На правах рукописи

Карчевский Евгений Михайлович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2006

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования “Казанский государственный университет имени В.И. Ульянова-Ленина”.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Габдулхаев Билсур Габдулхаевич,

доктор физико-математических наук, профессор
Сидоров Игорь Николаевич,

доктор физико-математических наук, профессор
Смирнов Юрий Геннадьевич.

Ведущая организация: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова.

Защита состоится 24 мая 2007 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного Совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, дом 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан “____”________________2007 г.

Ученый секретарь диссертационного
Совета к.ф.-м.н., доцент О.А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Интерес к математическому моделированию распространения собственных волн диэлектрических волноводов возникший в середине прошлого века при решении задач геологоразведки, радио- и эхо-локации, стремительно возрастает в связи с бурным развитием оптических телекоммуникационных технологий передачи данных на большие расстояния и широким использованием в радиоэлектронике миниатюрных интегрированных оптических схем вместо классических электрических. В диссертационной работе строится спектральная теория диэлектрических волноводов, описывающая свойства решений уравнений Максвелла в неограниченных областях в виде бегущих волн, удовлетворяющих условиям сопряжения на границах раздела сред и "парциальным" условиям излучения, введенным А.Г. Свешниковым. В работах А.С. Ильинского, Ю.Г. Смирнова, Е.В. Чернокожина, Ю.В. Шестопалова изучены свойства решений близких спектральных задач теории дифракции — задач о собственных волнах щелевых и полосковых линий, сочетающих диэлектрические и металлические направляющие структуры. Методы теории сингулярных интегральных уравнений, развитые в работах C. Muller, В.Д. Купрадзе, D. Colton, R. Kress, Б.Г. Габдулхаева и других авторов, играют важную роль при решении задач дифракции электромагнитных волн на проницаемых телах. Наиболее полная информация о всех типах волн (поверхностных, комплексных и вытекающих), удовлетворяющих "парциальным" условиям излучения, получена для волновода кругового поперечного сечения с кусочно-постоянным показателем преломления в работах Б.З. Каценеленбаума, Г.Н. Веселова, С.Б. Раевского. Разработано большое количество численных методов, ориентированных на поиск поверхностных волн, меньшее — комплексных. Существование поверхностных собственных волн волновода с переменным в ограниченной области показателем преломления доказано A. Bamberger, A.S. Bonnet. Для решения этой задачи методом конечных элементов P. Joly, C. Poirier использовали точные нелокальные граничные условия, позволившие свести ее к эквивалентной задаче в ограниченной области. Для численного решения задачи о собственных волнах волновода в плоско-слоистой окружающей среде широко применяется двумерное сингулярное интегральное уравнение, нетеровость оператора которого установлена в работе

H.P. Urbach. Однако, известные к настоящему времени, формулировки задач о собственных волнах диэлектрических волноводов оказались неудобными для изучения в рамках единых математических моделей свойств волн всех указанных типов. Актуальными проблемами являются: исследование качественных свойств собственных волн на основе наиболее общих постановок задач, разработка теоретически обоснованных численных методов решения этих задач. Дальнейшего развития требует применение метода точных нелокальных граничных условий в сочетании с методом конечных элементов в задачах о поверхностных собственных волнах, так как известные вычислительные схемы основаны на использовании специальных (соленоидальных) конечно-элементных пространств, применение которых на практике затруднительно. Актуальной является проблема разработки таких подходов, которые бы позволили использовать простейшие конечно-элементные пространства, что более удобно с точки зрения практического применения метода конечных элементов. Что касается задачи о собственных волнах волновода в плоско-слоистой среде, то свойства соответствующего сингулярного интегрального оператора изучены слабо. Актуальным является установление свойств этого оператора, необходимых для разработки и обоснования численных методов решения указанной задачи.

Цель исследований. Получение удобных формулировок задач и исследование в рамках единых математических моделей свойств поверхностных, вытекающих и комплексных собственных волн волноводов в однородной окружающей среде. Разработка теоретически обоснованных и эффективных с практической точки зрения методов вычисления собственных волн всех указанных типов. Доказательство фредгольмовости двумерного сингулярного интегрального оператора задачи о собственных волнах волновода в плоско-слоистой среде.

Методы исследований. В работе используются методы теории сингулярных интегральных уравнений, спектральной теории фредгольмовых голоморфных оператор-функций, спектральной теории ограниченных самосопряженных операторов, проекционные методы решения нелинейных спектральных задач.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми и состоят в получении новых формулировок общих задач о собственных волнах; установлении зависимостей постоянных распространения собственных волн от показателей преломления волновода и окружающей среды, частоты электромагнитных колебаний для волноводов произвольного контура поперечного сечения с переменным в ограниченной области показателем преломления; разработке и обосновании численных алгоритмов отыскания собственных волн всех известных типов; доказательстве фредгольмовости двумерного сингулярного интегрального оператора задачи о собственных волнах волновода в плоско-слоистой среде.

Достоверность результатов работы обеспечивается строгими математическими доказательствами; сопоставлением полученных результатов со свойствами точных решений задач, известными в простейших частных случаях; хорошим совпадением результатов численных экспериментов с точными решениями для тестовых задач.

Практическое значение. Разработанные подходы, методы и алгоритмы могут быть использованы для получения теоретически обоснованных результатов расчета широкого класса оптиковолоконных линий передач и интегрированных оптических схем, а также при решении других спектральных задач теории дифракции.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Международных научных конференциях “International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET)” (Харьков, 1998 г.; Харьков, 2000 г.; Киев, 2002 г.; Днепропетровск, 2004 г.; Харьков 2006 г.), “Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS)” (Нант, Франция, 1998 г.), “XXVI General Assembly International Union of Radio Science” (Торонто, Канада, 1999 г.), “International Conference on Transparent Optical Networks (ICTON)” (Кельце, Польша, 1999 г.; Краков, Польша, 2001 г.), “International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (WAVES)” (Сантьяго Де-Компостела, Испания, 2000 г.; Яваскила, Финляндия, 2003 г.); на Всероссийской конференции “Математическое моделирование и проблемы экологической безопасности” (Ростов-на-Дону, 2000 г.); на семинаре “Вычислительная электродинамика” Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (руководители – А.Г. Свешников, А.С. Ильинский); на Всероссийских семинарах “Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач” (Казань, 1998 г.), “Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач” (Казань, 1999 г.); на VIII Всероссийской школе-семинаре “Современные проблемы математического моделирования” (Ростов-на-Дону, 1999 г.); на Всероссийской школе-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова (Казань, 1999 г.); на Молодежных научных школах-конференциях “Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах” (Казань, 2000 и 2002 гг.); на семинаре кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета; на семинаре “Математические модели интегральной оптики” кафедры прикладной математики Казанского государственного университета (руководитель – Н.Б. Плещинский); на итоговых конференциях Казанского государственного университета 1998 – 2004 гг.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 36 работ, в том числе 10 статей в изданиях из списка ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, списка литературы и изложена на 235 страницах. Список литературы состоит из 175 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель работы, приводится обзор литературы по исследуемой теме, излагается краткое содержание диссертации.

Первая глава является вспомогательной и имеет, в основном, реферативный характер. В §1.1 формулируются дифференциальные уравнения для собственных волн диэлектрических волноводов и амплитуд этих волн. Вводятся электромагнитные потенциалы. Формулируются условия сопряжения для амплитуд собственных волн и электромагнитных потенциалов на границах раздела сред (там где показатель преломления терпит скачок). Формулируются “парциальные” условия излучения для амплитуд собственных волн. В § 1.2 формулируются дифференциальные уравнения, условия сопряжения и условия излучения для решений задачи в скалярном приближении слабонаправляющего волновода. Это приближение применяется для аппроксимации собственных волн волноводов с показателем преломления, незначительно отличающимся от показателя преломления окружающей среды. В §1.3 приводятся точные решения модельных задач о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения в векторном и скалярном случаях. Эти решения используются в качестве тестовых примеров при анализе адекватности математических моделей и эффективности численных методов.

Вторая глава посвящена изучению качественных свойств решений общих задач о собственных волнах волноводов с постоянным показателем преломления путем сведения их методом потенциалов простого слоя к нелинейным спектральным задачам для фредгольмовых голоморфных оператор-функций.

