МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А.СТЕКЛОВА РАН

На правах рукописи

МИССАРОВ Мукадас Дмухтасибович

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА В ИЕРАРХИЧЕСКИХ И p-АДИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

01.01.03 — математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА — 1999

Работа выполнена в Казанском государственном университете

Официальные оппоненты:
доктор физ.-мат. наук И.В.Волович,
доктор физ.-мат. наук, профессор В.Б.Приезжев,
доктор физ.-мат. наук В.А.Смирнов.

Ведущая организация — Институт Проблем Передачи Информации РАН

Защита диссертации состоится " " 1999 года в часов на заседании Диссертационного совета Д.002.38.01 при Математическом Институте им. В.А.Стеклова РАН (Москва, 117966, ГСП-1, ул. Вавилова, 42).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИРАН.

Автореферат разослан " " 1999 года.

Ученый секретарь
Диссертационного совета

Дрожжинов

0-735661

Актуальность темы. Метод ренормализационный группы (РГ) является одним из основных методов исследования систем квантовой теории поля и статистической физики. Первая квантово-полевая версия метода РГ была развита в работах М.Гелл-Манна и Ф.Лоу, Н.Н.Боголюбова и Д.В.Ширкова. Позднее К.Вильсон, основываясь на аналогиях между квантовой теорией поля и статистической физикой, предложил свой вариант РГ. Замечательным успехом нового метода РГ является современная теория критических явлений. Вместе с тем этот метод поставил много серьезных математических проблем, связанных как с его обоснованием, так и развитием вычислительного формализма. Главной трудностью РГ-анализа является нелокальность РГ-преобразования. В иерархических моделях, введенных в математическую физику Ф.Дайсоном, РГ-преобразование локально. Это обстоятельство позволило П.М.Блехеру и Я.Г.Синаю[1] провести строгое обоснование Вильсоновской картины критических явлений в рамках бозонной иерархической модели. Различные иерархические модели рассматривались в работах Д.Галлавотти, П.Колле и Ж.-П.Экмана, К.Гавендзкого и А.Купяйнена и многих других авторов. Они послужили источником накопления первоначальной интуиции и полигоном для отработки методов, которые затем иногда переносились в традиционные модели. Преобразование РГ в бозонных иерархических моделях порождает сложную динамическую систему в бесконечномерном пространстве плотностей свободных мер, поэтому многие результаты справедливы только в окрестности гауссовской неподвижной точки. Поиск и разработка новых иерархических моделей является актуальной задачей.

Непрерывными версиями иерархических моделей являются p-адические модели. Под последними мы понимаем Модели, в которых поле определено на d-мерном p-адическом пространстве Q_p^d но принимает значение в R или в алгебре Грассмана. Предложение рассматривать p-адические модели в контексте теории струн впервые появилось в работе И.В.Воловича[2]. В последние годы были рассмотрены p-адические аналоги различных объектов математической физики — см. книгу В.С.Владимирова, И.В.Воловича, Е.И.Зеленова [3]. Ряд теоретиков предполагает, что дискретно-нормированные поля типа p-адических могут оказаться полезными при описании

[1] *Bleher P.M., Sinai Ja.G.* Investigation of the critical point in models of the type of Dyson's hierarchical models. Commun. Math. Phys. 1973. V.33. P.23.

[2] *Волович И.В.* p-адическое пространство- время и теория струн. ТМФ. 1987. Т.71. С.337-340.

[3] *Владимирова В.С., Воловича И.В., Зеленова Е.И.* p-адический анализ и математическая физика. М: Наука. 1994.

структуры пространства-времени на малых расстояниях. Ю.И.Маниным выдвинута гипотеза о том, что вещественная теория и все ее p-адические аналоги могут объединиться в одну модель на группе аделей с замечательными аналитическими свойствами. Существенный аргумент в пользу изучения p-адических моделей состоит в том, что p-адические теории (как и иерархические) могут оказаться полезными с методологической точки зрения в сложных задачах математической физики:

Целью диссертационной работы является изучение критических явлений, построение термодинамического и непрерывного предела в фермионной иерархической модели, развитие формализма теории возмущениий в p-адической квантовой теории поля, установление связи между p-адическими и иерархическими моделями.

Методы исследования, использованные в диссертационной работе представляют собой развитие методов ренормализационной группы в реальном пространстве, которые в случае фермионной иерархической модели являются методами теории конечномерных динамических систем. При построении теории p-адических фейнмановских интегралов и их перенормировок мы развиваем методы p-адического анализа, а также используем методы функционального и комплексного анализа.

Теоретическое значение и научная новизна работы определяются следующим:

1. Предложена новая фермионная иерархическая модель. Изучена глобальная динамика потока ренормализационной группы в этой модели, что позволило описать картину критических явлений и решить проблему термодинамического предела для ряда областей в плоскости констант связи. Построен непрерывный предел в этой модели, который на самом деле является p-адической фермионной теорией, причем для нерезонансных значений параметра ренормгруппы константы связи непрерывной теории конечны и могут быть восстановлены по константам связи иерархической модели.

2. Показано, что дискретизация случайных полей на p-адических пространствах приводит к моделям на иерархической решетке. Проблема вычисления нетривиального функционального интеграла, задающего плотность свободной меры в дискретизованной модели, ставится и решается как проблема теории функциональных уравнений. Проблема ультрафиолетовых расходимостей трактуется как проблема малых знаменателей.

3. Получены явные формулы для p-адических фейнмановских амплитуд во всех порядках теории возмущений и построена теория аналитической перенормировки таких амплитуд. Предложена новая процедура перенормировок, основанная на анализе функционального уравнения для плотности

свободной меры. В случае фермионной иерархической модели эта процедура сводится к построению нормализующего отображения к преобразованию ренормгруппы в нуле.

4. Построены различные процедуры ε–разложений на языке формальных гамильтонианов в евклидовых и p–адических моделях статистической физики.

Аппробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах Казанского и Московского университетов, научно–исследовательского института математики и механики им.Н.Г.Чеботарева (Казань), Института теоретической и экспериментальной физики (Москва), на семинарах отделов математической физики и квантовой теории поля Математического института им.В.А.Стеклова РАН, Центра теоретической физики (Люмини, Марсель, Франция), Института высших научных исследований (Бюр–сюр–Ивет, Франция), на I Всемирном конгрессе общества Бернулли (Ташкент, 1986г.), на международных Вильнюсских конференциях по теории вероятностей и математической статистике (1989г.,1993г.), на международном совещании "Ренормгруппа–91" (Дубна, 1991г.), на международной конференции по конструктивной теории поля (Париж, 1994г.), на международной конференции, посвященной 175-летию со дня рождения П.Л.Чебышева (Москва, 1996г.), на 2-ом европейском математическом конгрессе (Будапешт, 1996г.), на международном математическом конгрессе (Берлин, 1998г.).

Публикации. Содержание диссертации отражено в статьях [1–18]. Теорема 5.2, содержащаяся в статье [1], написанной в соавторстве с П.М.Блехером, получена непосредственно автором. Статьи [2–4],[10–11] написаны в соавторстве с моим учеником Э.Ю.Лернером. Постановка задач и идеи доказательств основных теорем, содержащихся в этих работах, принадлежат автору.

Структура И объем работы. Диссертация состоит из введения, 26 разделов, объединенных в пять глав, двух приложений, списка цитированной литературы из 92 наименований. Общий объем — 284 страницы.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность, ставятся цель и задачи исследования, подробно разбирается мотивация этих задач и краткое содержание диссертации.

Содержание глав 1-5 кратко может быть охарактеризовано следующим образом. В первых двух главах мы изучаем фермионную иерархическую модель (мы будем также называть ее $(\bar\psi\psi)^2$–моделью). Определим иерархическую решетку Л как множество натуральных чисел, на котором задано иерархическое расстояние $d(i,j)$, $i,j \in \Lambda = N$. Пусть п > 1 — натуральный параметр и $V_{ks} = \{j \in N : \ (k-1)n^s < j \leq kn^s\}$, $k \in N, s \in N$. Определим иерархическое расстояние $d(i,j)$ как мощность минимального блока V_{ks}, содержащего точки *г* и *j*. Спин в этой модели задается набором из четырех компонент $\psi^*(i) = (\psi_1(i), \bar\psi_1(i), \psi_2(i), \bar\psi_2(i))$, являющихся образующими алгебры Грассмана Г. Гауссовское фермионное поле задается состоянием $\rho_0(\alpha)$ на алгебре Г с бинарной корреляционной функцией

$$\langle\psi_1(i)\bar\psi_1(j)\rangle = \langle\psi_2(i)\bar\psi_2(j)\rangle = const\, d^{\alpha-2}(i,j),\ \langle\psi_1(i)\psi_1(j)\rangle = \langle\bar\psi_1(i)\bar\psi_1(j)\rangle = 0, \tag{1}$$

а негауссовское поле строится как гиббсовская перестройка гауссовского состояния $\rho_0(\alpha)$ *с* помощью потенциала

$$L(\psi^*(i); r, g) = r(\bar\psi_1(i)\psi_1(i) + \bar\psi_2(i)\psi_2(i)) + g\bar\psi_1(i)\psi_1(i)\bar\psi_2(i)\psi_2(i). \tag{2}$$

РГ–преобразование фермионного поля задается формулой

$$\xi^{*\prime}(i) = (r(\alpha)\xi)(i) = n^{-\alpha/2} \sum_{j:d(ni,j)\leq n} \xi(j). \tag{3}$$

Состояние $\rho_0(\alpha)$ РГ–инвариантно, а действие РГ в пространстве констант связи $(r, д)$ вычисляется явно и является рациональным отображением. Все неподвижные точки РГ находятся явно, причем, как и в бозонном случае, при а — 3/2 происходит бифуркация одной из неподвижных точек (“+”–ой НТ) от тривиальной гауссовской. Кроме того, имеется еще одна конечная неподвижная точка (“–”–ая НТ), аналог которой в бозонном случае неизвестен и которую, вообще говоря, невозможно обнаружить методами теории возмущений. Наконец, имеется бесконечно удаленная неподвижная точка, “плотность” свободной меры которой является “грассмановой” *6*-функцией и которую нельзя описать в (r, g)–координатах.

В главе 1-ой изучаются устойчивые РГ–инвариантные кривые для различных неподвижных точек. Выделяются РГ-инвариантные области в верхней и нижней полуплоскостях констант связи, что позволяет расклассифицировать точки плоскости по способу ухода их (при РГ–итерациях) на бесконечность. Мы изучаем асимптотику РГ–итераций и показываем, что она определяется спектром дифференциала РГ–отображения в нуле. Приводятся результаты компьютерных экспериментов, показывающие сложное глобальное поведение инвариантных кривых.

