(\mathcal{T}_n)$ — семейство триангуляций области Ω, $\operatorname{card}\mathcal{T}_n\simeq n$, X_n — пространство линейных конечных элементов. Положим $\Omega_n=\cup\{e: e\in\mathcal{T}_n\}$, $S_n=\partial\Omega_n\setminus S$ и определим аппроксимирующие подпространства двумя методами — кусочно-линейными функциями на сгущающейся сетке и кусочно-линейными функциями, умноженными на весовую функцию σ, определенную выше: $V_n=\{v\in X_n: v=0 \text{ на } \partial\Omega_n\}$, $\hat V_n=\{\sigma v: v\in X_n, v=0 \text{ на } S_n\}$.

Рассматриваются три возможных случая значения $1+\gamma-\alpha/2$, которое определяет степень сгущения сетки в окрестности угловой точки для достижения оптимальной скорости сходимости.

1. $0<1+\gamma-\alpha/2<\frac{\sqrt{4\lambda^2+\alpha^2}}{2}$. Для V_n и $\hat V_n$ выбирается одна и та же степень сгущения сетки $r_1=\max(1,\frac{1}{1+\gamma-\alpha/2})$.

2. $\frac{\sqrt{4\lambda^2+\alpha^2}}{2}\leq 1+\gamma-\alpha/2<\frac{\sqrt{16\lambda^2+\alpha^2}}{2}$. Степень сгущения сетки для V_n — $r_2=\max(1,\frac{2}{\sqrt{4\lambda^2+\alpha^2}})$. Степень сгущения для $\hat V_n$ как и в первом случае — r_1. Заметим, что $r_1\leq r_2$.

3. $\frac{\sqrt{16\lambda^2+\alpha^2}}{2}\leq 1+\gamma-\alpha/2$. Для V_n степень сгущения, как и в предыдущем случае, равна r_2. Для $\hat V_n$ выбираем $r_3=\max(1,\frac{2}{\sqrt{16\lambda^2+\alpha^2}})$. Очевидно, что и в этом случае степень сгущения r_3 для построения $\hat V_n$ меньше, чем r_2.

Доказывается, что во всех случаях получается оптимальная скорость сходимости $E(V_n)\simeq n^{-1/2}$ и $E(\hat V_n)\simeq n^{-1/2}$ на классе правых частей $L_{2,\gamma}$. В частности, верна

Теорема 20. *Если* $\gamma\geq\alpha/2$*, то для равномерной сетки с шагом* $h\simeq n^{-1/2}$ *и аппроксимации вида* $u_n=\sigma\hat u_n$*, где* $\hat u_n\in\hat V_n$*, имеет место оптимальная скорость сходимости в энергетической норме*

$$\|u-u_n\|_V\leq c\frac{\|\rho^{-\gamma}f\|_{L_2(\Omega)}}{\sqrt{n}}.$$

В разделе 4 в области $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ рассматривается задача на собственные значения с вырождающимися на $\Gamma=\{0\}\times[0,1]$ коэффициентами:

$$-\partial_1(x_1^{\alpha}a_1\partial_1 u)-x_1^{\alpha}\partial_2(a_2\partial_2 u)=\lambda x_1^{\beta}bu \text{ в } \Omega,\ u=0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{21}$$

Здесь $\alpha < \min(1, \frac{2}{3}\beta+1, \beta+2)$. На пространстве $V = \overset{\circ}{H}{}^1_{-\alpha/2}(\Omega)$ определяются билинейные формы

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{2} x_1^{\alpha} a_k \partial_k u \partial_k v dx, \quad \mathfrak{b}(u,v) = \int\limits_{\Omega} x_1^{\beta} b u v dx.$$

Исходную задачу (21) можно записать в вариационном виде, как задачу об отыскании собственных пар $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times V$, удовлетворяющих уравнению

$$\mathfrak{a}(u,v) = \lambda \mathfrak{b}(u,v) \quad \forall v \in V. \tag{22}$$

Доказывается, что существует счетное семейство собственных значений $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, $\lambda_i \to \infty$ и соответствующих им собственных функций u_i.

Пусть $(\mathcal{T}_n)$ — семейство квазиравномерных триангуляций прямоугольника Ω, $\operatorname{card} \mathcal{T}_n \simeq n$, X_n — пространство линейных конечных элементов. Введем пространство $V_n \subset V$, состоящее из функций вида $x_1^{1-\alpha}\psi(x)$, где $\psi \in X_n$ и $\psi(x) = 0$ на части границы $\partial\Omega \setminus \Gamma$ и будем использовать его для аппроксимации задачи (22). Приближенными решениями называются пары $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times V_n$, $u \neq 0$, удовлетворяющие уравнению

$$\mathfrak{a}(u,v) = \lambda \mathfrak{b}(u,v) \quad \forall v \in V_n. \tag{23}$$

Теорема 21. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) для каждой собственной функции $u_{i,n}$ задачи (23) существует собственная функция u_i задачи (22), соответствующая собственному значению λ_i, что $\|u_i\|_V = 1$ и справедлива оценка в энергетической норме $\|u_i - u_{i,n}\|_V \leq c_i n^{-1/2}$, где c_i не зависит от n;

(ii) для соответствующих собственных значений задач (22) и (23) имеет место оценка $0 \leq \lambda_{i,n} - \lambda_i \leq c_i n^{-1}$.