В §2.1 изучается скалярная задача о собственных волнах слабонаправляющего волновода. Ненулевая функция $u \in U$ называется собственной функцией задачи, отвечающей собственному значению $\beta \in \Lambda$, если:

$$\Delta u + \chi_+^2 u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\Delta u + \chi_\infty^2 u = 0, \quad x \in \Omega_\infty, \tag{2}$$

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \tag{3}$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r)\exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \tag{4}$$

Здесь Δ – двумерный оператор Лапласа; Ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная дважды непрерывно дифференцируемым контуром Γ, целиком лежащая в круге радиуса R_0, $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$; U – множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ и $\overline{\Omega}_\infty$, дважды непрерывно дифференцируемых в Ω и Ω_∞;

$$\chi_{+/\infty} = \sqrt{k^2 n_{+/\infty}^2 - \beta^2},$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, $\omega > 0$ – заданная частота электромагнитных колебаний; ε_0 , μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства, соответственно; n_+ и n_∞ – постоянные показатели преломления волновода и окружающей среды, соответственно, такие, что $0 < n_\infty < n_+$; $H_l^{(1)}(z)$ – функции Ханкеля первого рода порядка l; символом Λ обозначено пересечение римановых поверхностей функций $\ln \chi_+(\beta)$ и $\ln \chi_\infty(\beta)$.

Теорема 2.1. *На пересечении $\Lambda_0^{(1)}$ главных ("физических") листов поверхностей Λ_+ и Λ_∞ собственные значения задачи* (1) – (4) *могут принадлежать лишь множеству*

$$G = \{\beta \in \mathbb{R} : kn_\infty < |\beta| < kn_+\}.$$

Вещественным $\beta \in G$ соответствуют поверхностные волны (u экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$). Теорема 2.1. обобщает хорошо известные результаты о локализации спектра собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе элементарного анализа характеристического уравнения метода разделения переменных.

Задача (1) – (4) сведена к нелинейной спектральной задаче для системы слабосингулярных интегральных уравнений по контуру Γ на основе представления функции u в областях Ω и Ω_∞ в виде потенциалов простого слоя с непрерывными по Гельдеру плотностями и ядрами в виде удовлетворяющих соответствующим "парциальным" условиям излучения (условиям вида (4)) фундаментальных решений уравнений Гелмгольца (1) и (2). Построенная система интегральных уравнений трактуется как операторное уравнение вида:

$$A(\beta)w \equiv (I + B(\beta))w = 0 \qquad (5)$$

в банаховом пространстве $W = C^{1,\alpha} \times C^{0,\alpha}$. Установлено, что оператор $B(\beta)$ вполне непрерывен при любых $\beta \in \Lambda$.

Сведение системы интегральных уравнений первого рода, возникающей в результате применения метода потенциалов простого слоя, и содержащей непрерывно обратимые операторы $L : C^{0,\alpha} \to C^{1,\alpha}$ вида:

$$Lp = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln|\sin\frac{t-\tau}{2}| p(\tau)d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \qquad (6)$$

к фредгольмовому операторному уравнению (5) проводится на основе известной процедуры регуляризации с использованием результатов Б.Г. Габдулхаева.

Основным результатом §2.2 является

Теорема 2.4. *Регулярное множество оператор-функции $A(\beta)$, определенной в (5), не пусто, а именно, $\Lambda_0^{(1)} \setminus (D \bigcup G) \subset \rho(A)$. Характеристическое множество оператор-функции $A(\beta)$ может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции $A(\beta)$. Каждое характеристическое значение β оператор-функции $A(\beta)$ непрерывно зависит от параметров $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}^3_+$. Кроме того, с изменением параметров $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}^3_+$ характеристические значения оператор-*

функции $A(\beta)$ могут появляться и исчезать только на границе Λ, то есть в точках $\pm kn_+, \pm kn_\infty$ и на бесконечности.

Здесь D – множество, состоящее из мнимой оси и примыкающего к ней, не пересекающегося с G интервала вещественной оси:

$$\{\beta \in \mathbb{R} : |\beta| < kn_\infty\}.$$

Теорема 2.4. обобщает хорошо известные результаты о зависимости постоянных распространения собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения от показателей преломления волновода, окружающей среды и частоты электромагнитных колебаний, полученные в результате элементарного анализа характеристического уравнения метода разделения переменных.

Доказательство теоремы 2.4 основано на применении теоремы Гохберга — Крейна об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции $A(\beta)$ при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, и теоремы S. Steinberg о поведении характеристических значений β такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра ω в случае, если оператор-функция $A(\beta, \omega)$ является совместно непрерывной функцией параметров β и ω. Отметим, что теорема S. Steinberg справедлива для частного случая, когда оператор-функция имеет вид $A(\beta, \omega) = I + B(\beta, \omega)$, где $B(\beta, \omega)$ – вполне непрерывный оператор.

Предварительно изучаются свойства оператор-функции $A(\beta)$ и доказываются утверждения относительно спектральной эквивалентности задач (1) – (4) и (5). Во-первых, установлено, что если $w \in W$ является собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$, то функция u, представленная в виде потенциалов простого слоя с плотностями, определяемыми вектором w, принадлежит множеству U и является собственной функцией задачи (1) – (4), отвечающей собственному значению β_0. Во-вторых, любая собственная функция $u \in U$ задачи (1) – (4), отвечающая собственному значению $\beta_0 \in \Lambda_0^{(1)} \setminus D$, может быть представлена в виде потенциалов простого слоя с непрерывными по Гельдеру плотностями; при этом функция w, вычисленная по явным формулам по этим плотностям, принадлежит W и является собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению β_0.

В §2.3 исследуется общая векторная задача о собственных волнах волновода в полной электродинамической постановке. Ненулевой вектор $\{\mathrm{E}, \mathrm{H}\} \in U^6$ называется собственным вектором задачи, отвечающим собственному значению $\beta \in \Lambda$, если:

$$\mathrm{rot}_\beta \mathrm{E} = i\omega\mu_0 \mathrm{H}, \quad \mathrm{rot}_\beta \mathrm{H} = -\, i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathrm{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \tag{7}$$

$$\nu \times \mathrm{E}^+ = \nu \times \mathrm{E}^-, \quad x \in \Gamma, \tag{8}$$

$$\nu \times \mathrm{H}^+ = \nu \times \mathrm{H}^-, \quad x \in \Gamma, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_l \\ \mathrm{B}_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \tag{10}$$

Здесь символом rot_β обозначена векторная операция, которая получается из обычной операции rot заменой производной по x_3 умножением на $i\beta$; n – кусочно постоянная функция, равная n_+ в Ω и n_∞ в Ω_∞.

Теорема 2.5. *Мнимая и вещественная оси листа $\Lambda_0^{(1)}$ за исключением множества G не содержат собственных значений задачи (7) – (10).*

Вещественным $\beta \in G$ соответствуют поверхностные волны. Комплексным $\beta \in C_0^{(1)}$ отвечают комплексные собственные волны. Символом $C_0^{(1)}$ обозначена часть листа $\Lambda_0^{(1)}$ без мнимой и вещественной осей. Теорема 2.5 обобщает известные результаты о локализации спектра собственных волн диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе метода разделения переменных в векторном случае.

Задача (7) – (10) сведена к нелинейной спектральной задаче для системы сингулярных интегральных уравнений по контуру Γ на основе выражения собственных векторов $\{\mathrm{E}, \mathrm{H}\}$ задачи (7) – (10) через потенциальные функции E_3, H_3, удовлетворяющие уравнениям (1), (2), и представления функций E_3, H_3, в виде потенциалов простого слоя с непрерывными по Гельдеру плотностями и ядрами в виде фундаментальных решений уравнений Гелмгольца (1) и (2), удовлетворяющих соответствующим "парциальным" условиям излучения.

Вследствие наличия в условиях сопряжения, которым удовлетворяют функции E_3, H_3 на контуре Γ, касательных производных, построенная система уравнений содержит сингулярный интегральный оператор $S : C^{0,\alpha} \to C^{0,\alpha}$, определяемый равенством:

$$Sp = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} p(\tau) d\tau + \frac{i}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} p(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{11}$$

Этот линейный непрерывный оператор, как известно, непрерывно обратим. Построенная система интегральных уравнений трактуется как операторное уравнение вида:

$$A(\beta) w \equiv (I + B(\beta)) w = 0 \tag{12}$$

в банаховом пространстве $W = C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha} \times C^{0,\alpha}$. Установлено, что оператор $B(\beta)$ вполне непрерывен при любых $\beta \in \Lambda$.