В главе 2-ой все эти результаты используются при изучении вопроса о термодинамическом пределе и критическом поведении в $(\bar\psi\psi)^2$–модели.

Критические явления описываются в терминах предельного поведения грассмановозначной плотности распределения суммарного спина с подходящей нормировкой. Если зафиксировать константу r и трактовать константу ∂ как обратную температуру, мы получаем необычную картину критических явлений, в которой поведение предельной плотности суммарного спина меняется бесконечно много раз на конечном интервале температур. Мы также вычисляем некоторые критические индексы. Непрерывным аналогом иерархической $(\bar{\psi}\psi)^2$–модели является p–адическая $(\bar{\psi}\psi)^2$–модель. Мы показываем, что константы связи гамильтониана дискретизации p-адической модели на иерархическую решетку вычисляются по константам связи гамильтониана p–адической теории с помощью преобразования, которое является нормализующим преобразованием к отображению РГ в нуле. Вычисление функционального интеграла, задающего процедуру дискретизации, сводится к решению 2-мерного функционального уравнения, а серия ультрафиолетовых полюсов p–адической $(\bar{\psi}\psi)^2$–теории трактуется как серия резонансных значений этого уравнения. Обратимость РГ-преобразования позволяет дать простое решение проблемы непрерывного предела. Более того, показано, что если параметр РГ не является резонансным значением, то можно восстановить константы связи непрерывной теории по константам связи решетчатой теории.

Отметим, что некоторый вырожденный вариант иерархической фермионной модели изучался Т.Дорласом[4]. Эта модель описывалась не в гиббсовской форме, и поэтому вопрос о критическом поведении не ставился. Значения a и n были фиксированными, что привело к некоторым артефактам.

В главе 3-ей изучаются трансляционно– и скейлинг-инвариантные (автомодельные) гауссовские случайные поля над d–мерным p– адическим пространством. Показано, что дискретизация этих полей приводит к иерархическим гауссовским полям. Изучается процедура дискретизации p-адической φ^4 теории, гауссовская часть которой задается автомодельным с параметром a гамильтонианом. Показано, что также как и в фермионном случае, плотность распределения спина в дискретизованной модели может быть найдена как решение функционального уравнения, которое в бозонном случае уже является интегральным. Процедура решения этого уравнения автоматически суммирует подклассы p–адических феинмановских амплитуд. В конце 3–ей главы мы вводим понятие ренормализационной группы для обобщенных случайных полей на группе аделей и строим пример гауссовского автомодельного (т.е. РГ–инвариантного) поля.

---

[4] *Dorlas T.C.* Simple hierarchical fermion model. Commun. Math. Phys. 1991. V.136. P.169.

Глава 4 посвящена теории p–адических фейнмановских амплитуд и их перенормировок. Ультраметричность p–адической нормы позволяет получить разложение амплитуды в конечную сумму по так называемым иерархическим семействам. Коэффициенты этого разложения могут быть вычислены явно. В конечном счете, все сводится к вычислению интеграла от p–адической амплитуды по всем переменным по единичному шару. Для последнего интеграла существует явное представление, которое позволяет построить теорию аналитической и размерной перенормировок на уровне фейнмановских амплитуд.

Отметим, что в работах [10],[14] изучались p–адические фейнмановские амплитуды в координатном представлении. Алгоритмы для вычисления амплитуд в импульсном представлении и общая теория R–операции построены в работах Э.Ю.Лернера[5]. Несколько другие представления для p–адических фейнмановских амплитуд и другие переномировочные схемы в низших порядках теории возмущений рассмотрены в работе В.А.Смирнова[6].

В разделе 4.4 мы описываем новую процедуру перенормировок, использующую функциональное уравнение для плотности спина дискретизованной модели. В случае $(\bar\psi\psi)^2$–теории процедура перенормировки сводится к обращению оператора дискретизации. В случае же φ^4–теории мы обращаем отображение, задаваемое двумя первыми коэффициентами разложения плотности спина дискретизованной модели в ряд по степеням поля (коэффициенты сами представляют собой формальные степенные ряды от констант связи непрерывной теории). Фактически процедура перенормировки позволяет нам построить (локальное) вложение преобразования ренормгруппы в непрерывную полугруппу преобразований. Генераторы этой полугруппы являются β–функциями p–адической теории, и нетривиальные нули β–функций задают нетривиальные неподвижные точки РГ. В последнем разделе главы 4 мы изучаем амплитуды формальной адельной безмассовой φ^4–теории и показываем перенормируемость этих амплитуд вплоть до 3-го порядка теории возмущений.

В первых разделах главы 5-ой мы возвращаемся к евклидовой теории поля и рассматриваем задачу построения негауссовских РГ–инвариантных полей в рамках различных процедур ε–разложения. Мы распространяем подходы, развитые в работах Блехера и автора[7], на наиболее интересный

---

[5] *Лернер Э.Ю.* Фейнмановские интегралы от p-адического аргумента в импульсном пространстве II. Явные формулы. ТМФ.1995. Т. 104. N3. С.371–392.; III. Перенормировка. ТМФ. 1996. Т.106. N2. С.233-249.

[6] *Smirnov V.A.* Calculation of General p-Adic Feynman Amplitude. Commun. Math. Phys. 1992. V.149. P.623-636.

[7] *Bleher P.M., Missarov M.D.* The equations of Wilson's RG and analytic

физический случай, когда размерность пространства d — 4. В 1 ом разделе **негауссовская** ветвь неподвижных точек строится как бифуркация от гауссовской ветви по параметру $\epsilon = \alpha - 3/2d = \alpha - 6$ (здесь α параметр РГ). При построении эффективного гамильтониана мы используем процедуру аналитической **перенормировки**[8]. Такой вариант ϵ разложения ранее не рассматривался в физической литературе. Во **2–ом разделе** рассматривается $(4 - d)$–**разложение**, которое изобретено Вильсоном и Фишером и широко используется в различных физических работах. Ключевыми понятиями в теории РГ Вильсона являются понятия **гамильтониана**, неподвижных точек, инвариантных многообразий. Однако при построении теории возмущений в рамках $(4 - d)$–**разложения** язык **гамильтонианов**, как правило, забывается и используются такие конструкции, как группа перенормировок и уравнения **Каллана–Симанзика**. В книге Ш.Ма[9] уравнения для эффективного **гамильтониана** даже в первых порядках теории возмущений выглядят сложными и труднообозримыми. Кроме того, возникают трудности с трактовкой объектов ϵ–**разложения**, когда ϵ не является целым. Мы вводим понятие обобщенного гамильтониана и строим негауссовскую ветвь в пространстве обобщенных гамильтонианов как размерную перенормировку проекционного гамильтониана φ^4–**теории** на шар.

Далее мы рассматриваем p–**адические** аналоги вышеуказанных ϵ–разложений. По существу, p–**адические** модели являются одномерными и лишь **формально** имитируют некоторые характеристики ϵ–**разложений** в евклидовых моделях, но они дают простые и наглядные иллюстрации к этому методу теории возмущений. В частности, в случае $(\bar{\psi}\psi)^2$–**модели** $e = (4-d)$ и δ–**разложения** по существу эквивалентны, поскольку при целых значениях d приводят к одной и той же негауссовской неподвижной точке.

Перейдем к точной формулировке основных результатов диссертации. Некоторым разделам, отходящим от основных тем диссертации, мы дадим лишь краткую **характеристику**. Формулировки некоторых теорем мы приведем в **сокращенном** варианте.

Пусть $\psi^*(i) = (\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \bar{\psi}_2(i), \psi_2(i))$— спин, сидящий в узле $г £ Л$, компоненты которого являются образующими алгебры **Грассмана**, $\Lambda_N = V_{1,N}$, IV — грассманова подалгебра, порожденная $4 \cdot n^N$ компонентами поля $\psi^*(i)$, $i \in \Lambda_N$, $F(\psi^*) \in \Gamma_N$, $\rho_0(\alpha)$ гауссовское состояние на Г с

renormalization. Commun. Math. Phys. 1980. V.74. N3. P.235 272.

[8] *SpeerE.R.* Dimensional and analytic renormalization. In: Renormalization theory. Dordrecht. Reidel. 1976. P.25 93.

[9] *Ma Ш.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980.

корреляционной функцией (1). Тогда

$$\rho_0(\alpha)(F(\psi^*))= Z_N^{-1}(\alpha)\langle F(\psi^*)\exp\{-H_{0,N}(\psi^*;\alpha)\}\rangle_0,$$

где $\langle\cdot\rangle_0$ обозначает интеграл по Березину на алгебре Γ_N,

$$H_{0,N}(\psi^*;\alpha) = \sum_{i,j\in\Lambda_N} d_{0,N}(i,j)\bar{\psi}(i)\psi(j), \tag{4}$$

$\bar{\psi}(i)\psi(j) = \bar{\psi}_1(i)\psi_1(j) + \bar{\psi}_2(i)\psi_2(j)$, $d_{0,N}(i,j) = d_1\cdot d^{-\alpha}(i,j) + d_2$, $i\neq j$, $d_{0,N}(i,i) = d_3$, где $d_1 = d_1(\alpha,n)$, $d_2 = d_2(\alpha,n,N)$, $d_3 = d_3(\alpha,n,N)$ — некоторые константы, $Z_N(\alpha)= \langle\exp\{-H_{0,N}(\psi^*;\alpha)\}\rangle_0$. Локальный потенциал (самодействие) **4-х-компонентного фермионного** поля задается **формулой** (2). Определим **гиббсовское** состояние $\rho_N(\alpha;r,g)$ на Γ_N как

$$\rho_N(\alpha;r,g)(F)= Z_N^{-1}(\alpha;r,g)\langle F\exp\{-H_{0,N}(\psi^*;\alpha)- H_N(\psi^*;r,g)\}\rangle_0,$$

где $H_N(\psi^*;r,g) = \sum_{i\in\Lambda_N}' L(\psi^*(i);r,g)$ и

$$Z_N(\alpha;r,g) = \langle\exp\{-H_{0,N}(\psi^*;\alpha) - H_N(\psi^*;r,g)\}\rangle_0.$$

Наряду с **гиббсовским** потенциалом $L(\psi^*;r,g)$ мы используем **негиббсовское представление взаимодействия** в виде **грассмановозначной "плотности"** $f(\psi^*;c_0,c_1,c_2)= c_0 + c_1(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + c_2\bar{\psi}_1\psi_1\bar{\psi}_2\psi_2$. **Соответствующее** этой плотности состояние обозначим $\rho_N(\alpha;c)$, где с = (c_0,c_1,c_2).. **Если** $c_0\neq 0$, то мы можем записать / в **гиббсовской** форме $f(\psi^*;c_0,c_1,c_2) = c_0\exp\{-L(\psi^*;r(c),g(c))\}$, **где** $r(c) = -c_1/c_0$, $g(c) = (c_1^2 - c_0c_2)/c_0^2$. Поскольку плотности $f(\psi^*;c)$ **и** $af(\psi^*;c)$, $a\in R^1$, $a\neq 0$ **задают** одно и то же состояние, мы будем рассматривать набор коэффициентов (c_0,c_1,c_2) как точку двумерного проективного пространства RP^2.