Список основных публикаций

[1] Тимербаев М.Р. Теоремы вложения весовых пространств Соболева / М.Р.Тимербаев // Изв.вузов. Математика. – 1991. – №9. – С.56-60.

[2] Тимербаев М.Р. Оценки погрешности n-мерной сплайн-интерполяции в весовых нормах / М.Р.Тимербаев // Известия вузов. Математика. – 1992. – №10. – С. 54 – 60.

[3] Ляшко А.Д. Оценки точности схем МКЭ для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / А.Д.Ляшко, М.Р.Тимербаев // Дифф.уравнения. - 1993. - №7. - с. 1210-1215.

[4] Тимербаев М.Р. Об оценках погрешности схем МКЭ для квазилинейных вырождающихся уравнений 2-го порядка / М.Р.Тимербаев, А.Д.Ляшко // Дифф.уравнения. - 1994.- Т.30, №7. - с.1239-1243.

[5] Тимербаев М.Р. Конечноэлементная аппроксимация вырождающегося эллиптического уравнения 2-го порядка в области с криволинейной границей / М.Р.Тимербаев // Изв.вузов. Математика - 1994. - №9. - с. 78-86.

[6] Ljashko A.D. Convergence of the finite element method for nonlinear elliptic equation with degeneration / A.D.Ljashko, M.R.Timerbaev // Abstracts of International Conference "Optimization of Finite Element Approximation", June 25-29, 1995, St-Petesburg.- p.70-71.

[7] Ляшко А.Д. Метод конечных элементов для эллиптического уравнения с вырождением коэффициентов внутри области / А.Д.Ляшко, М.Р.Тимербаев // Материалы международной конференции и чебышевских чтений, посвященных 175-летию П.Л. Чебышева, Москва, 13-16 май, 1996. - с.324-236.

[8] Карчевский М.М. Метод конечных элементов для квазилинейных вырождяющихся эллиптических уравнений четвертого порядка / М.М.Карчевский, А.Д.Ляшко, М.Р.Тимербаев // Материалы Всерос. семинара "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач", Казань, изд-во Казанского мат. об-ва. - 1998. - с.46-47.

[9] Ляшко А.Д. Метод конечных элементов для линейного эллиптического уравнения, вырождающегося внутри области / А.Д.Ляшко, М.Р.Тимербаев // Материалы Всерос. семинара "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач", Казань, изд-во Казанского мат. об-ва. - 1998. - с.51-52.

[10] Тимербаев М.Р. Оценки погрешности аппроксимации конечными элементами класса C^1 в весовых пространствах / М.Р.Тимербаев // Материалы Всерос. семинара "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач", Казань, изд-во Казанского мат. об-ва. - 1998. - с.69-70.

[11] Карчевский М.М. Метод конечных элементов для квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений 4-го порядка / М.М.Карчевский, А.Д.Ляшко, М.Р.Тимербаев // Дифф. уравнения. – 1999. – Т.35, №2. – с. 232-237.

[12] Ляшко А.Д. Вопросы разрешимости и метод конечных элементов для вырождающихся эллиптических уравнений / А.Д.Ляшко, М.Р.Тимербаев // Известия вузов. Математика. – 1999. – №5. – С. 57 – 64.

[13] Карчевский М.М. Смешанный метод конечных элементов для вырождающихся эллиптических уравнений четвертого порядка / М.М.Карчевский, А.Д.Ляшко, М.Р.Тимербаев // Труды VIII Всеросс. шк.-сем. "Современные проблемы математического моделирования", Ростов-на-Дону: изд-во РГУ. - 1999. - с.102-106.

[14] Карчевский М.М. Смешанный Метод конечных элементов для квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений четвертого порядка / М.М.Карчевский, А.Д.Ляшко, М.Р.Тимербаев // Дифф. уравнения. – 2000. – Т.52, №7 – С.1050-1057.

[15] Тимербаев М.Р. Мультипликативное выделение особенности в схемах МКЭ для эллиптических вырождающихся уравнений / М.Р.Тимербаев // Дифф. уравнения. – 2000. – т.52, №7. – с.1086–1093.

[16] Тимербаев М.Р. Конечноэлементная аппроксимация в весовых пространствах Соболева / М.Р.Тимербаев // Изв. вузов. Математика. – 2000. – №11. – с.76–84.

[17] Тимербаев М.Р. О схемах МКЭ с весом для эллиптических вырождающихся уравнений 2-го порядка / М.Р.Тимербаев // В материалах семинара "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач", Казань, 18-21 сентября 2000. - с.116-117.