Основным результатом §2.3 является

Теорема 2.8. *Регулярное множество оператор-функции $A(\beta)$, определенной в (12), не пусто, а именно,*

$$\Lambda_0^{(1)} \setminus \left(D \bigcup G \bigcup C_0^{(1)} \right) \subset \rho(A).$$

Характеристическое множество оператор-функции $A(\beta)$ может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции $A(\beta)$. Каждое характеристическое значение β оператор-функции $A(\beta)$ непрерывно зависит от параметров $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}^3_+$. Кроме того, с изменением параметров $(\omega, n_+, n_\infty) \in \mathbb{R}^3_+$ характеристические значения оператор-функции $A(\beta)$ могут появляться и исчезать только на границе Λ, то есть в точках $\pm kn_+, \pm kn_\infty$ и на бесконечности.

Теорема 2.8 обобщает известные результаты о зависимости постоянных распространения собственных волн диэлектрического волновода кругового сечения от показателей преломления волновода, окружающей среды и частоты электромагнитных колебаний, полученные в результате анализа характеристического уравнения метода разделения переменных в векторном случае.

В ходе доказательства теоремы изучаются свойства оператор-функции $A(\beta)$ и устанавливается спектральная эквивалентность задач (12) и (7) – (10).

Третья глава посвящена изучению качественных свойств решений общих задач о собственных волнах волноводов с переменным показателем преломления и размытой границей путем сведения их методом интегральных уравнений по области к нелинейным спектральным задачам для фредгольмовых голоморфных оператор-функций.

В §3.1 рассматривается скалярная задача в приближении слабонаправляющего волновода. Ненулевая функция $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$ называется собственной функцией этой задачи, отвечающей собственному значению $\beta \in \Lambda$, если:

$$\left[\Delta + \left(k^2 n^2 - \beta^2\right)\right] u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{13}$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \tag{14}$$

Здесь n – вещественная функция, удовлетворяющая условиям:

$$n = n_\infty = \mathrm{const}, \quad x \notin \Omega,$$

$$n_+ = \max_{x \in \Omega} n(x) > n_\infty > 0;$$

символом Λ обозначена поверхность Римана функции $\ln \chi_\infty(\beta)$.

Всюду в этой главе предполагается, что волновод имеет размытую границу, а именно, что $n \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Это предположение существенно используется в §3.2 при решении векторной задачи о собственных волнах. Результаты параграфа §3.1 справедливы для более общего случая: $n \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, граница Γ области Ω – липшицева кривая, на Γ функция $u \in U$ удовлетворяет условиям сопряжения (3). Однако, в целях единства изложения материала предположение $n \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$ делается и в §3.1.

Теорема 3.9. *На главном ("физическом") листе $\Lambda_0^{(1)}$ римановой поверхности Λ собственные значения задачи* (13), (14) *могут принадлежать лишь множеству G.*

Задача (13), (14) сведена к нелинейной спектральной задаче для интегрального уравнения по области Ω на основе представления функции u в виде интеграла по области Ω с ядром в виде фундаментального решения уравнения Гелмгольца (2), удовлетворяющего "парциальным" условиям излучения. Построенное интегральное уравнение трактуется как операторное уравнение вида:

$$A(\beta)v \equiv (I - B(\beta))v = 0 \tag{15}$$

в пространстве $L_2(\Omega)$. При любых $\beta \in \Lambda$ оператор $B(\beta)$ является вполне непрерывным; при $\beta \in G$ – самосопряженным и положительно определенным.

Доказывается, что, если $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$ является собственной функцией задачи (13), (14), отвечающей собственному значению $\beta_0 \in \Lambda$, то функция v, вычисленная по явной формуле по u, принадлежит пространству $L_2(\Omega)$ и является собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению β_0. С другой стороны, если $v \in L_2(\Omega)$ является собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению $\beta_0 \in \Lambda$, то функция u, построенная по v с помощью определенного интегрального представления, принадлежит пространству $C^2(\mathbb{R}^2)$ и является собственной функцией задачи (13), (14), отвечающей собственному значению β_0.

Теорема 3.11. *Регулярное множество оператор-функции* $A(\beta)$, *определенной в* (15), *не пусто, а именно,* $\Lambda_0^{(1)} \setminus G \subset \rho(A)$. *Характеристическое множество оператор-функции* $A(\beta)$ *может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции* $A(\beta)$. *Каждое характеристическое значение* β *оператор-функции* $A(\beta)$ *непрерывно зависит от параметров* $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}^2_+$. *Кроме того, с изменением* $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}^2_+$ *характеристические значения оператор-функции* $A(\beta)$ *могут появляться и исчезать только на границе поверхности* Λ, *то есть в точках* $\pm k n_\infty$ *и на бесконечности.*

Теорема 3.12. *Задача (13), (14) имеет по крайней мере одно простое положительное собственное значение* β, *принадлежащее множеству* G; *ему отвечает положительная собственная функция.*

В §3.2 изучается общая векторная задача о собственных волнах волновода с размытой границей в полной электродинамической постановке. Ненулевой вектор $\{\mathrm{E}, \mathrm{H}\} \in \left[\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)\right]^6$ называется собственным вектором задачи, отвечающим собственному значению $\beta \in \Lambda$, если:

$$\mathrm{rot}_\beta \mathrm{E} = i\omega\mu_0 \mathrm{H}, \quad \mathrm{rot}_\beta \mathrm{H} = -\, i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathrm{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_l \\ \mathrm{B}_l \end{bmatrix} H_l^{(1)}(\chi_\infty r) \exp(il\varphi), \quad |x| \geq R_0. \tag{17}$$

Теорема 3.12. *Мнимая и вещественная оси листа* $\Lambda_0^{(1)}$ *за исключением множества* G *не содержат собственных значений задачи (16), (17).*

Задача (16), (17) сведена к нелинейной спектральной задаче для интегрального уравнения по области Ω на основе, предложенного C. Muller, метода сведения трехмерной задачи дифракции электромагнитных волн на неоднородном теле с размытой границей к интегральному уравнению Фредгольма второго рода по области неоднородности. Построенное интегральное уравнение трактуется как операторное уравнение вида:

$$A(\beta)\mathrm{F} \equiv (I - B(\beta))\mathrm{F} = 0 \tag{18}$$

в пространстве $[L_2(\Omega)]^3$. При любых $\beta \in \Lambda$ оператор $B(\beta)$ вполне непрерывен.

Доказывается, что если вектор $\{\mathrm{E}, \mathrm{H}\} \in [\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)]^6$ является собственным вектором задачи (16), (17), отвечающим собственному значению $\beta_0 \in \Lambda$, то $\mathrm{F} = \mathrm{E} \in [L_2(\Omega)]^3$ есть собственный вектор оператор-функции $A(\beta)$, отвечающий характеристическому значению β_0. Если $\mathrm{F} \in [L_2(\Omega)]^3$ является собственным вектором оператор-функции $A(\beta)$, отвечающим характеристическому значению $\beta_0 \in \Lambda$, и это число β_0 не является собственным значением задачи (13), (14), то вектор $\{\mathrm{E}, \mathrm{H}\}$, построенный по F с помощью определенного интегрального представления, принадлежит $[C^2(\mathbb{R}^2)]^6$ и является собственным вектором задачи (16), (17), отвечающим собственному значению β_0.

Основным результатом §3.2 является

Теорема 3.12. *Регулярное множество оператор-функции $A(\beta)$, определенной в (18), не пусто, а именно, $\Lambda_0^{(1)} \setminus \left(G \bigcup C_0^{(1)}\right) \subset \rho(A)$. Характеристическое множество оператор-функции $A(\beta)$ может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции $A(\beta)$. Каждое характеристическое значение β оператор-функции $A(\beta)$ непрерывно зависит от параметров $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}^2_+$. Кроме того, с изменением параметров $(\omega, n_\infty) \in \mathbb{R}^2_+$ характеристические значения оператор-функции $A(\beta)$ могут появляться и исчезать только на границе поверхности Λ, то есть в точках $\pm kn_\infty$ и на бесконечности.*

Четвертая глава посвящена изучению вопросов существования и качественных свойств решений задач о поверхностных собственных волнах путем сведения их методом точных нелокальных граничных условий к параметрическим задачам на собственные значения для ограниченных самосопряженных операторов с нелинейным вхождением спектральных параметров.