Если p — состояние на Γ_N, то **ренормированное** состояние p' определено на Γ_{N-1} соотношением $\rho'(F(\psi^{*\prime})) = \rho(F(r(\alpha)(\psi^*)))$, **где** преобразование **ренормгруппы** в пространстве "реализаций" определяется формулой (3). Действие РГ в пространстве плотностей (**c-пространстве**) определяется следующими формулами:

Теорема 1.1 *Пусть для топки* $c = (c_0,c_1,c_2)\in RP^2$ *выполнено условие* $Z_N(\alpha;c\neq 0$. *Тогда* $\rho_N'(\alpha;c) = \rho_{N-1}(\alpha;R(\alpha)c)$, *где РГ-отображение* $R(\alpha)$ *задано* ***формулами*** $(c_0',c_1',c_2') = R(\alpha)(c_0,c_1,c_2)$:

$$c_0' = (c_1 - c_0)^2 + (c_0c_2 - c_1^2)/n, \quad c_1' = \lambda_1\left((c_1 - c_0)(c_2 - c_0) + (c_0c_2 - c_1^2)/n\right),$$

$$c_2' = \lambda_1^2\left((c_2 - c_1)^2 + (c_0c_2 - c_1^2)/n\right), \quad \lambda_1 = n^{\alpha-1}. \tag{5}$$

Далее обсуждаются вопросы о нулях **статсуммы** $Z_N(\alpha; c)$ и об обратимости отображения $R(\alpha)$.

В (г, g)–**пространстве** отображение действия РГ задается соотношением $\rho_N(\alpha; r, g) = \rho_{N-1}(\alpha; r', g')$, где (r', g') — $R(\alpha)(r, g)$:

$$r' = \lambda_1 \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n}(r+1) - 1 \right), g' = \lambda_2 \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n} \right)^2 g, \lambda_2 = n^{2\alpha - 3}. \tag{6}$$

Отметим, что формально отображение (6) не определено на критической параболе $\partial = n(r+1)^2$, но оно может быть доопределено с помощью формул (5).

РГ–отображение $R(\alpha)$ имеет четыре неподвижные точки, которые в c–**пространстве** записываются как (1, $-r_+(\alpha)$, $(r_+(\alpha))^2 - g_+(\alpha)$), (1, $-r_-(\alpha)$, $(r_-(\alpha))^2 - g_-(\alpha)$), (1,0,0), $(0,0,1)$, где

$$r_\pm(\alpha) = \frac{\pm n^{1/2} - n^{\alpha-1}}{1 \mp n^{1/2}}, \quad g_\pm(\alpha) = n \frac{1 \mp n^{\alpha - 3/2}}{1 \mp n^{\alpha - 1/2}} \left(\frac{1 - n^{\alpha-1}}{1 \mp n^{1/2}} \right)^2, \tag{7}$$

а $\neq$ 1 и в **"+"–ом** случае считаем, что а $\neq$ 1/2. Заметим, что точка $(0, 0, 1)$ не может быть записана в координатах (r, g), она соответствует плотности, которая является **грассмановой** rf-функцией $\delta(\psi) = \bar{\psi}_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_2$. Мы будем обозначать эту неподвижную точку (НТ) δ–**НТ**, а 3-ью и 4-ую НТ — **"+"–ой** и **"–"–ой** НТ соответственно. НТ $(1, 0, 0)$ в (г, g)–**координатах** записывается как $(0, 0)$, и мы будем называть эту точку тривиальной (или гауссовской) НТ. "+"-ая НТ бифурцирует от гауссовской НТ при а = 3/2, а при a — 1/2 она бифурцирует от δ–**НТ**.

Справедливо **коммутационное** соотношение $FR(\alpha)$ — $R(2 - \alpha)F$, где F — **грассманово** преобразование Фурье. Таким образом, изучение **РГ**-преобразования при а < 1 сводится к изучению этого преобразования при a > 1, и поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что а > 1.

Исследование спектра **дифференциала** РГ в неподвижных точках показывает, что тривиальная НТ при α > 3/2 является неустойчивым узлом, а δ–**НТ** — устойчивым узлом, а при 1 < α < 3/2 обе эти НТ становятся **седловыми**. **"–"–ая** НТ при всех значениях a находится в верхней полуплоскости $\{(r, g) : \partial > 0\}$ и является неустойчивым узлом. **"+"–ая** НТ при а > 3/2 принадлежит верхней полуплоскости и также является неустойчивым узлом. При а < 3/2 она переходит в нижнюю полуплоскость и тоже является неустойчивым узлом или даже при некоторых значениях α неустойчивым фокусом.

В разделе 1.4 мы рассматриваем обобщение фермионной иерархической $(\bar{\psi}\psi)^2$–модели на тот случай, когда спин задается набором из $2m$ грассмановых образующих: $\psi^*(i) — (\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \ldots, \psi_m(i), \psi_m(i))$, $г \in \Lambda_N, m > 2$. Преобразование РГ в этом случае также является рациональным отображением в m–мерном пространстве констант связи, но имеет гораздо более сложный вид. Методами теории бифуркаций мы устанавливаем существование серии ветвей негауссовских неподвижных точек.

Вся последующая часть главы посвящена детальному изучению динамики ренормализационной группы в $(\bar{\psi}\psi)^2$–модели. В разделе 1.5 исследуются устойчивые инвариантные кривые в верхней полуплоскости $\{(r, g)$: $д > 0\}$. Замечательным свойством РГ–преобразования (6) является то, что РГ-образы некоторых выделенных семейств кривых имеют простое аналитическое описание. Используя это обстоятельство наряду с методом интервальной стратегии, разработанной П.М.Блехером и Я.Г.Синаем при исследовании бозонной иерархической модели, мы получаем информацию о глобальном поведении устойчивых инвариантных кривых. Основным результатом 1.5 является

Теорема 1.3 *Существует гладкая возрастающая функция* $g = h_+(r, а)$, $0 < r < \infty$, *график которой лежит в области* G_1 *и является частью* 71 *устойчивой РГ-инвариантной кривой для "+"–ой ИТ при* $а > 3/2$ *и для тривиальной НТ при* $3/2 > а > 1$. *Существует гладкая убывающая функция* $g — h_-(r; \alpha)$, $-\infty < r < -1$, *график которой лежит в области* G_2 *и является частью* 72 *устойчивой РГ-инвариантной кривой для "–"–ой НТ при* $а > 1$.

Пусть fti $= \{(r, g)$: $r > 0, 0 < a < h_+(r; \alpha)\}$, $\Omega_2 = \{(r, g)$: $r < -1, 0 < g < h_-(r; \alpha)\}$. Важным обстоятельством является тот факт, что множества fli и Ω_2 РГ–инвариантны (лемма 1.19).

Пусть $(r^{(N)}, g^{(N)}) = R^N(r, g)$. Асимптотическое поведение РГ в областях Ω_1 и Ω_2 определяется следующей теоремой:

Теорема 1.4 *Пусть* $a > 1$ *и* (r, a) 6 Ω_1 U Ω_2. *Тогда существуют константы* $b_1(r, g)$ *и* $b_2(r, g)$ *такие, что* $\lim_{N\to\infty} r^{(N)}\lambda_1^{-N} = b_1$, $\lim_{N\to\infty} g^{(N)}\lambda_2^{-N} = b_2$. *При этом* $b_1 > 0$, *если* $(r, g) \in \Omega_1$, $b_1 < 0$, *если* $(r, g) \in \Omega_2$. *Здесь* $\lambda_1 = n^{\alpha-1}$, $\lambda_2 = n^{2\alpha-3}$ *—собственные числа дифференциала РГ в нуле.*

В разделе 1.7 мы обсуждаем динамику РГ в области между инвариантными кривыми γ_1 и γ_2. Пусть $r_c — -(1-n^{-1})/(1-n^{-\alpha})$, $\beta(r, g) = (r+1)^2 g^{-1}$. Справедливы следующие утверждения:

Лемма 1.23 *Если* $r \geq r_c$ *и* $\beta(r, g) > n$, *то за конечное число итераций РГ точка* (r, g) *попадает в область* Ω_2.

Лемма 1.24 *Пусть* $r < -(1+n^{-1/2})$, $g \geq g_+(r)$. *За конечное число РГ-итераций точка* (r,g) *попадает в область* Ω_1.

Лемма 1.25 *Если* $-(1+n^{-1/2}) \leq r < r_c$ *и* g *достаточно велико, то за конечное число РГ–итераций точка* (r,g) *попадает в область* Ω_1.

Конечно, существует часть области между кривыми 71 и γ_2, которая не подпадает под условия лемм 1.23-1.25. Результаты моделирования на компьютере показывают, что почти все точки (в смысле меры Лебега на плоскости) в этой области также классифицируются по способу ухода на бесконечность: либо в область Ω_1, либо в область Ω_2. Кроме того, в области между γ_1 и γ_2 располагаются все остальные части устойчивых инвариантных кривых для "+"–ой и "–"–ой НТ. Обозначим устойчивые инвариантные кривые для "+"–ой и "–"–ой НТ через 71 и 72 соответственно. Кроме того, в этой области также лежит устойчивая инвариантная кривая γ_3 для бесконечно удаленной δ–НТ. Кривые $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ лежат на границах между областями точек, уходящих при РГ–итерациях налево или направо.

Динамика РГ в нижней полуплоскости обсуждается в 1.8. Предполагается, что а $\geq 3/2$, хотя ряд результатов распространяется и на случай К $a < 3/2$.

Теорема 1.5 *Существует функция* $g = h_3(r)$, $r_c < r \leq 0$, *график которой является единственной неустойчивой (для тривиальной НТ) РГ инвариантной кривой* 73) *лежащей в области, ограниченной по* r. *Функция* $h_3(r)$ *монотонно возрастает по* r, $h_3(r) \to -\infty$ *при* $r \to r_c$, $h_3(0) = 0$.

Пусть $\Omega_3 = \{(r,g)\colon r > r_c, g < h_3(r)\}$,
$\Omega_4 = \{(r,g)\colon r_c < r < 0, h_3(r) < 9 < 0\} \bigcup \{(r,g).\ r < r_c, g < 0\}$.

Теорема **1.6** *Пусть* $a \geq 3/2$ « $(r,g) \in \Omega_3 \cup \Omega_4$. *Тогда существуют константы* $b_1(r,g)$, $b_2(r,g)$ *такие, что*

$$\lim_{N\to\infty} r^{(N)}\lambda_{\cdot}^{-N} = b_1, \ \lim_{N\to\infty} g^{(N)}\lambda_2^{-N} = b_2. \tag{8}$$

При этом $b_1 > 0$, *если* $(r,g) \in \Omega_3$, $b_1 < 0$, *если* $(r,g) \in \Omega_4$.

