На правах рукописи

ИСМАГИЛОВ ЛИНАР НАИЛЕВИЧ

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2005

Работа выполнена в Казанском государственном университете

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Ляшко Анатолий Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, доцент Задворнов Олег Анатольевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, Желтухин Виктор Семенович, доктор физико-математических наук, профессор Якимов Николай Дмитриевич
Ведущая организация:	Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Защита состоится "23" июня 2005 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета

Автореферат разослан "21" мая 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физ.- мат. наук, доцент О.А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическое моделирование является широко используемой методологией научных исследований многочисленных задач в различных практических областях — в механики, физике, экономики, медицине и др. При математическом описании многих процессов и явлений используются нелинейные уравнения и вариационные неравенства. Поэтому разработка методов решения нелинейных уравнений и вариационных неравенств представляет несомненный интерес. До недавнего времени изучались, в основном, вариационные неравенства с сильно монотонными и максимально монотонными операторами в конечномерных и гильбертовых пространствах, однако описание ряда важных задач требует использования псевдомонотонных операторов. Методы решения вариационных неравенств с такими операторами разработаны сравнительно мало.

Одной из областей, где возникают вариационные неравенства, является теория фильтрации аномальной жидкости. В частности, это - задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей разрывному закону фильтрации, задачи об определении предельно равновесных целиков остаточной вязкопластичной нефти и т.д., играющие важную роль в вопросах увеличения нефтеотдачи, оптимизации разработки нефтяных месторождений. Эти задачи привлекают внимание многих специалистов. Для этих задач для ряда областей и законов фильтрации известны точные решения. Однако случаи произвольных областей и законов фильтрации, требующие, в силу сложности возникающих здесь задач, применения приближенных методов, изучены недостаточно.

Таким образом, рассматриваемые в диссертации вопросы являются актуальными, как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Цель исследований. Цель работы - построение и исследование приближенных методов решения вариационных неравенств второго рода с псевдомонотонными операторами и недифференцируемыми выпуклыми функционалами на выпуклых замкнутых множествах в банаховых и гильбертовых пространствах, возникающих при описании нелинейных стационарных задач фильтрации несжимаемой жидкости.

Методы исследований. При изучении рассматриваемых в работе задач используются методы выпуклого анализа, теория монотонных операторов, метод конечных элементов.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в построении и исследовании приближенных методов для решения вариационных неравенств второго рода в банаховых и гильбертовых пространствах, которые возникают при математическом описании нелинейных стационарных задач фильтрации.

Практическая ценность. Разработанные численные методы могут быть использованы при решении конкретных стационарных задач фильтрации — задач фильтрации несжимаемых жидкостей, следующих разрывному закону фильтрации, и задач об определении предельно равновесных целиков остаточной вязко пластической нефти.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научной конференции "Актуальные проблемы математического моделирования и информатики" (г. Казань, 2002 г.), 4-м и 5-м Всероссийских семинарах "Сеточные методы для краевых задач и приложения"(г. Казань, 2002, 2004 г.г.), весенних математических школах "Понтрягинские чтения - XIV, XV — Современные методы теории краевых задач"(г. Воронеж, 2003, 2004 г.г.), 12-й Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (г. Владимир, 2003 г.), Международной конференции по вычислительной математике "МКВМ - 2004"(г. Новосибирск), Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики", посвященной 70-летию НИИММ им. Чеботарева (г. Казань, 2004 г.), итоговых научных конференциях Казанского государственного университета 2002-2005 г.г., научных семинарах кафедры вычислительной математики КГУ, лаборатории математического моделирования Института информатики КГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы и изложена на 140 страницах, иллюстрированных 45 рисунками. Список литературы состоит из 146 наименований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 03-01-00380, 04-01-00821) и КЦФЕ Минобрнауки РФ (грант А03-2.8-659).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследований, дан обзор работ, близких к теме диссертации, излагается содержание диссертации.

В **первой** главе рассматриваются постановки стационарных задач фильтрации, которые математически формулируются в виде вариационных неравенств второго рода. Приведены постановки задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей разрывному закону фильтрации с предельным градиентом, и задачи об определении предельно равновесных целиков остаточной вязкопластичной нефти.

В § 1 дается постановка стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости, следующей разрывному закону с предельным градиентом.

Рассматривается установившейся процесс фильтрации несжимаемой жидкости. Фильтрация происходит в ограниченной области $\Omega \subset R^m$, $m \geq 1$ с непрерывной по Липшицу границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\operatorname{mes} \Gamma_2 > 0$, где Γ_1 – ограниченное открытое подмножество Γ, Γ_2 – внутренность $\Gamma \backslash \Gamma_1$. Закон фильтрации будем записывать в виде

$$v = -g(|\nabla u|^2)\nabla u, \tag{1}$$

где v – скорость фильтрации, u – давление, $\xi \to g(\xi^2)\xi$ – функция, определяющая закон фильтрации, относительно которой предполагаем следующее:

$$g(\xi^2)\xi = g_0(\xi^2)\xi + g_1(\xi^2)\xi, \tag{2}$$

$\xi \to g_0(\xi^2)\,\xi$ – неотрицательная, непрерывная, функция, равная нулю при $\xi \leq \beta$ ($\beta \geq 0$ – предельный градиент), не убывающая при $\xi \geq 0$, имеющая на бесконечности степенной рост порядка $p-1 > 0$, функция $\xi \to g_1(\xi^2)\,\xi$ имеет вид

$$g_1(\xi^2)\xi = \begin{cases} 0, & \xi \leq \beta, \\ \vartheta, & \xi > \beta, \quad \vartheta \geq 0. \end{cases}$$