В §4.1 изучается скалярная задача о поверхностных собственных волнах слабонаправляющего волновода в вариационной постановке: найти все такие пары чисел $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$, при которых существуют ненулевые функции $u \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющие для любой функции $v \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$ тождеству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + \beta^2 uv)dx = k^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} n^2 uv dx. \tag{19}$$

Здесь $\Lambda = \left\{(\beta^2, k^2) : \beta^2/n_+^2 < k^2 < \beta^2/n_\infty^2,\ \beta^2 > 0\right\}$; n – вещественная функция, принадлежащая пространству $C(\overline{\Omega})$, такая, что $n = n_\infty > 0$ в Ω_∞, $\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} n(x) \geqslant n_\infty$, $n_+ = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} n(x) > n_\infty$. Область Ω является ограниченной, не обязательно связной, каждая связная компонента ее границы Γ является липшицевой кривой.

Задача (19) эквивалентным образом сводится к параметрической задаче на собственные значения в круге $\Omega_R \supset \Omega$, которая формулируется следующим образом: найти все $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$, при которых существуют ненулевые функции $u \in W_2^1(\Omega_R)$, удовлетворяющие уравнению:

$$A(\beta^2, k^2)u = k^2 Bu, \tag{20}$$

где $A(\beta^2, k^2)$ и B – ограниченные линейные самосопряженные операторы, действующие в пространстве $W_2^1(\Omega_R)$; кроме того, $A(\beta^2, k^2)$ – неотрицательный оператор для любых $(\beta^2, k^2) \in \Lambda$, а B – вполне непрерывный положительный оператор. Сведение задачи (19) к задаче (20) основывается на построении точного нелокального условия на границе Γ_R области Ω_R с использованием условия сопряжения на Γ_R и явной формулы для метагармонического продолжения искомого решения с Γ_R в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_R$.

В теореме 4.18 доказывается, что при любом $\beta^2 > 0$ задача (20) имеет по крайней мере одно решение, а число всех ее решений увеличивается с ростом β^2 и стремится к бесконечности при $\beta^2 \to \infty$. Для каждого конечного значения β^2 существует конечное число решений $(\beta^2, k_l^2(\beta^2); u_l(\beta^2))$ задачи (20). Это число определяется решениями β_l^2 вспомогательной линейной задачи на собственные значения для ограниченных самосопряженных операторов (уравнения отсечки).

В теореме 4.19 доказывается, что функции $k^2 = k_l^2(\beta^2)$, определенные на (β_l^2, ∞), при всех $l \geqslant 1$ являются локально липшицевыми, возрастающими, и $k_l^2(\beta^2)/\beta^2 \to n_+^{-2}$ при $\beta^2 \to \infty$.

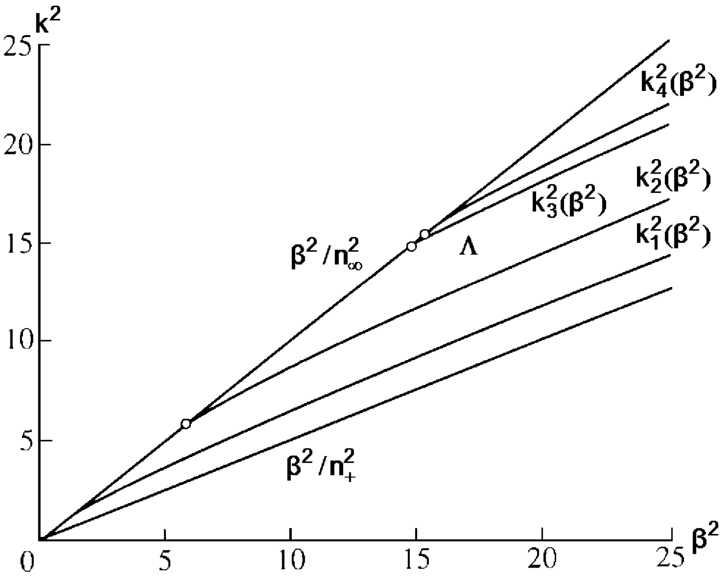

Рис. 1. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн слабонаправляющего волновода с показателем преломления, изменяющимся в ограниченной области (на примере волновода кругового сечения с кусочно-постоянным показателем преломления)

Результаты теорем 4.18 и 4.19 обобщают хорошо известные свойства поверхностных собственных волн слабонаправляющего цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с кусочно-постоянным показателем преломления (см., рис. 1), полученные на основе метода разделения переменных.

В §4.2 изучается векторная задача о поверхностных собственных волнах в вариационной постановке: найти все такие $(\beta, k) \in \Lambda$, при которых существуют ненулевые векторы $\mathrm{H} \in [W_2^1(\mathbb{R}^2)]^3$, удовлетворяющие для любого вектора $\mathrm{H}' \in [W_2^1(\mathbb{R}^2)]^3$ тождеству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{n^2}\operatorname{rot}_\beta \mathrm{H} \cdot \overline{\operatorname{rot}_\beta \mathrm{H}'} + \frac{1}{n_\infty^2}\operatorname{div}_\beta \mathrm{H}\, \overline{\operatorname{div}_\beta \mathrm{H}'}\Big)\, dx = k^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{H} \cdot \overline{\mathrm{H}'}\, dx. \quad (21)$$

Здесь $\Lambda = \{(\beta, k) : \beta/n_+ < k < \beta/n_\infty,\ \beta > 0\}$, символом div_β обозначена векторная операция, которая получается из обычной операции div заменой производной по x_3 умножением на $i\beta$.

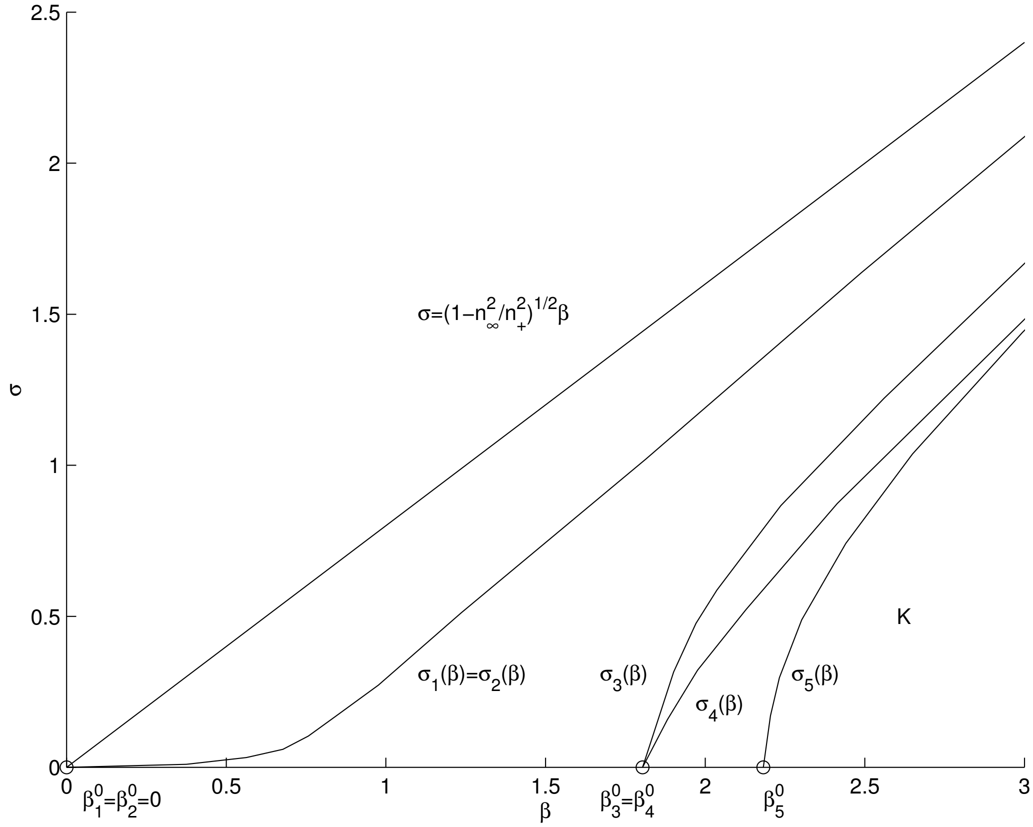

Рис. 2. Дисперсионные кривые для поверхностных собственных волн волновода с показателем преломления, изменяющимся в ограниченной области (на примере волновода кругового сечения с кусочно-постоянным показателем преломления)

На основе метода точных нелокальных граничных условий задача (19) эквивалентным образом сводится к параметрической задаче на собственные значения в круге Ω_R, которая формулируется следующим образом: найти все $(\beta,\sigma)\in\mathbb{R}^2_+$, при которых существуют ненулевые векторы $\mathrm{H}\in[W_2^1(\Omega_R)]^3$, удовлетворяющие уравнению:

$$A(\beta,\sigma)\mathrm{H}=-\sigma^2 B\mathrm{H}, \tag{22}$$

где $\sigma=\sqrt{\beta^2-k^2n_\infty^2}$ – поперечное волновое число, $A(\beta,\sigma)$ и B – ограниченные линейные самосопряженные операторы, действующие в пространстве $[W_2^1(\Omega_R)]^3$; кроме того, B – компактный положительный оператор.