Области Ω_3 и Ω_4 РГ–инвариантны (лемма 1.27).

При 1 < а < 3/2 "+"–ая НТ переходит в нижнюю полуплоскость, и является отталкивающей НТ. При достаточно больших *n* существует область значений а, при которых "+"–ая НТ является неустойчивым фокусом. Результаты компьютерного моделирования показывают, что и в этом случае нижняя полуплоскость делится неустойчивой инвариантной кривой для "+"–ой НТ на две РГ–инвариантные области, для которых также справедливы соотношения (8).

Заканчивается глава 1-ая обсуждением динамики РГ для вырожденного случая $a = 1$.

В 1-ом разделе главы 2-ой изучается вопрос о существовании термодинамического предела в $(\bar{\psi}\psi)^2$-модели. Как было показано в 1-ой главе, достаточно исследовать вопрос о существовании предела для одноточечных корреляционных функций. Сначала рассматриваются неподвижные точки и соответствующие им устойчивые инвариантные кривые. Пусть γ_1, 72 — устойчивые инвариантные кривые для "+"-ой, "−"-ой неподвижных точек и пусть

$$I_{\pm}(n) = (1 - \Delta_n^{\pm}, 1 + \Delta_n^{\pm}), \quad \Delta_n^{\pm} = \log_n\{a_{\pm} + (a_{\pm}^2 - 1)^{1/2}\},$$

$$a_{\pm} = \frac{(n-1)^2}{4n} \pm \frac{n+1}{2n^{1/2}}, \quad \alpha_{\pm}(n) = 2 - \log_n \frac{1 \pm 2n^{1/2}}{2 \pm n^{1/2}},$$

причем $I_-(n)$— 0 при п $\leq$ 13 и $\alpha_-(n)$ определено при п > 4.

Теорема 2.1 *Пусть* $\alpha \in I_+(n) \setminus \{1, \alpha_+(n)\}$ *и* $(r, g) \in \tilde{\gamma}_1$ *или* $\alpha \in I_-(n) \setminus \{1, \alpha_-(n)\}$ *и и* $(r, g) \in \tilde{\gamma}_2$. *Тогда иерархическая фермионная модель, задаваемая состоянием* $\rho_N(\alpha; r, g)$, *имеет термодинамический предел при* $N \to \infty$.

Теорема 2.2 *Пусть а > 1 и* $(r^{(N_0)}, g^{(N_0)}) \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ *для некоторого* $N_0 \geq 0$ *или* $\alpha \geq 3/2$ *и* $(r^{(N_0)}, g^{(N_0)}) \in \Omega_3 \cup \Omega_4$ *для некоторого NO* ≥ 0. *Тогда модель, задаваемая состоянием* $\rho_N(\alpha; r, g)$, *имеет термодинамический предел при* $N \to \infty$.

Доказательство этих теорем использует результаты главы 1-ой об асимптотике итераций РГ и рекуррентные соотношения, связывающие одноточечные корреляционные функции модели в объеме Λ_N и ренормированной модели в объеме Λ_{N-1}. Картина критических явлений в $(\bar{\psi}\psi)^2$-модели определяется через исследование предельного поведения грассмановозначной "плотности" распределения нормированного подходящим образом суммарного спина в объеме Λ_N. Пусть $x^* = (x_1, x_1, x_2, \bar{x}_2)$, $\delta(\psi^*) = \psi_1\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_2$ — грассманова δ-функция,

$$\psi_{N,a}^* = \frac{1}{n^{aN}} \sum_{i \in \Lambda_N} \psi^*(i), \quad q_N^{(a)} = \rho(\delta(\psi_{N,a}^* - x^*)),$$

где $p = \lim_{M \to \infty} \rho_M$. Если плотность распределения спина может быть записана в экспоненциальной форме как$p(x^*; r, g) = (r^2 - g)^{-1} \exp\{-L(x^*; r,g)\}$, то мы будем говорить, что $\lim_{m \to \infty} p(x^*; r_m, g_m)$ - $p(x^*; r, g)$, если $\lim_{m \to \infty} (r_m, g_m) = (r, g)$.

Теорема 2.4 *Пусть* $\alpha > 1$. *Если* $(r^{(N_0)}, g^{(N_0)}) \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ *для некоторого* $N_0 \geq 0$, *то* $\lim_{N\to\infty} q_N^{(1/2)}(x^*; r, g) = p(x^*; b_1(r,g), 0)$. *Если* $(r,g) \in \tilde{\gamma}_2$, *то* $\lim_{N\to\infty} q_N^{(\alpha/2)}(x^*; r, g) = p_-(x^*; \alpha)$. *Если* $(r,g) \in \tilde{\gamma}_1$, *то при* $\alpha > 3/2$ $\lim_{N\to\infty} q_N^{(\alpha/2)}(x^*; r, g) = p_+(x^*; \alpha)$, *а при* $1 < \alpha \leq 3/2$ $\lim_{N\to\infty} q_N^{(\alpha/2)}(x^*; r, g) = p(x^*; a_0(\alpha), 0)$.

Здесь негауссовские плотности $p_+(x^*; \alpha)$ и $p_-(x^*; а)$ определяются "+"–ой и "–"–ой НТ, и для них существуют явные выражения.

Задача о предельном поведении плотности сводится к задаче о предельном поведении одноточечных корреляционных функций. Результаты об асимптотике итераций РГ, полученные в главе 1-ой, позволяют определить подходящие показатели нормировки и получить информацию о предельном поведении корреляционных функций. Утверждения теоремы 2.4 говорят о том, что если точка (r, ∂) при некоторой итерации РГ попадает в область Ω_1 или Ω_2, то суммарный спин со стандартной нормировкой в пределе имеет гауссовское поведение, при этом разница между 1–ым и 2 ым случаем состоит в знаке "дисперсии" гауссовского закона. Если же (r, ∂) лежит на инвариантной кривой $\tilde{\gamma}_1$ или $\tilde{\gamma}_2$, то нижний показатель нормировки задается параметром РГ и негауссовское предельное поведение определяется соответствующей НТ. В разделе 2.2 мы также вычисляем некоторые критические индексы и приводим результаты компьютерных исследований, показывающих сложную **картину** критических явлений в фермионной иерархической модели.

Последние разделы главы 2 посвящены проблеме непрерывного предела в $(\bar{\psi}\psi)^2$–**модели.** Этот предел ищется как фермионное поле на d–**мерном** p–адическом пространстве Q_p^d.

Если ж $= (x_1, \dots, x_d) \in Q_p^d$, то $|x|_p = \max_i |x_i|_p$, а дробная часть $\{x\} = (\{x_1\}, \dots, \{x\})$, где дробная часть p–**адического** числа $y = a_k p^k + \dots + a_{-1}p^{-1} + a_0 + a_1 p + \dots$ определяется как $\{y\} = a_k p^k + \dots + a_{-1}p^{-1}$. Пусть T_-^d — решетка чисто дробных d–**мерных** p–**адических** векторов: $T_-^d = \{x \in Q_p^d : x = \{x\}\}$.

Рассмотрим гауссовское фермионное поле, которое задается набором образующих $\psi_1(g), \psi_1(g), \bar{\psi}_2(g), \psi_2(g)$,где $\partial \in D(Q_p^d)$ (пространство основных функций на Qp), а линейный функционал определяется как

$$\langle \psi_k(g_1)\bar{\psi}_l(g_2)\rangle = c_1(\alpha)\delta_{k,l}\int |x-y|^{\alpha-2d} g_1(x) g_2(y)\, dy\, dx,$$

$$\langle \psi_k(g_1)\psi_l(g_2)\rangle = \langle \bar{\psi}_k(g_1)\bar{\psi}_l(g_2)\rangle = 0,$$

$k, l = 1, 2$, а € R, где $c_1(\alpha)$ — нормирующая константа, $c_1(\alpha) = f_p(2d - \alpha)/f_p(\alpha - d)$, $f_p(\alpha) = (1 - p^{-\alpha})^{-1}$, dx — мера **Хаара** на Q_p^d. Используя менее формальные обозначения $\psi_k(x) = \psi_k(\delta(x))$, где rf(z) — p–**адическая** δ–**функция**, можно написать, что это **гауссовское** поле инвариантно относительно группы **скейлинговых** преобразований $(s_\lambda(\alpha)\psi^*)(x) = |\lambda|^{(\alpha-d)/2}\psi^*(\lambda x)$, $\psi^*(x) = (\psi_1(x), \bar\psi_1(x), \psi_2(x), \bar\psi_2(x))$. Это поле может быть задано в **гиббсовской** форме гамильтонианом

$$H_0(\psi^*; \alpha) = c_2(\alpha) \int |x - y|^{-\alpha}(\bar\psi_1(x)\psi_1(y) + \bar\psi_2(x)\psi_2(y))\, dx\, dy,$$

$c_2(\alpha) = f_p(\alpha)/f_p(\alpha - d)$.

Дискретизацией $\xi^*(j), j \in T^d_-$ поля $\psi^*(x), x$ 6 Q_p^a назовем поле на **иерархической** решетке T^d_r

$$\xi^*(j) = (\bar\xi_1(j), \xi_1(j), \bar\xi_2(j), \xi_2(j)) = \int \psi^*(x)\chi(x - j)\, dx,$$

где $\chi(x)$ — характеристическая функция $Z_p^d = \{x : |x|_p \leq 1\}$. Дискретизация **скейлингового** преобразования $s_\lambda(\alpha)$ **при** $\lambda = p^{-1} \in Q_p$ задается преобразованием иерархической **ренормгруппы**

$$r(\alpha)\xi^*(j) = p^{-\alpha/2} \sum_{i \in T_p^d : |i - p^{-1}j|_p \leq p} \xi^*(i).$$

Соответствие с обозначениями, которые мы использовали в главе 1, следующее: $n = p^d$, и значение параметра РГ а здесь и в последующем в d раз больше значения параметра а в главе 1.

Дискретизация **гауссовского** поля $\psi^*(x)$ приводит к **РГ–инвариантному** гауссовскому полю на иерархической решетке T_p^d с гамильтонианом $H_0'(\xi; a) = \sum_{i,j} h(i, j; \alpha)(\bar\xi_1(i)\xi_1(j) + \bar\xi_2(i)\xi_2(j))$, где $h(i, j; \alpha) = (f_p(\alpha)/f_p(d - \alpha))(1 - \delta_{i,j})|i - j|^{-\alpha} + (f_p(\alpha)/f_p(d))\delta_{i,j}$.