[18] Тимербаев М.Р. Метод конечных элементов для эллиптических задач 2-го порядка с анизотропным вырождением / М.Р.Тимербаев // Abstracts of International Conference "Optimization of Finite Element Approximation & Splines and Wavelets", June 25-29, 2001, St-Petersburg.- p.74-75.

[19] Тимербаев М.Р. О весовых оценках аппроксимации эрмитовыми элементами / М.Р.Тимербаев // Сб.трудов IX всероссийской школы-семинара "Современные проблемы математического моделирования", изд-во Рост.гос.ун-та, 2001. - с.345-350.

[20] Тимербаев М.Р. О регуляризованной двухсеточной аппроксимации задачи на собственные значенния с вырождающимся оператором / М.Р.Тимербаев // В материалах семинара "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач", Казань, 14-16 сентября 2002.

[21] Тимербаев М.Р. Весовые оценки решения задачи Дирихле с анизотропным вырождением на части границы / М.Р.Тимербаев // Изв. вузов. Математика. – 2003. – №1. – С. 60-73.

[22] Тимербаев М.Р. Двухсеточная аппроксимация задачи на собственные значения с вырождающимся оператором / М.Р.Тимербаев // В тез. докл. Всероссийской конф. "Актуальные проблемы математики и механики", Екатеринбург, 3.02.-7.02.2003. - с.74-75.

[23] Тимербаев М.Р. Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева. I. / М.Р.Тимербаев // Изв. вузов. Математика. – 2003. – №3. – С.55-65.

[24] Timerbaev M. Optimal convergence of the special finite element method for the boundary-value problem with anisotropic degeneration / M.Timerbaev // Abstracts of International Conference "Computational Methods in Applied Mathematics", July 20-24, 2003, Minsk. - p.57.

[25] Тимербаев М.Р. Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева. II. / М.Р.Тимербаев // Изв. вузов. Математика. - 2003. - N 9. - с.46-53.

[26] Тимербаев М.Р. Оптимальная сходимость метода конечных элементов для задачи Дирихле с вырождением на границе / М.Р.Тимербаев // В материалах Всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения", Казань, 17-21 сентября 2004. - с.220-223.

[27] Тимербаев М.Р. Оценки погрешности конечно-элементной задачи на собственные значения с вырождющимся оператором / М.Р.Тимербаев // В материалах Всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения", Казань, 17-21 сентября 2004. - с.223-225.

[28] Тимербаев М.Р. О схемах МКЭ для 2-точечной задачи Дирихле 4-го порядка со слабым вырождением / М.Р.Тимербаев // В сб. "Исследования по прикладной математике и информатике", Каз.ГУ. - 2004. - вып.25. - с.127-132.

[29] Тимербаев М.Р. Весовые оценки решения анизотропно вырождающегося уравнения с граничными условиями Неймана в точках вырождения / М.Р.Тимербаев // Изв.вузов. Математика. - 2005.- № 7. - С. 63-76.

[30] Тимербаев М.Р. Оптимальные схемы МКЭ для задачи с вырождением в угловой точке / М.Р.Тимербаев // В материалах Всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения", Казань, 30 сентября-3 октября 2005. - с.212-214.

[31] Тимербаев М.Р. Аппроксимация конечными элементами краевой задачи на собственные значения вырождающегояс дифференциального оператора / М.Р.Тимербаев // Уч. записки КазГУ. – 2005. – т.147, кн.3. – С. 157-165.

[32] Тимербаев М.Р. Оптимальные конечноэлементные аппроксимации задачи с вырождением в угловых точках / М.Р.Тимербаев // В тез.докл. 3-ей Международной конф. "Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания", Обнинск, 14-18 мая 2006 г. - С.112-113.

[33] Тимербаев М.Р. О дискретизации краевой задачи на собственные значения вырождающегося дифференциального оператора / М.Р.Тимербаев // Труды Средневолжского мат. об-ва, Саранск. - 2006. - т.8. - №1. - С.306-309.

[34] Тимербаев М.Р. Оптимальные схемы МКЭ для задачи об изгибе балки с острым краем / М.Р.Тимербаев // Вестник Удм.ун-та. Математика. Ижевск. - 2007. - №1. - С.127-134.

[35] Таюпов Ш.И. О методе декомпозиции области для эллиптической задачи с вырождающимися внутри области коэффициентами / Ш.И.Таюпов, М.Р.Тимербаев // В сб. трудов 4-ой Всероссийской конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи", Самара, 29-31 мая 2007 г. – С.180-183.

[36] Тимербаев М.Р. Оптимальные аппроксимации конечными элементами краевых задач с вырождением / М.Р.Тимербаев // В тез.докл. Всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ -2007, Новосибирск, 18-20 июня 2007 г. – С.83.

В совместных работах результаты принадлежат авторам в равной мере.

Статьи [1]-[5], [11], [12], [14]-[16], [21], [23], [25], [29] напечатаны в журналах, рекомендованных ВАК РФ для публикации результатов докторских диссертаций.