В теореме 4.23 доказывается, что при любом $\beta>0$ задача (22) имеет по крайней мере два решения: $(\beta,\sigma_1(\beta);\mathrm{H}_1(\beta))$ и $(\beta,\sigma_2(\beta);\mathrm{H}_2(\beta))$. Число всех решений увеличивается с ростом β и стремится к бесконечности при $\beta\to\infty$. Для каждого конечного значения β существует конечное число решений $(\beta,\sigma_l(\beta);\mathrm{H}_l(\beta))$

задачи (22). Это число определяется значениями точек отсечки β_l^0, квадраты которых являются решениями уравнения отсечки, представляющего собой линейную задачу на собственные значения для ограниченных самосопряженных операторов.

В теореме 4.24 доказывается, что функции $\sigma = \sigma_l(\beta)$, определенные на (β_l, ∞), при всех $l \geqslant 1$ являются локально липшицевыми, неубывающими, и $\sigma_l(\beta)/\beta \to \sqrt{1 - (n_\infty/n_+)^2}$ при $\beta \to \infty$.

Результаты теорем 4.23 и 4.24 обобщают хорошо известные свойства поверхностных собственных волн цилиндрического диэлектрического волновода кругового поперечного сечения с кусочно-постоянным показателем преломления (см., рис. 2), полученные в векторном случае на основе метода разделения переменных.

Пятая глава посвящена изучению свойств оператора двумерного сингулярного интегрального уравнения, к которому сводится задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой окружающей среде.

В §5.1 изучается задача о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода в плоско-слоистой среде. Предполагается, что показатель преломления n является положительной вещественной функцией, кроме того существует ограниченная область Ω такая, что $n(x) = n_\infty(x_2)$, $x \in \Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$, где $n_\infty(x_2)$ зависит только от координаты x_2:

$$n_\infty(x_2) = \begin{cases} n_1, & x \in \Omega_1 = \{x : \infty < x_1 < \infty, x_2 > d\}, \\ n_2, & x \in \Omega_2 = \{x : \infty < x_1 < \infty, 0 < x_2 < d\}, \\ n_3, & x \in \Omega_3 = \{x : \infty < x_1 < \infty, x_2 < 0\}. \end{cases}$$

Предполагается, что $\Omega \subset \Omega_2$, и также, что n является непрерывной функцией в области Ω_2, то есть, что волновод имеет размытую границу. Ненулевой вектор $\{\mathrm{E}, \mathrm{H}\} \in \mathrm{U}^6$ называется собственным вектором задачи, отвечающим собственному значению $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$, если выполнены условия:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}_\beta \mathrm{E} &= i\omega\mu_0 \mathrm{H}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)\,, && (23) \\ \mathrm{rot}_\beta \mathrm{H} &= -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathrm{E}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)\,, && (24) \end{aligned}$$

$$\nu \times \mathrm{E}^+ = \nu \times \mathrm{E}^-, \quad \nu \times \mathrm{H}^+ = \nu \times \mathrm{H}^-, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \qquad (25)$$

Здесь $\widehat{\Lambda}_0^{(1)} = \{\beta \in \Lambda_0^{(1)} : \mathrm{Im}\beta = 0,\ |\beta| > kn_2\}$ – множество, принадлежащее вещественной оси главного (“физического”) листа римановой поверхности функции $\ln\sqrt{k^2n_2^2-\beta^2}$; $n_+ > n_2 \geq n_3 \geq n_1 > 0$; через Γ_1 и Γ_2 обозначены границы области Ω_2; U – множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$ и $\overline{\Omega}_3$, дважды непрерывно дифференцируемых в Ω_1, Ω_2 и Ω_3, экспоненциально убывающих при $|x| \to \infty$ по любому направлению, не параллельному прямым Γ_j, и ограниченных при $|x| \to \infty$ параллельно прямым Γ_j.

В §6.2 задача (23) – (25) сводится к нелинейной спектральной задаче для двумерного сингулярного интегрального уравнения на основе представления собственных векторов в виде интегралов по области Ω с ядрами, выражающимися через известную тензорную функцию Грина для поляризационного потенциала. Построенное интегральное уравнение изучается как операторное уравнение вида:

$$A(\beta)\mathrm{F} = 0 \tag{26}$$

в пространстве $[L_2(\Omega)]^3$. Для всех $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ ядро оператора $A(\beta)$ сильно сингулярно.

В §5.2 (теорема 5.25) доказывается, что для любого $\beta \in \widehat{\Lambda}_0^{(1)}$ оператор $A(\beta)$ фредгольмов. Доказательство основано на общих результатах теории многомерных сингулярных интегральных операторов.

Шестая глава посвящена разработке и теоретическому исследованию численных методов решения задач спектральной теории цилиндрических диэлектрических волноводов.

В §6.1 изучается метод Галеркина решения нелинейных спектральных задач для систем интегральных уравнений, содержащих сингулярные интегралы с логарифмической особенностью ядра (6) и ядром Гильберта (11). При построении и исследовании численного метода эти системы удобно трактовать как операторные уравнения (5) и (12) в гильбертовых пространствах $W_2^1 \times L_2$ и $L_2 \times L_2 \times L_2 \times L_2$, соответственно. В качестве базисных используются тригонометрические функции, которые являются собственными функциями, отвечающими известным собственным значениям, указанных сингулярных интегральных операторов. В соответствии с методом Галеркина приближенные значения β_n постоянных распространения β определяются как характеристические значения соответствующих конечномерных операторов $A_n(\beta) : H_n \to H_n$, где n – количество базисных функций.

В теореме 6.29 обосновывается сходимость метода Галеркина решения задачи (5), а в теореме 6.30 – задачи (12). А именно, доказывается, что если $\beta_0 \in \sigma(A)$ (символом $\sigma(A)$ обозначено характеристическое множество оператора A), то существует такая последовательность $\beta_n \in \sigma(A_n)$, что $\beta_n \to \beta_0$. Если $\{\beta_n\}$ – некоторая последовательность точек из Λ такая, что $\beta_n \in \sigma(A_n)$, $\beta_n \to \beta_0 \in \Lambda$, то $\beta_0 \in \sigma(A)$. Если $\{\beta_n\}$ – некоторая последовательность точек из Λ и $\{x_n\}$ – некоторая последовательность нормированных векторов, $\|x_n\| = 1$, таких, что $\beta_n \in \sigma(A_n),\ A_n(\beta_n)x_n = 0,\ \beta_n \to \beta_0 \in \Lambda,\ x_n \to x_0$, то $\beta_0 \in \sigma(A)$ и $A(\beta_0)x_0 = 0$, $\|x_0\| = 1$. Исследование сходимости метода Галеркина опирается результаты Г.М. Вайникко, О.О. Карма о проекционных методах решения нелинейных спектральных задач для фредгольмовых операторов.

В этом же параграфе приводятся результаты численных экспериментов поиска собственных векторов задачи (12) отвечающих комплексным собственным значениям $\beta \in C_0^{(1)}$. Для волновода кругового поперечного сечения результаты сравниваются с точными решениями, полученными методом разделения переменных, и с результатами работы T.F. Jablonski, в которой для решения задачи в исходной дифференциальной постановке применялся специальный проекционно-итерационный метод.

Строятся дисперсионные кривые для комплексных собственных значений – графики зависимости вещественной и мнимой части параметра $h = \beta/(kn_\infty)$ от $V = kR\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$ при фиксированном значении $(n_+^2 - n_\infty^2)/(2n_\infty^2) = 30$. Здесь R — радиус волновода. Результаты вычислений представлены на рисунке 3. Непрерывными линиями изображены точные решения, полученные как корни характеристического уравнения (верхний график — $\mathrm{Im}(h)$, нижний — $\mathrm{Re}(h)$). Кружочками на рисунке 3 отмечены результаты вычислений по методу Галеркина, которые с графической точностью совпали с результатами работы T.F. Jablonski. На рисунках 4 и 5 изображены линии уровня функций $|\mathrm{E}_3|$ и $|\mathrm{H}_3|$, соответственно, при $V = 2$. Помимо комплексных собственных волн волновода кругового поперечного сечения, для демонстрации эффективности предлагаемого метода разыскиваются также комплексные собственные волны диэлектрического волновода квадратного поперечного сечения со стороной, равной $2R$ (на рисунке 3 квадратиками отмечены значения $\mathrm{Im}(h)$ и $\mathrm{Re}(h)$). При этом используется аппроксимация квадрата гладкими кривыми. Исследуется скорость сходимости метода при использовании различных кривых.