Рассмотрим **фермионное** поле с гамильтонианом

$$H(\psi^*; \alpha; r, g) = H_0(\psi^*; \alpha) + \int L(\psi^*(x); r, g)\, dx, \tag{9}$$

где

$$L(\psi^*(x); r, g) = r(\bar\psi_1(x)\psi_1(x) + \bar\psi_2(x)\psi_2(x)) + g\bar\psi_1(x)\psi_1(x)\bar\psi_2(x)\psi_2(x).$$

Скейлинговое преобразование $s_{p^{-1}}(a)$ действует в пространстве **гамильтонианов** вида (9) как растяжение констант связи: $H(\psi^*; \alpha; r, д) \to$

$H(\psi^*;\alpha;p^{\alpha-d}r,p^{2\alpha-3d}g)$. **Обозначим отображение** $(r,g)\to(p^{\alpha-d}r,p^{2\alpha-3d}g)$ через $S(\alpha)$. Дискретизация поля ψ^*, задаваемого **гамильтонианом** (9) приводит к полю ξ^* *с* гамильтонианом

$$H'(\xi^*;\alpha;r,g)=H_0'(\xi;\alpha)-\sum_{j\in T_p^d}\ln F(\xi^*;\alpha;r,g),$$

где $F(\xi^*;\alpha;r,g)=\langle\exp\{-\int L(\xi^*+\eta_0^*(x);r,g)\,dx\rangle_{\mu(d\eta_0^*)}$ и среднее берется по **гауссовскому** полю $\eta_0^*(x)=(\eta_{0,1}(x),\bar\eta_{0,1}(x),\eta_{0,2}(x),\bar\eta_{0,2}(x))$ с носителем в шаре Z_p^d, нулевым средним и бинарной корреляционной функцией

$$\langle\eta_{0,k}(x)\bar\eta_{0,l}(y)\rangle=\delta_{k,l}\left((f_p(2d-\alpha)/f_p(\alpha-d))|x-y|^{\alpha-2d}-f_p(2d-\alpha)/f_p(d)\right).$$

Лемма 2.1 ***Функциональный*** *интеграл* $F(\xi^*;\alpha;r,g)$ ***сходится*** *по крайней мере при* $a>2d$ *и* ***аналитически зависит*** *от* r *и* g *в некоторой окрестности нуля.*

Из этой леммы следует, что по крайней мере при $a>2d$ гамильтониан **дискретизованного** поля имеет вид $H'(\xi;\alpha;u,v)=H_0'(\xi^*;\alpha)+\sum_j L(\xi^*(j);u,v)$, где $L(\xi^*(j);u,v)=-\ln F(\xi^*;r,g),\ u=u(r,g),\ v=v(r,g)$.

Преобразование $P(\alpha):(r,g)\to(u,v)$ будем называть преобразованием дискретизации. Справедливо коммутационное соотношение

$$R(\alpha)P(\alpha)=P(\alpha)S(\alpha). \tag{10}$$

Таким образом, задача вычисления функционального интеграла $F(\xi^*;a;r,g)$ сводится к решению 2-мерного функционального уравнения (10), а **оператор** дискретизации $P(\alpha)$ является нормализующим преобразованием к **отображению** РГ $R(\alpha)$ в нуле. Уравнение (10) разрешимо, если собственные числа $\lambda_1=p^{\alpha-d}$ и $\lambda_2=p^{2\alpha-3d}$ дифференциала $R(\alpha)$ в нуле нерезонансны. Справедлива

Теорема 2.5 *Константы связи дискретизованного поля* $u(r,g)=r+\ldots$, $v(r,g)=g+\ldots$ ***однозначно*** *определяются функциональным уравнением (10) и сходятся по* r,g *в достаточно малой окрестности нуля для следующих* ***значений*** *a:*

1) $\alpha\neq(3/2+(2(2m-1))^{-1})d,\ m=1,2,\ldots$

2) В случае, когда $d<a<3/2d$, *существует константа* $c-c(\alpha,n)>0$ *и* $N(\alpha)$ *такие, что* $\min_{k,l}(|\lambda_1^k\lambda_2^l-\lambda_1|,|\lambda_1^k\lambda_2^l-\lambda_2|)>c|k+l|^{-N}$, k,l — ***неотрицательные*** *целые числа,* $k+l\geq2$.

Эта теорема является следствием теорем Пуанкаре и Зигеля о нормализующем отображении.

Процедура решения функционального уравнения автоматически суммирует подклассы p–адических амплитуд, а их ультрафиолетовые полюса являются резонансными значениями а для уравнения (10).

В разделе 2.4 обсуждается проблема построения непрерывного предела. Рассматривается последовательность все более мелких иерархических решеток $T^d_{p,m} = p^m T^d_m$, m $= 0, 1, \ldots$. Пусть ξ^*_m — поле на решетке T^d_p с гамильтонианом $H'(\xi^*_m; \alpha; u^{(-m)}, v^{(-m)})$, где $(u^{(-m)}, v^{(-m)}) = R^{-m}(u, v)$ (здесь мы пользуемся обратимостью РГ–преобразования). Определим последовательность полей ζ^*_m, заданных на решетках $T^d_{p,m}$ соотношениями $\zeta^*_m(j) = p^{m(d-\alpha/2)}\xi^*_m(p^{-m}j)$, $j \in T^d_{p,m}$. Мы показываем, что вычисление любой корреляционной функции непрерывного поля сводится к вычислению корреляционной функции для поля $\zeta^*_m(j)$ при достаточно большом т. Если сводить проблему построения непрерывного поля к построению корреляционных функций, то справедлива

Теорема 2.6 *Для всех точек плоскости констант связи (u, v), для которых доказано существование термодинамического предела в иерархической фермионной модели (см. раздел 2.1), существует фермионное поле на Q^d_p, являющееся непрерывным пределом в $(\bar{\psi}\psi)^2$ -модели.*

Более того, этот непрерывный предел задается гамильтонианом $H(\psi^*; \alpha; r, g)$, константы связи которого могут быть восстановлены по константам связи поля ξ^* на решетке T^d_p, заданного гамильтонианом $H'(\xi^*; \alpha; u, v)$:

$$\begin{pmatrix} r \\ g \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \equiv \lim_{m\to\infty} S^m R^{-m}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Пусть U — зона притяжения тривиальной НТ относительно итераций $R^{-1}(\alpha)$.

Теорема 2.7 *Пусть а $> 2d$. Тогда для всех $(u, v) \subset U$ предел*

$$\lim_{m\to\infty} S^m R^{-m}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

существует и отображение T удовлетворяет коммутационному соотношению $TR = ST$.

Отображение T является обратным к преобразованию дискретизации P: $T = P^{-1}$. Как уже отмечалось, отображения P и P^{-1} определены и для а $< 2d$ (см. теорему 2.5).

В разделе 3.1 мы изучаем стационарные автомодельные поля на d–мерном p–адическом пространстве. Как и в вещественном случае, эти поля являются обобщенными случайными полями.

Если $D = D(Q_p^d)$ — пространство основных функций в Q_p^d, $P = \{P(\varphi(f)$, f G $D\}$— распределение вероятностей обобщенного случайного поля φ,то в терминах характеристических функционалов стационарность поля означает, что $L^p(f)$— $L^p(f(\cdot - a))$ для любого $a \in Q_p^d$ и любой / 6 D, а **автомодельность** поля с параметром а означает, что $L^p(f) = L^p(|\lambda|^{-\alpha/2} f(\lambda^{-1}x))$ для любого $\lambda \in Q_p$ и любой $f \in D$.

Справедливо

Предложение 3.1 *Гауссовское поле с нулевым средним, задаваемое корреляционным функционалом*

$$B_\alpha(f,g) = \int |x-y|_p^{\alpha-2d} f(x) g(y)\, dx\, dy, \tag{11}$$

при d < а < $2d$ *является стационарным автомодельным полем с параметром* α.

Пусть $\xi_m(j) = p^{md}(\varphi, \chi_{m;j})$ — дискретизация случайного поля (f на иерархическую решетку $T_{p,m}^d$, $j \in T_{p,m}^d$, $\chi_{m,j}(x)$ — индикатор шара $\Delta_m(j) = \{x \in Q_p^d : |x-j| \le p^{-m}\}$. В конфигурационном пространстве последовательностей $\xi_m = \{\xi_m(j), j \in T_{p,m}^d\}$ действуют группа преобразований сдвига $E_m = \{t_a, a \in T_{p,m}^d\}, t_a \xi(j) = \xi(j+a)$ и полугруппа, порожденная РГ преобразованием

$$r(\alpha) : \xi_m(j) \to \xi'_m(j) = p^{-\alpha/2} \sum_{i \in T_{p,m}^d : |ip-j| \le p^{-m}} \xi_m(j).$$

Дискретное случайное поле $\xi_m = \{\xi_m(j), j \in T_{p,m}^d\}$ назовем **стационарным**, если распределения вероятностей полей $\xi_m(\cdot + a), a \in T_{p,m}^d$ совпадают, и назовем его автомодельным с параметром а, если распределение вероятностей поля ξ_m совпадает с распределением вероятностей его РГ~ преобразования

$$\xi'_m(j) = (r(\alpha)\xi_m)(j) = p^{-\alpha/2} \sum_{i \in T_{p,m}^d : |ip-j| \le p^{-m}} \xi_m(j).$$

Пусть $\xi_m(j) = p^{md}(\varphi, \chi_{m,j})$ — дискретизация случайного поля φ на иерархическую решетку $T_{p,m}^d, j \in T_{p,m}^d$, $\chi_{m,j}(x)$ — индикатор шара $\Delta_m(j) = \{x \in Q_p^d : |x-j| \le p^{-m}\}$. Тогда можно утверждать, что справедливо

Предложение 3.2 *Дискретизация гауссовского автомодельного обобщенного случайного поля f с нулевым средним и бинарным корреляционным функционалом (11) есть гауссовское автомодельное с. параметром* а *случайное поле* ξ_m *на* $T^d_{p,m}$ *с нулевым средним и бинарной корреляционной функцией*

$$b_m(i,j) \equiv \langle \xi_m(i)\xi_m(j)\rangle = |i-j|^{\alpha-2d}(1-\delta_{i,j}) + \frac{p^{m(2d-\alpha)}(1-p^{-d})}{1-p^{d-\alpha}}\delta_{i,j}. \quad (12)$$

Гауссовское поле с корреляционной функцией (12) может быть представлено в гиббсовской форме. Далее мы обсуждаем процедуру непрерывного предела для гауссовских случайных полей.