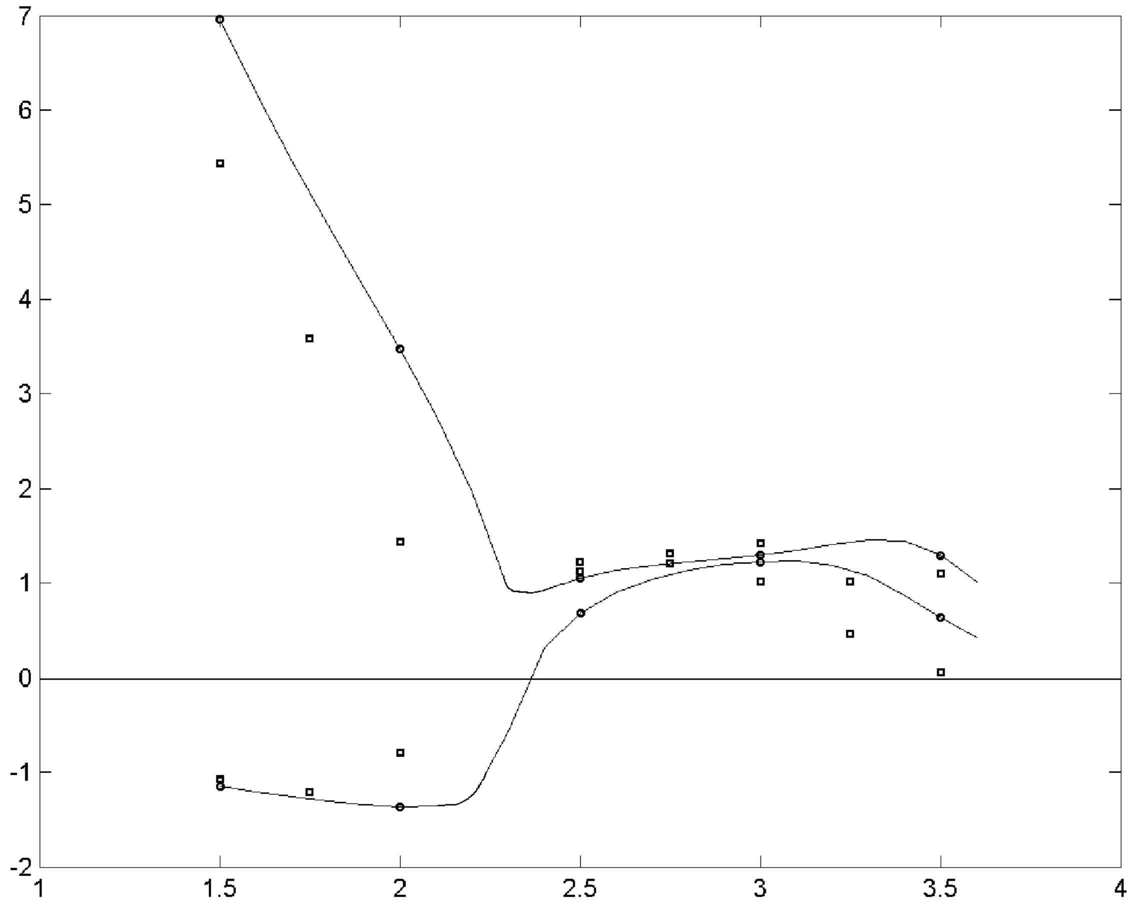

Рис. 3. Дисперсионные кривые для комплексных собственных волн волноводов кругового и квадратного поперечных сечений

В §6.2 описывается метод конечных элементов решения задачи (20). Используются простейшие пространства лагранжевых конечных элементов, удобные для практического применения метода. Предлагается простой метод аппроксимации точного нелокального граничного условия, выписанного в явном виде на основе метода разделения переменных. Устанавливается что свойства спектра конечно-элементной аппроксимации в точности соответствуют свойствам спектра исходной дифференциальной задачи. Приводятся результаты численных экспериментов решения ряда конкретных задач спектральной теории диэлектрических волноводов. Полученные результаты сравниваются с известными точными решениями и решениями, полученными другими авторами. Исследуется скорость сходимости метода в зависимости от точности аппроксимации граничного условия и максимального размера элементов.

В качестве примера, демонстрирующего возможности метода, приводятся результаты расчетов для новой волноведущей структуры. Область Ω состояла из трех касающихся друг друга кругов с центрами в вершинах равностороннего треугольника со сторонами ρ. Показатель преломления $n(x) = n_+$, $x \in \Omega$. Радиус R окружности Γ_R был выбран равным $1,3\rho$. На рисунке 6 построены дисперсионные кривые, показывающие зависимость $U = \rho k\sqrt{n_+^2 - (\beta/k)^2}$ от $V = \rho k\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2}$, для первых девяти собственных волн. Дисперсионные кривые для U_2 и U_3, U_5 и U_6, U_8 и U_9 совпали с графической точностью. Вероятно, соответствующие собственные значения β являются кратными. На рисунках 7, 8, 9 построены линии уровня квадратов собственных функций, u^2, в расчетной области Ω для $V = 3$.

Основные результаты диссертации

1. Сформулированы нелинейные спектральные задачи для фредгольмовых голоморфных оператор-функций, содержащих контурные сингулярные интегральные операторы, эквивалентные общим задачам о собственных волнах волноводов с постоянным показателем преломления. Доказано, что для всех допустимых значений неспектральных параметров регулярные множества оператор-функций не пусты, а характеристические множества могут состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями. Характеристические значения непрерывно зависят от неспектральных параметров, с изменением которых, могут появляться и исчезать лишь на границе области голоморфности оператор-функций.

2. Сформулированы нелинейные спектральные задачи для фредгольмовых голоморфных оператор-функций, содержащих слабо сингулярные интегральные операторы по области, эквивалентные общим задачам о собственных волнах волноводов с размытой границей. Доказано, что для всех допустимых значений неспектральных параметров регулярные множества оператор-функций не пусты, а характеристические множества могут состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями. Характеристические значения непрерывно зависят от неспектральных параметров, с изменением которых, могут появляться и исчезать лишь на границе области голоморфности оператор-функций.

3. Сформулированы параметрические задачи на собственные значения для ограниченных самосопряженных операторов с нелинейным вхождением спектральных параметров в точные нелокальные граничные условия, эквивалентные задачам о поверхностных собственных волнах волноводов. Доказано существование решений этих задач при всех допустимых значениях параметров. Получены результаты, обобщающие свойства известных в частных случаях точных решений задач.

4. Разработан метод Галеркина решения общих задач о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов с постоянным показателем преломления в полной векторной постановке и в скалярном приближении. Доказана его сходимость.

5. Разработан метод конечных элементов решения задач о поверхностных собственных волнах. Установлено, что свойства спектра конечно-элементной аппроксимации в точности соответствуют свойствам спектра исходной дифференциальной задачи. Показана практическая эффективность метода путем сравнения решений ряда конкретных задач спектральной теории диэлектрических волноводов с точными решениями и результатами, полученными другими авторами.

Список публикаций по теме диссертации

1. Карчевский Е.М. Исследование спектра собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов с малым скачком показателя преломления / Е.М. Карчевский // Исследования по прикладной математике: сб. науч. ст. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 1997. — Вып. 22. — С. 47–51.

2. Карчевский Е.М. Об определении постоянных распространения собственных волн диэлектрических волноводов методами теории потенциала / Е.М. Карчевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1998. — Т. 38. — № 1. — С. 132–136.

3. Karchevskii E.M. Study of Spectrum of Guided Waves of Dielectric Fibres / E.M. Karchevskii // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kharkov, Ukraine, 2-5 June 1998: Proceedings. — 1998. — P. 787–789.

4. Карчевский Е.М. Об одной спектральной задаче для оператора Гельмгольца на плоскости / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский //

Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач: материалы Всероссийского семинара. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 1998. — С. 19-20.

5. Karchevskii E.M. Surface and Leaky Guided Waves on Dielectric Fibres of Arbitrary Cross-Section / E.M. Karchevskii // Progress in Electromagnetics Research Symposium, Nantes, France, 13-17 July 1998: Proceedings. — 1998. — P. 325.

6. Карчевский Е.М. Исследование численного метода решения спектральной задачи теории диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 1. — С. 10–17.

7. Карчевский Е.М. К исследованию спектра собственных волн диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1999. — Т. 39. — № 9. — С. 1558–1563.

8. Карчевский Е.М. Исследование спектра собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов с произвольным контуром поперечного сечения / Е.М. Карчевский // Исследования по прикладной математике: сб. науч. ст. — Казань: Унипресс, 1999. — Вып. 21. — С. 132–140.

9. Karchevskii E.M. Universal Algorithm for the Accurate Computation of the Modal Characteristics of Arbitrary-Shape Optical Fibers / E.M. Karchevskii // International Conference on Transparent Optical Networks, Kielce, Poland, June 9-11, 1999: Proceedings. — 1999. — P. 201–204.

10. Karchevskii E.M. Universal Algorithm for Solution of Eigenvalue Problems of the Theory of Electromagnetic Waves / E.M. Karchevskii // XXVI General Assembly International Union of Radio Science, Toronto, Ontario, Canada, August 13-21, 1999: Proceedings. — 1999. — P. 41.

11. Карчевский Е.М. Об одной спектральной задаче теории диэлектрических волноводов / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1999. — Т. 39. — № 8. — С. 1293–1299.

12. Карчевский Е.М. Приближенный метод решения спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы Всероссийской школы-конференции, посв. 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, Изд-во ДАС, 1999. — С. 77–79.

13. Карчевский Е.М. Математическое моделирование распространения волн в цилиндрическом диэлектрическом волноводе / Е.М. Карчевский, Е.В. Трифонов // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы Всероссийской школы-конференции, посв. 130-летию со дня рождения Д.Ф. Егорова. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, Изд-во ДАС, 1999. — С. 112–113.

14. Карчевский Е.М. Исследование и приближенный метод решения спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Современные проблемы матем. моделирования: труды VIII Всероссийской школы-семинара. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1999. — С. 53–64.

15. Карчевский Е.М. Об определении комплексных постоянных распространения цилиндрических диэлектрических волноводов методами теории потенциала / Е.М. Карчевский, Е.В. Трифонов // Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач: труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Т. 2. — Казань: Унипресс, 1999. — С. 245–250.

16. Карчевский Е.М. Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости / Е.М. Карчевский, С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — № 4. — С. 563–565.

17. Карчевский Е.М. Исследование задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36. — № 7. — С. 998–999.

18. Карчевский Е.М. Существование и свойства решений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2000. — Т. 40. — № 8. — С. 1250–1263.

19. Карчевский Е.М. Об одном методе решения эллиптических задач в неограниченных областях / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Математическое моделирование и проблемы экологической безопасности: труды Всероссийской конференции. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2000. — С. 72–84.

20. Карчевский Е.М. Вопросы существования и численные методы в спектральной теории слабонаправляющих диэлектрических волноводов / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах:

труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: НИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 55–78.

21. Карчевский Е.М. Собственные моды диэлектрических волноводов с размытой границей / Е.М. Карчевский, И.А. Носич, С.И. Соловьев // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: НИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 79–114.

22. Karchevskii E.M. Mathematical Analysis and Numerical Modeling of the Guided Modes of the Step-Index Optical Fibers / E.M. Karchevskii // The Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Santiago de Compostela, Spain, July 10-14, 2000: Proceedings. — SIAM Proc. in Applied Mathematics, 2000. — V. 102. — P. 414–419.

23. Karchevskii E. Mathematical Analysis and Numerical Simulation of the Guided Modes of the Weakly Guiding Optical Fibers / E. Karchevskii, R. Dautov // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kharkov, Ukraine, 12-15 September 2000: Proceedings. — 2000. — P. 396.

24. Karchevskii Y. Computing Complex Propagation Constants of Dielectric Waveguides / Y. Karchevskii, E. Trifonov // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kharkov, Ukraine, 12-15 September 2000: Proceedings. — 2000. — P. 636–537.

25. Karchevskii E.M. Simulation of Weakly Guiding Optical Fibers by Finite Element Method with Exact Boundary Condition / R. Dautov, E.M. Karchevskii // International Conference on Transparent Optical Networks, Krakov, Poland, 2001: Proceedings. — 2001. — P. 206–210.

26. Карчевский Е.М. О решении векторной задачи о собственных волнах цилиндрических волноводов на основе нелокального краевого условия / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2002. — Т 42. — № 7. — С. 1051–1066.

27. Карчевский Е.М. Векторная задача о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский, Г.П. Корнилов // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 2002. — С. 4–40.

28. Карчевский Е.М. Применение методов теории сингулярных

интегральных операторов в задаче о собственных волнах волновода с размытой границей / Е.М. Карчевский // Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах: труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 2002. — С. 64–78.

29. Kartchevski E.M. Mathematical Analysis of the Guided Modes of an Integrated Optical Guide / E.M. Kartchevski, G. Hanson // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kiev, Ukraine, 10-13 September, 2002: Proceedings. — 2002. — P. 230–232.

30. Карчевский Е.М., Соловьев С.И. Существование собственных значений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов / Е.М. Карчевский, С.И. Соловьев // Известия вузов. Математика. — 2003. — № 3. — С. 78–80.

31. Kartchevski E.M. Green's Function Expansions in Dyadic Root Functions for Shielded Layered Waveguide Problems Obtained Via Residue Theory / G.W. Hanson, A.I. Nosich, E.M. Kartchevski // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2003. — V. 17. — № 5. — P. 759–761.

32. Kartchevski E.M. Mathematical Analysis of the Guided Modes of Integrated Optical Guides / E.M. Kartchevski, G. Hanson // The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Jyvaskyla, Finland, June 30 - July 4, 2003: Proceedings. — 2003. — P. 445–450.

33. Kartchevski E. Convergence of the Galerkin Method for Numerical Calculation of the Guided Modes of an Integrated Optical Guide / E. Kartchevski // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Dniepropetrovsk, Ukraine, 14-17 September, 2004: Proceedings. — 2004. — P. 263–265.

34. Karchevskii E.M. A New Method for the Computation of Eigenmodes in Dielectric Waveguides / G.P. Kornilov, R.Z. Dautov, E.M. Karchevskii // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Dniepropetrovsk, Ukraine, 14-17 September, 2004: Proceedings. — 2004. — P. 266–268.

35. Kartchevski E.M. Mathematical Analysis of the Generalized Natural Modes of an Inhomogeneous Optical Fiber / E.M. Kartchevski,

A.I. Nosich, G.W. Hanson // SIAM J. Appl. Math. — 2005. — V. 65. — № 6. — P. 2033–2048.

36. Карчевский Е.М. Численный метод поиска дисперсионных кривых и собственных волн оптических волноводов / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский, Г.П. Корнилов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2005. — № 12. — С. 2203–2218.