В разделе 3.3 изучается дискретизация p–адической φ^4– теории, заданной гамильтонианом

$$H(\varphi;\alpha;r,g) = H_0(\varphi;\alpha) + \int L(\varphi(x);r,g)\,dx, \quad (13)$$

$H_0(\varphi;\alpha) = \frac{1}{2}\Gamma^d_p(\alpha)\int |x-y|^{-\alpha}\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy$, где $L(\varphi(x);r,g) = r\varphi^2(x) + g\varphi^4(x)$, $\Gamma^d_p(\alpha) = (1-p^{\alpha-d})(1-p^{-\alpha})^{-1}$ — d–мерная p–адическая гамма–функция.

Дискретизация $\xi_m(j)$ гауссовского поля $\varphi(x)$ с гамильтонианом $H_0(\varphi;a)$ является гауссовским полем с гамильтонианом

$$H^m_0(\xi_m;\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i,j\in T^d_{p,m}} h_m(i-j;\alpha)\xi_m(i)\xi_m(j),$$

$$h_m(i-j;\alpha) = p^{-2md}\Gamma^d_p(\alpha)|i-j|^{-\alpha}(1-\delta_{i-j,0}) + p^{m(\alpha-2d)}\frac{1-p^{-d}}{1-p^{-\alpha}}\delta_{i-j,0},$$

мы отождествляем $(i-j)$ с $(i-j) mod\ p^m$.

Лемма 3.1 *Гамильтониан* $H^m(\xi;\alpha;r,g)$ *дискретизации* ξ_m *поля* φ, *заданного гамильтонианом (13), имеет вид*

$$H^m(\xi;\alpha;r,g) = H^m_0(\xi_m;\alpha) + \sum_{j\in T^d_{p,m}} F(\xi_m(j)),$$

$F(\xi_m(j))$ *задается функциональным интегралом*

$$F(\xi_m(j)) = -\ln\langle\exp\{-\int_{\Delta_m(0)} L(\xi_m(j)+\eta_{m,0}(x);r,g)\,dx\}\rangle_{\mu(d\eta_{m,0})},$$

где среднее берется по гауссовскому полю $\eta_{m,0}(x)$ в *шаре* $\Delta_m(0) = \{x\in Q^d_p : |x| \le p^{-m}\}$ *с нулевым средним и бинарной корреляционной функцией*

$$\langle\eta_{m,0}(x)\eta_{m,0}(y)\rangle = \Gamma^d_p(2d-\alpha)|x-y|^{\alpha-2d} - p^{m(2d-\alpha)}f_p(2d-\alpha)/f_p(d).$$

Экспоненту от негауссовской части гамильтониана $H^m(\xi_m;$a; $r,\partial)$ можно рассматривать как произведение плотностей свободных мер $f_m(\xi_m(j)$;a; $r,g)$, где $f_m(y;\alpha;r,g) = \exp\{-F_m(y;\alpha;r,g)\}$. Несложно видеть, что $f_m(y;\alpha;r,g) = f_0(yp^{m(\alpha/2-d)};\alpha;\lambda_1^{-m}r,\lambda_2^{-m}g)$, где $\lambda_1 = p^{\alpha-d}$, $\lambda_2 = p^{2\alpha-3d}$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать дискретизацию поля φ на иерархическую решетку $T^a_{p,0} = T^d_n$, и далее будем употреблять обозначения $f_0 = f$, $\eta_{0,0}(x) = \eta(x)$, $\xi_0(i) = \xi(i)$, $h_0 = h$, $H^0_0 = H_0$ и т.д. Плотность $f(y;\alpha;r,g)$ может вычисляться с помощью стандартной техники разложения по фейнмановским графам. Используя явные формулы для p- адических фейнмановских амплитуд, мы анализируем полюса этого разложения (по α). Показано, что все вещественные полюса по а, возникающие в коэффициентах разложения плотности $f(y;\alpha;r,g)$ в ряд по степеням y, принадлежат множеству

$$S = \{\alpha \in Q : d \leq \alpha \leq \frac{3}{2}d\} \bigcup \{\alpha = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2(2l-1)}\right) d, l = 1,2,\ldots\}$$

(здесь Q обозначает поле рациональных чисел).

На самом деле плотность дискретизованной модели можно вычислять, исходя из некоторого интегрального функционального уравнения. Мы показываем, что если гамильтониан иерархической модели имеет вид $H_0(\xi;\alpha) + \sum_{j\in T^d_p} L(\xi(j))$, где $L(\xi(j)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi^{2k}(j)$, то гамильтониан поля ξ', являющегося РГ-преобразованием поля ξ имеет вид

$$H'(\xi') = H_0(\xi';\alpha) + \sum_{j\in T^d_p} L'(\xi'(j)),$$

где

$$L'(y) = -\ln\left(\frac{n^{1/2}}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int \delta(\sum_{i=1}^{n} x_i) \prod_{i=1}^{n} \exp\{-\frac{1}{2}x_i^2 + L(p^{\alpha/2-d}y + x_i)\}\, dx_i\right),$$

$n = p^d$. Используя коммутационное соотношение $R(\alpha)P(\alpha) = P(\alpha)S(\alpha)$, где $R(\alpha)$ — РГ-преобразование в пространстве плотностей свободных мер в иерархической бозонной модели, $S(\alpha)$ — скейлинговое преобразование в пространстве гамильтонианов p-адической φ^4-модели, $P(\alpha)$ — оператор дискретизации, мы получаем

Следствие 3.1 *Плотность $f(y;\alpha;r,g)$ удовлетворяет интегральному* функциональному уравнению

$$f(y;\alpha;p^{\alpha-d}r,p^{2\alpha-3d}g)=\frac{\int\delta(\sum_{i=1}^{n}x_i)\prod_{i=1}^{n}\exp\{-x_i^2/2\}f(yp^{\alpha/2-d}+x_i;\alpha;r,g)\,dx_i}{\int\delta(\sum_{i=1}^{n}x_i)\prod_{i=1}^{n}\exp\{-x_i^2/2\}f(x_i;\alpha;r,g)\,dx_i}. \tag{14}$$

Далее мы обсуждаем процедуру решения уравнения (14) в формальных рядах по y:

$$f(y;\alpha;r,g)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k(r,g)y^{2k}.$$

Эта процедура позволяет находить коэффициенты разложения a^k (г, д), автоматически суммируя целые подклассы фейнмановских амплитуд.

В последнем разделе главы 3 мы вводим понятие ренормализационной группы для случайных полей на группе d–мерных аделей A^d. Случайное поле назовем трансляционно инвариантным, если оно инвариантно относительно группы сдвигов на группе аделей A^d. Случайное поле назовем автомодельным (или скейлинг–инвариантным) с параметром a, если распределение вероятностей поля $\varphi(a)$ совпадает с распределением вероятностей поля $(s_\lambda(\alpha)\varphi)(a)=|\lambda|^{d-\alpha/2}\varphi(\lambda a)$ для любого иделя А 6 A^*. Мы вводим понятие модуля аделя $|a|=|a_\infty|_\infty|a_2|_2\ldots|a_p|_p\ldots$, где $a_\infty\in R^d$, $|\cdot|_\infty$ — евклидова норма на R^d и показываем, что этот модуль конечен для почти всех $a\in A^d$, если $d>1$, и не существует для почти всех а, если $d=1$. Тем не менее, при всех d корректно определена обобщенная функция (как линейный функционал на пространстве Шварца-Брюа)

$$g(a;\alpha)=c(\alpha;d)|a|^\alpha,\quad c(\alpha;d)=\frac{\pi^{-\alpha/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\zeta(d)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+d}{2}\right)\zeta(\alpha+d)},$$

где $\zeta(\alpha)$ —дзета–функция Римана. При $d<a<2d$ обобщенное гауссовское поле $\varphi(a)$ с корреляционной функцией $\langle\varphi(a)\varphi(b)\rangle=g(a-b;\alpha)$ является автомодельным с параметром a.

В разделах 1 и 2 главы 4 мы обсуждаем алгоритмы и явные формулы, позволяющие вычислять p–адические фейнмановские амплитуды в любом порядке теории возмущений. Пусть

$$F_G(x_v;v\in V_{ext};a)=\int\prod_{l\in L(G)}|x_{i(l)}-x_{f(l)}|^{a_l}\prod_{v\in V_{int}}dx_v$$

— обобщенная **p–адическая фейнмановская** амплитуда, соответствующая графу G, $V(G)$ — множество вершин графа G, $V(G) = V_{ext} \cup V_{int}, V_{ext}(V_{int})$ — множество внешних (внутренних) вершин графа G, $L(G)$ — множество ребер графа G, $a = (a_l; l \in L(G))$ — вектор комплексных степеней **пропагаторов** этой амплитуды, $x_v \in Q_p^d$, $v \in V(G)$, dx_v — мера Хаара на Q_p^d. Пусть V — некоторое множество вершин. Иерархией на множестве V назовем систему A подмножеств множества V, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $V \in A$, 2) Если $V' \in A$, $V'' \in A$, то либо $V' \cap V'' = \emptyset$, либо $V' \subseteq V''$, либо $V'' \subseteq V'$. Для любого $V' \in A$, $V' \neq V$ мы обозначим через $\tau(V')$ минимальное подмножество в A, содержащее V, но не совпадающее с ним. Пусть $K(V') = \{V'' \in A : \tau(V'') = V'\}, k(V') = |K(V')|$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие **иерархии, для** которых $1 < k(V') \leq p^d$, $V' \in A'$, где $A' = \{V' \in A : |V'| > 1\}$. Каждый набор внешних переменных x_v, $v \in V_{ext}$ порождает иерархию A_x на V_{ext}:

$$A_x = \{V \subseteq V_{ext} : \max_{v,v' \in V} |x_v - x_{v'}| < \min_{\substack{v \in V, \\ v' \in V_{ext} \setminus V}} |x_v - x_{v'}|\}.$$

Пусть A — некоторая иерархия на множестве V_{ext}. Положим $F_{G,A}(x;a) = F_G(x;a)$, если $A_x = A$ и $F_{G,A}(x;a) = 0$ в противном случае (здесь мы упростили обозначение: $F_G(x_v; v \in V_{ext}; a) = F_G(x;a)$). Справедливо разложение $F_G(x;a) = \sum_A F_{G,A}(x;a)$, где суммирование ведется по всем **возможным** иерархиям на V_{ext}. Далее мы используем обозначения $a(V,V') = \sum_{l \in L(V,V')} a_l$, **где** $L(V,V')$ — множество всех линий, которые соединяют **вершины** из У с вершинами из V', $a(V) = a(V,V)$. Пусть A — некоторая иерархия на V_{ext}, $A' = \{V' \in A : |V'| > 1\}$, I — некоторое разбиение V_{int}, заиндексированное элементами A'. Обозначим

$$V(I) = \left(\bigcup_{V' \subsetneq V, V' \in A'} I_{V'} \right) \bigcup V, \; \lambda(V;I;a) = a(V(I)) - \sum_{V' \in K(V)} a(V'(I)) + |I_V| d,$$

$$c(V;I;a) = \int \prod_{l \in L(I_V)} |y_{i(l)} - y_{f(l)}|^{a_l} \prod_{v \in I_V} \left(\prod_{V' \in K(V)} |y_v - j_{V'}|^{a(v,V'(I))} \right) dy_v,$$

где $L(I_V)$ — множество всех ребер подграфа G, порожденного вершинами I_V, $j = \{j_{V'}, V' \in K(V)\}$ — произвольный набор **d–мерных p–адических** векторов, таких, что $|j_{V'} - j_{V''}| = 1$, если $V \neq V''$, интеграл берется по $(Q_p^d)^{|I_V|}$ (($c(V;I;a)$ не зависит от выбора j).