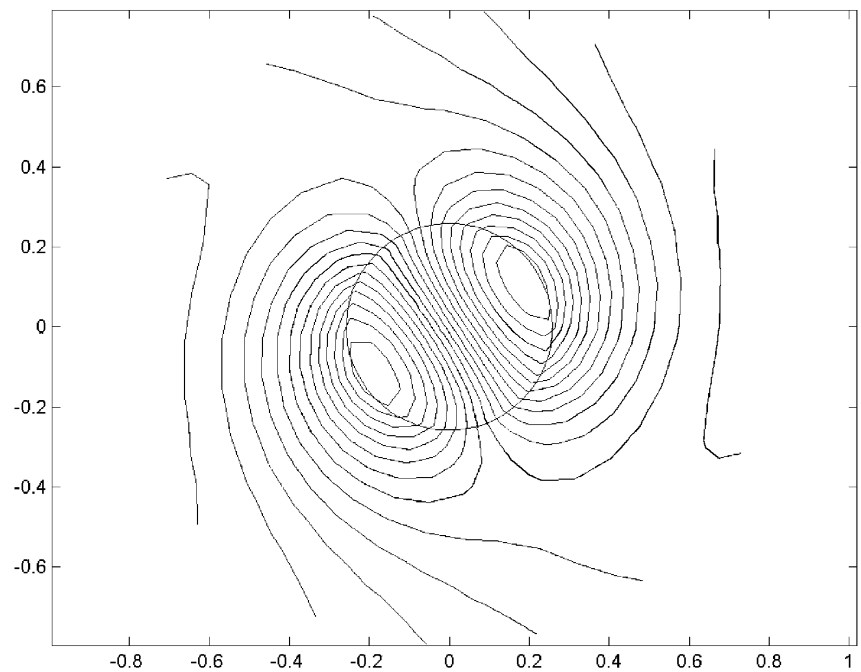

Рис. 4. Линии уровня функции $|E_3|$ для волновода кругового поперечного сечения

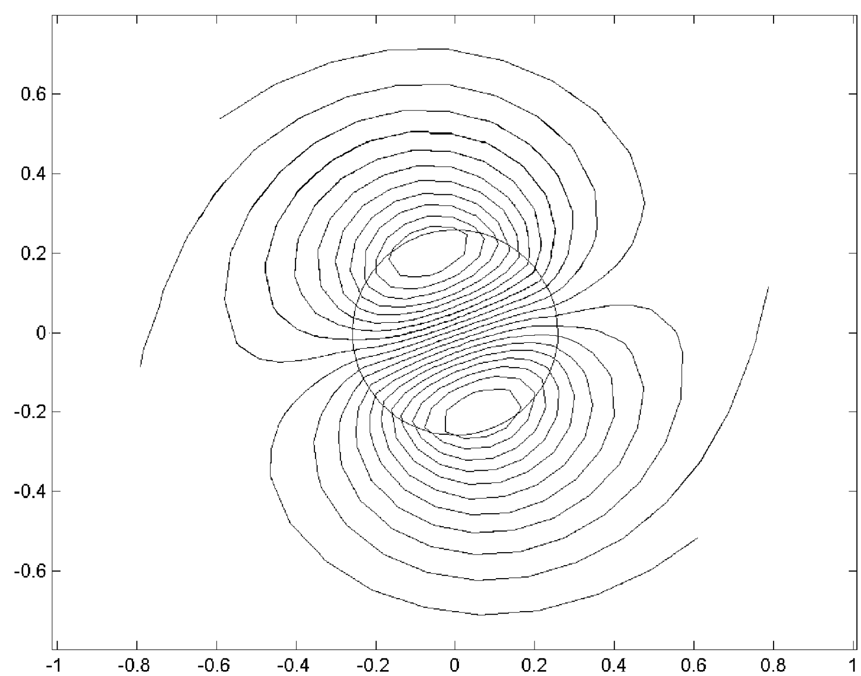

Рис. 5. Линии уровня функции $|H_3|$ для волновода кругового поперечного сечения

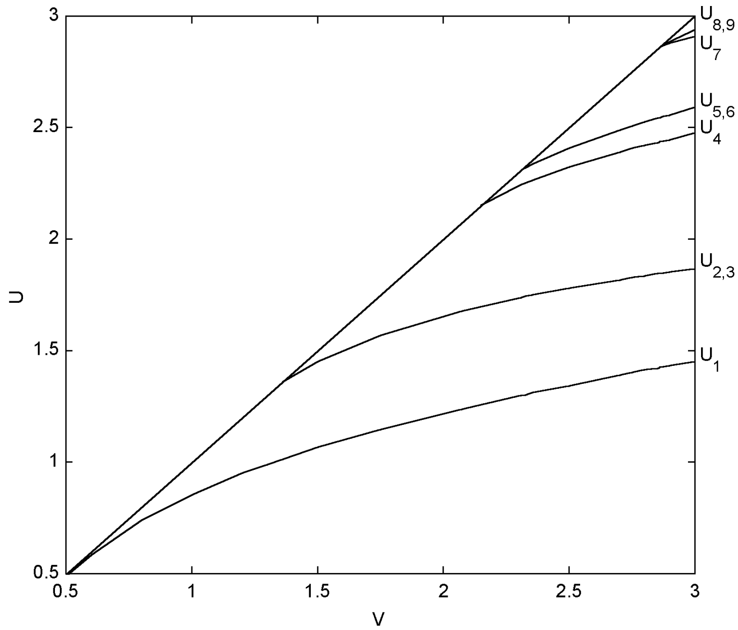

Рис. 6. Дисперсионные кривые для девяти собственных волн волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения

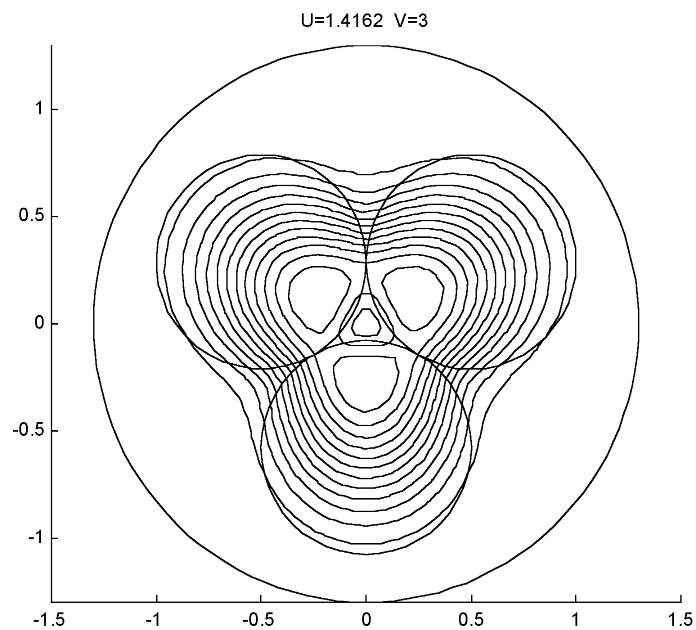

Рис. 7. Линии уровня квадрата собственной функции задачи (20) для основной собственной волны волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения

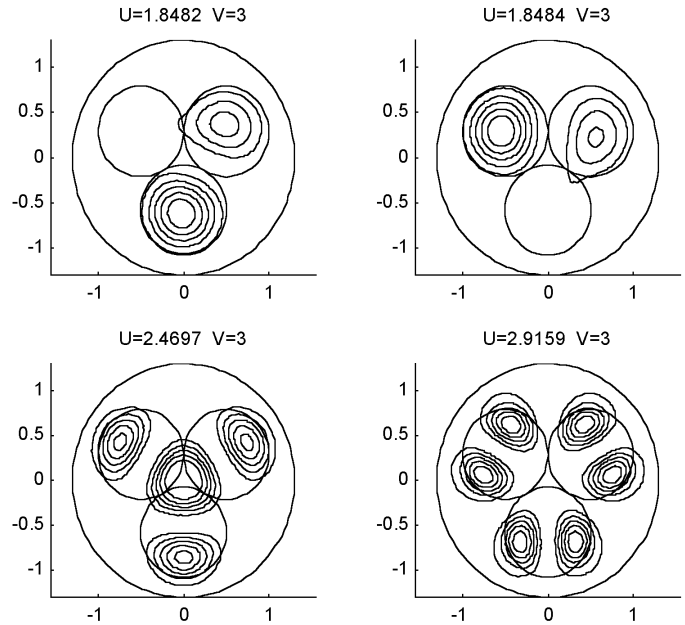

Рис. 8. Линии уровня квадратов собственных функций задачи (20) для волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения

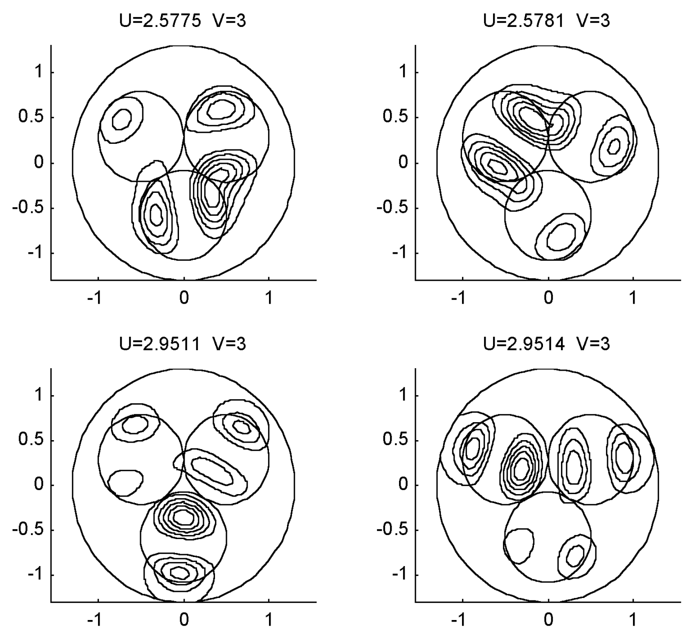

Рис. 9. Линии уровня квадратов собственных функций задачи (20) для волновода, состоящего из трех стержней кругового поперечного сечения