Теорема 4.1 *Пусть $A_x = A$. Тогда*

$$F_{G,A}(x;a) = \sum_I \prod_{V\in A'} c(V;I;a) \max_{v,v'\in V} |x_v - x_{v'}|^{\lambda(V;I;a)},$$

где сумма берется по всем разбиениям I множества Vint, заиндексированным элементами A'.

Вычисление коэффициентных функций $c(V;I;a)$ сводится к вычислению интегралов вида

$$F_G(a) = \int \prod_{l\in L(G)} |x_{i(l)} - x_{f(l)}|^{a_l} \prod_{v\in V(G)} \chi(x_v)\, dx_v. \tag{15}$$

Пусть $V = V(G)$, $V' \subseteq V$, $a(V') = \sum\limits_{l\in L(G(V'))} a_l$, $\beta(V') = a(V') + d(|V'|-1)$. Замечательным фактом является то, что для интеграла (15) существует явная формула

Лемма 4.4 *Пусть $\beta(V') > 0$ для всех $V' \subseteq V$, $|V'| > 1$. Тогда*

$$F_G(a) = p^{a(V)} \sum_A \prod_{V'\in A'} \frac{1}{p^{\beta(V')} - 1} \cdot \frac{(p^d-1)!}{(p^d - k(V))!}, \tag{16}$$

где суммирование ведется по всем иерархиям на множестве V.

Таким образом, существует алгоритм, позволяющий вычислить явно произвольную **p–адическую фейнмановскую** амплитуду. Формула (16) задает аналитическое продолжение $F_G(a)$ по a во все комплексное пространство и указывает все полюса этого продолжения.

В разделе 4.3 мы доказываем теорему об аналитической перенормировке для фейнмановской амплитуды

$$F_G(x;\varepsilon) = \prod_{l\in L(G)} |x_{i(l)} - x_{f(l)}|^{-d/2+\varepsilon}$$

(предполагается, что все переменные $x_v, v \in V(G)$ — внешние). Каждому графу G сопоставим полином $Y(G)$ от ε^{-1}, называемый вершинной частью G степени $|V(G)| - 1$. Набор вершинных частей $Y = \{Y(G'),\ G \subseteq G\}$ определяет переномированную фейнмановскую амплитуду

$$R_Y F_G(x;\varepsilon) = \sum_\pi F_{G|_\pi}(x;\varepsilon) \prod_{i=1}^r Y(G_i),$$

где суммирование берется по **всем** разбиениям π — $\{V_1,\dots,V_r\}$ множества вершин $V(G)$, $G|_\pi$ — граф, стянутый по разбиению π, G_i — подграф G, порожденный множеством вершин Vj. Пусть $\beta_0(G_i) = -L(G_i)d/2 + d(|V_i| - 1)$.

Теорема 4.2 *Существует такой набор вершинных* ***частей*** *Y, что* $R_Y F_G(x;\varepsilon)$ ***является*** *аналитической функцией от* ε *в некоторой окрестности нуля (как обобщенная функция на* Q^d_p*). При этом* $Y(G_i)$— 1, *если* $|V_i| = 1$ *и* $Y(G_i)= 0$, *если* $\beta_0(G_i) \neq 0$.

Доказательство проводится индукцией по $|V(G)|$.

Так же как и в случае $(\bar\psi\psi)^2$**–модели,** ультрафиолетовые полюса по a, которые возникают при процедуре дискретизации, являются резонансными значениями в задаче нормализации отображения РГ в нуле. Коэффициенты **дискретизованного** гамильтониана имеют полюс в точке с = 0. Задачу о перенормировке поставим как **задачу** поиска таких констант связи $r(u,v)$, $g(u,v)$ непрерывной теории, что дискретизация этой теории не содержит полюсов по ε в нуле при разложении гамильтониана в ряд по **степеням** *и* и v. Здесь *и к v* — новые (перенормированные) константы теории. В случае $(\bar\psi\psi)^2$**–модели** *r(u, v)* и $g(u, v)$ определяются соотношением

$$\begin{pmatrix} r(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} = P^{-1}(\alpha)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

В случае φ^4**–теории** мы определяем *r(u, v)* и *д(u, v),* обращая отображение, заданное двумя первыми коэффициентами разложения плотности $f(y;a;r,д)$, *в* ряд по степеням *у:*

$$-a^1(r(u,v),g(u,v)) = u, \quad -a^2(r(u,v),g(u,v)) = v. \tag{17}$$

При этом предполагается, что в первом порядке по и и v

$$r(u,v) = u + a^1_{01}v + \dots, \; g(u,v) = v + \dots. \tag{18}$$

Теорема 4.3 *Коэффициенты* $a^k(r(u,v),g(u,v))$, *k* — $3,4,\dots$ ***аналитичны*** *по* ε *в нуле во всех порядках разложения по степеням и и v.*

Доказательство этой теоремы мы проводим без ограничения общности для случая n = 2. Из доказательства следует, что дискретизация непрерывной теории с константами связи $r(u, v)$ и *g(u, v)* на решетку любого масштаба не содержит **сингулярностей** по е в нуле. Отметим только, что в отличии от **фермионного** случая *r(u, v)* и *д(u, v)* являются формальными рядами от *и* и *v.*

В **разделе** 4.5 мы изучаем **фейнмановские** амплитуды формальной **безмассовой адельной φ^4–теории.** Мы показываем, что при достаточно большой размерности пространства d существует область в пространстве **степеней пропагаторов,** в которой **адельные** амплитуды (как обобщенные функции на пространстве Шварца-Брюа) корректно определены. Делая **аналитическое** продолжение по степеням пропагаторов, мы экстраполируем полученные формулы на случай произвольных значений d. Далее анализируются полюса этого продолжения и показывается перенормируемость φ^4–**теории** вплоть до 3-ьего порядка теории возмущений.

В разделах **5.1** и 5.2 мы рассматриваем ε–**разложение** в евклидовых моделях. Пусть $\sigma_0(k)$ — поле в шаре $\Omega = \{k \in R^d : |k| < R\}$, **задаваемое** формальным **гиббсовским** гамильтонианом вида $H_0(\alpha) + H$, H — $\varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \ldots$, коэффициенты которого являются **конечночастичными** гамильтонианами, £ — малый параметр,

$$H_0(\alpha) = \frac{1}{2}\int |k|^{\alpha-d}|\sigma_0(k)|^2\,dk,$$

a — вещественный параметр, d < а < $2d$, Преобразование РГ **Вильсона** является композицией двух преобразований: растяжения $S_\lambda(\alpha)$ и **сужения** $P_{\chi,\lambda}$ (здесь χ — характеристическая функция шара Ω). Смысл **оператора** $S_\lambda(\alpha)$ состоит в замене $\sigma_0(k)$ на $\lambda^{\alpha/2}\sigma_0(\lambda k)$. Оператор сужения $P_{\chi,\lambda}$ ограничивает **гиббсовское** случайное поле в шаре $\lambda\Omega$, заданное гамильтонианом $S_\lambda(\alpha)(H_0(\alpha)+H)$, на шар Ω. Гамильтониан $H_0(\alpha)$ является неподвижной точкой РГ-преобразования $R_{\chi,\lambda}(\alpha) = P_{\chi,\lambda}S_\lambda(\alpha)$. Уравнения Вильсона возникают при нахождении **нетривиальных** неподвижных точек РГ-преобразования вблизи точек бифуркации. В случае d < 4, который рассматривался ранее в работах Блехера и автора, дифференциал РГ в гауссовской НТ при $a = 3/2d$имеет один собственный вектор

$$H_{4,0}(\sigma_0) = \int \delta(u_1 + \ldots + u_4)\sigma_0(k_1)\ldots\sigma_0(k_4)\,dk_1\ldots dk_4 \tag{19}$$

с собственным числом 1. При d = 4 появляется еще один собственный вектор с собственным числом 1:

$$H_{2,2}(\sigma_0) = \int \delta(k_1 + k_2)|k_1|^2\sigma_0(k_1)\sigma_0(k_2)\,dk_1\,dk_2. \tag{20}$$

Негауссовские решения можно искать в виде степенных рядов по **уклонению** значения параметра а от бифуркационного значения $\alpha_0 = 3/2d$. Решение **уравнений** Вильсона мы будем искать в виде гамильтониана сужения поля $\sigma(k)$ во всем пространстве на шар Ω. Поле $\sigma(k)$ задается **гамильтонианом** $H_0(\alpha)(\sigma) + u_1 H_{4,0}(\sigma) + u_2 H_{2,0}(\sigma)$. Гамильтониан поля $\sigma_0(k) =$

$\sigma(k)\chi(k)$имеет вид $H_0(\alpha)(\sigma_0) + P_\chi(u_1H_{4,0} + u_2H_{2,2})$, где

$$P_\chi(u_1H_{4,0} + u_2H_{2,2}) = -\ln\langle\exp\{-u_1H_{4,0}(\sigma_0+\sigma_1) - u_2H_{2,2}(\sigma_0+\sigma_1)\}\rangle_{\mu(d\sigma_1)}. \tag{21}$$

усреднение идет по гауссовскому полю σ_1 с корреляционной функцией $\langle\sigma_1(k_1)\sigma_1(k_2)\rangle = \delta(k_1+k_2)|k_1|^{d-\alpha}(1-\chi(k_1))$. Гамильтониан $P_\chi(u_1H_{4,0} + u_2H_{2,2})$ сингулярен по ε в нуле. Пусть $H(u_1,u_2;\varepsilon) = A.R.P_\chi(u_1H_{4,0} + u_2H_{2,2})$, где $A.R.$ обозначает операцию аналитической перенормировки с минимальными вычитаниями. Пусть $\lambda = \exp\tau$. Справедлива

Теорема 5.1

$$R_{\chi,\exp\tau}H(u_1,u_2;\varepsilon) = H(u_1(\tau),u_2(\tau);\varepsilon),$$

где динамика констант связи определяется уравнениями

$$\frac{du_1(\tau)}{d\tau} \equiv \beta_1(u_1,u_2), \quad \frac{du_2(\tau)}{d\tau} \equiv \beta_2(u_1,u_2)$$

с начальными условиями $u_k(0) = u_k$, $k = 1,2$. *Формальные ряды* $\beta_k(u_1,u_2)$ *имеют разложение*

$$\beta_k(u_1,u_2) = \varepsilon u_k + \sum_{n=2,m=0} b^k_{n,m}u_1^n u_2^m, \; k = 1,2,$$

причем коэффициенты $b^k_{n,m}$, $k - 1,2$ *являются константами, не зависящими от* ε.

Система уравнений $\beta_1(u_1,u_2) = О$, $\beta_2(u_1,u_2) = О$ имеет два решения в формальных степенных рядах по e. Тривиальное решение $u_1(\varepsilon) = u_2(\varepsilon) =$ О, описывает гауссовскую неподвижную точку, а второе, нетривиальное решение, описывает негауссовскую неподвижную точку.

Если коэффициентные функции гамильтониана являются гладкими и изотропными, то то же самое верно и для коэффициентных функций его РГ-преобразования (при условии, что мы используем сглаженную характеристическую функцию шара). Пусть $G_n = \{g = \{g_{ij}\}^n_{i,j=1} \mid g_{ij} = g_{ji}\}$ есть множество симметричных положительно-определенных матриц. Тогда изотропная функция $h(k_1,\ldots,k_n)$ однозначно определяет функцию на $G_n : t((k_i,k_j)^n_{i,j=1}) = h(k_1,\ldots,k_n)$. Последовательность функций с меткой $\nu : (t;\nu) = (t_2(g_2), t_4(g_4), \ldots; \nu)$, где $g_{2n} \in G_{2n}, \nu \in C$, будем называть обобщенным гамильтонианом. Здесь ν имеет смысл "дробной" размерности. При натуральных значениях $\nu - d$ обобщенный гамильтониан $(t:d)$ можно трактовать как обычный гамильтониан с коэффициентными функциями $h_{2n}(k_1,\ldots,k_{2n}) = t_{2n}((k_i,k_j)^{2n}_{i,j=1})$. С помощью операции аналитического

продолжения по d **определение** преобразования РГ можно распространить на пространство обобщенных гамильтонианов. В дальнейшем для удобства мы **сохраним** обычные обозначения гамильтонианов, но понимать их будем как обобщенные (для этого рядом с ними будем писать **метку**).

Пусть параметр РГ $\alpha = 6 - \delta$, а параметр "**дробной**" размерности $\nu = 4 - \varepsilon$. Рассмотрим обобщенный гамильтониан

$$\widetilde{H}(u_1, u_2, u_3; \varepsilon) = D.R.(H_0 + P_\chi(u_1 H_{4,0} + u_2 H_{2,2} + u_3 H_{2,0}); 4 - \varepsilon),$$

где $H_{4.0}$ и $H_{2,2}$ задаются формулами (19),(20),

$$H_0 = \frac{1}{2} H_{2,2}, \quad H_{2,0} = \int \delta(k_1 + k_2)\sigma(k_1)\sigma(k_2)\, dk_1\, dk_2,$$

оператор проекции P_χ задается формулой (21), в которой усреднение ведется по полю σ_1 *с* корреляционной функцией $\delta(k_1 + k_2)|k_1|^{-2}(1 - \chi(k))$. Мы используем здесь **оператор** размерной перенормировки с **минимальными** вычитаниями *D.R. для* того, чтобы избавиться от сингулярности в точке $d = 4$. Верна

Теорема 5.2 ***Действие*** *преобразования РГ* $R_{\chi, \exp\tau}(6 - \delta)$ *на многообразии* ***гамильтонианов*** $\widetilde{H}(u_1, u_2, u_3; \varepsilon)$ ***задается*** *соотношением*

$$R_{\chi, \exp\tau}(6 - \delta)\widetilde{H}(u_1, u_2, u_3; \varepsilon) = \widetilde{H}(u_1(\tau), u_2(\tau), u_3(\tau); \varepsilon),$$

где

$$\frac{du_i}{d\tau} = \beta_i(u_1, u_2, u_3; \varepsilon), \quad u_i(0) = u_i, \ i = 1, 2, 3,$$

$$\beta_1 = 2u_1(\varepsilon - \delta - \rho_2) + (1 + 2u_2)^2 \rho_1,$$

$$\beta_2 = 1/2(1 + 2u_2)(\varepsilon - \delta - \rho_2), \quad \beta_3 = u_3(2 + \varepsilon - \delta - \rho_3).$$

Здесь

$$\rho_1 = z(\varepsilon - g(z)), \ g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n, \quad \rho_2 = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \quad \rho_3 = \sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n,$$

$z = u_1(1 + 2u_2)^{-2}$, ***коэффициенты*** p_n, q_n, r_n — ***константы,*** *не зависящие от* ε.

Система уравнений на неподвижную точку $\beta_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ имеет два решения в формальных рядах по ε: 1) тривиальное решение $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $\varepsilon = \delta$; 2) $u_2 = u_3 = 0$, $u_1 = u_1^*$, где u_1^* есть решение уравнения

$\varepsilon = g(u_1)$, $\delta = \varepsilon - \rho_1(u_1^*)$. Последнее решение описывает негауссовскую ветвь неподвижных точек.

В разделе 5.3 мы рассматриваем ε–разложение в бозонной иерархической модели, $\epsilon = \alpha - 3/2d$. Без ограничения общности мы будем **предполагать** $d = 1$, p — 2. Пусть $r(u, v)$ и $g(u, v)$ определяются из соотношения (17), (18). Тогда из соотношения (14) легко получить представление для преобразования РГ в подмногообразии плотностей $f(y; \alpha; r(u, v), g(u, v))$ в дифференциальной форме:

$$R^t(\alpha) f(y; \alpha; r(u, v), g(u, v)) =$$

$$= \exp\left\{t\left(\beta_1(u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \beta_2(u, v)\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\} f(y; \alpha; r(u, v), g(u, v)), \qquad (22)$$

где β–**функции** выражаются через ряды $r(u, v)$ и $g(u, v)$.

Теорема 5.3 *Коэффициенты формальных степенных рядов* $\beta_1(u, v)$ *и* $\beta_2(u, v)$ ***аналитичны*** *по* ε *в нуле.*

Формула (22) определяет формальное вложение РГ-преобразования R в непрерывную полугруппу, и β–**функции** являются коэффициентами векторного поля, порождающего эту полугруппу. Нетривиальный нуль этого векторного поля задает негауссовскую неподвижную точку в бозонной иерархической модели.

Наконец, мы рассматриваем $(4 - d)$–**разложение** в бозонной иерархической модели. Обобщенным гамильтонианом мы будем называть последовательность
$(t(0), t(1), \ldots; \varepsilon h_1, \varepsilon^2 h_2, \ldots; d)$, где **коэффициенты** t **задают гауссовскую** часть автомодельного иерархического гамильтониана, а коэффициенты $\varepsilon^k h_k(\xi)$ определяют самодействие $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k h_k(\xi)$, h_k — полиномы конечной степени, ε — малый параметр, d — дробная размерность. Действие РГ определяется в пространстве обобщенных гамильтонианов. Дискретизация p–**адического** гамильтониана

$$\frac{1}{2}\Gamma_p^d(2 + d) \int |x - y|^{-2-d} \varphi(x)\varphi(y)\, dx\, dy + r \int \varphi^2\, dx + g \int \varphi^4(x)\, dx$$

после аналитического продолжения по d может рассматриваться как обобщенный гамильтониан. Этот гамильтониан имеет сингулярность по ε в нуле, $\varepsilon = 4 - d$. Применяя операцию p–**адической** размерной перенормировки и записывая действие РГ в дифференциальной форме, мы получаем "негауссовскую" неподвижную точку как нетривиальный нуль соответствующего векторного поля.

Публикации по теме диссертации.

1. *Блехер П.М., Миссаров М.Д.* Инвариантные многообразия ренормгруппы Вильсона. ТМФ. 1988. Т.74. N2. С.203-209.

2. *Лернер Э.Ю., Миссаров М.Д.* Скалярные модели p-адической квантовой теории поля и иерархическая модель Дайсона. ТМФ. 1989. Т.78. N2. С.248–257.

3. *Лернер Э.Ю., Миссаров М.Д.* Ренормализационная группа в фермионной иерархической модели. ТМФ. 1994. Т.101. N2. С.282-293.

4. *Лернер Э.Ю., Миссаров М.Д.* Глобальный поток ренормализационной группы и термодинамический предел в фермионной иерархической модели. ТМФ. 1996. Т.107. N2. С.201–212.

5. *Миссаров М.Д.* Функциональные уравнения и теория перенормировок в p-адических моделях. ТМФ. 1996. Т.109. N1. С.3–16.

6. *Миссаров М.Д.* Инвариантные многообразия ренормализационной группы и критическое поведение в фермионной иерархической модели. Вестник МГУ. Серия 1 (Математика и Механика). 1996. N6. С.61-63.

7. *Миссаров М.Д.* РГ-инвариантные кривые в фермионной иерархической модели. ТМФ. 1998. Т.114. N3. С.323–336.

8. *Миссаров М.Д.* Критические явления в фермионной иерархической модели. ТМФ. 1998. Т.117. N3. С.471–488.

9. *Миссаров М.Д.* Непрерывный предел в фермионной иерархической модели. ТМФ. 1999. Т.118. N1. С.40–50.

10. *Lerner E.Yu., Missarov M.D.* P-adic Feynman and String Amplitudes. Commun. Math. Phys. 1989. V.121. P.35–48.

11. *Lerner E.Yu., Missarov M.D.* Fixed points of renormalization group in the hierarchical fermionic model. J. Stat. Phys. 1994. V.76. N3/4. P.805–817.

12. *Missarov M.D.* I The equations of Wilson's renormalization group in dimention 4 and analytic renormalization. Journal of Stat. Phys. 1985. V.38. N5/6.

13. *Missarov M.D.* Random fields on the adele ring and Willson's renormalization group. Ann. Inst. H.Poincare. 1989. V.49. P.357-367.

14. *Missarov M.D.* Renormalization group and renormalization theory in p-adic and adelic scalar models. Dynamical systems and statistical mechanics, ed. Ya.G. Sinai (Adv. Sov. Math. V.3, Amer. Matn. Soc., 1991). P.143–161.

15. *Missarov M.D.* Adelic φ_d^4-theory. Phys. Lett. 1991. V.B272. P.36-38.

16. *Missarov M.D.* Invariant manifolds of p-adic renormalization groups. Lett. in Math. Phys. 1993. V.27. P.149-154.

17. *Missarov M.D.* Functional integral via functional equation. Lett. in Math. Phys. 1994. V.32. P.347 356.

18. *Missarov M.D.* P-adic φ^4-theory as a functional equation problem. Lett. Math. Phys. 1997. V.39. P.253-260.