Предполагаем, что выполнены следующие краевые условия:

$$(v(x), \mathbf{n}) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad \mathbf{n} \text{ – внешняя нормаль к } \Gamma_1, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma_2.$$

Отметим, что на практике важным моментом при решении задач нелинейной фильтрации с предельным градиентом является нахождение границ застойных зон – границ областей, где течение жидкости не происходит, т.е. линий, где $|\nabla u| = \beta$.

Перейдем к математической формулировке описанной выше задачи.

Пусть $V = \left\{u \in W_p^1(\Omega) : u(x) = 0,\ x \in \Gamma_2\right\}$, $A_0 : V \to V^*$ – оператор, порождаемый формой

$$\langle A_0 u, \eta\rangle = \int\limits_{\Omega} g_0(|\nabla u|^2)\ (\nabla u, \nabla\eta)\,dx, \tag{3}$$

функционал $F_1 : V \to R^1$ определен соотношением

$$F_1(\eta) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{|\nabla\eta|} g_1(\xi^2)\xi d\xi dx = \vartheta\int\limits_{\Omega} h(|\nabla\eta| - \beta)\,dx,\ h(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta < 0,\\ \zeta, & \zeta \geq 0.\end{cases} \tag{4}$$

Под решением стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в области, следующей разрывному закону фильтрации будем понимать функцию $u \in V$, являющуюся решением вариационного неравенства второго рода

$$\langle A_0 u, \eta - u\rangle + F_1(\eta) - F_1(u) \geq \langle f, \eta - u\rangle \quad \forall\, \eta \in V, \tag{5}$$

где $f \in V^*$ — заданный элемент, который характеризует плотность внешних источников. Известно, что задача (5) имеет по крайней мере одно решение.

Отметим, что при $p = 2$ (т.е. при линейном росте функции, определяющей закон фильтрации (1)) пространство V является гильбертовым.

В § 2 **главы 1** дается постановка задачи об определении предельно равновесных целиков остаточной вязкопластичной нефти.

Рассматривается процесс вытеснения вязкопластичной нефти из пласта водой. Отличительной особенностью вязкопластичных жидкостей, отличающей их от обычных ньютоновских жидкостей, является способность оставаться неподвижными в пористой среде, если модуль градиента давления не превосходит предельного значения β (предельного градиента давления). Предположим, что в процессе длительного вытеснения в пласте образовался равновесный целик, обтекаемый стационарным потоком вытесняющей воды. Это означает, что область фильтрации распадается на область движения воды и область, занятую неподвижной вязкопластичной нефтью (предельно равновесный целик). Существенным моментом при этом является определение границ таких целиков. Эта задача аналогична задаче фильтрации однородной жидкости с многозначным законом фильтрации. Застойные зоны (области, где жидкость не движется) отвечают целикам, а область течения — области движения воды. Область, в которой модуль градиента давления равен предельному градиенту, в законе фильтрации, соответствует области частично промытого пласта, часть мощности которого занята целиком, а часть — промыта.

Таким образом, задача поиска предельного целика сводится к определению стационарных полей давления u и скорости v жидкости, вытесняющей нефть, в области Ω с непрерывной по Липшицу границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\text{mes}\ \Gamma_2 > 0$, где Γ_1 — ограниченное открытое подмножество Γ, Γ_2 — внутренность $\Gamma \backslash \Gamma_1$, удовлетворяющих уравнению фильтрации и соответствующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \operatorname{div} v(x) = \tilde{f}, & x \in \Omega, \\ -v(x) \in g_\vartheta(|\nabla u|^2)\, \nabla u = g_0(|\nabla u|^2)\, \nabla u + \vartheta\, \dfrac{H(|\nabla u| - \beta)}{|\nabla u|}\, \nabla u, & x \in \Omega, \\ (v, n) = 0,\ x \in \Gamma_1, \quad u(x) = 0,\ x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{6}$$

где H — многозначная функция, определяемая по формуле

$$H(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ [0,\, 1], & \xi = 0, \\ 1, & \xi > 0, \end{cases}$$

$\beta \geq 0$, $\vartheta > 0$ — заданные константы, функция $\xi \to g_0(\xi^2)\xi$ удовлетворяет условиям, сформулированным в § 1.

Описанная задача математически также формулируется в виде вариационного неравенства (5).

Во **второй** главе построен метод итеративной регуляризации для решения вариационных неравенств второго рода с псевдомонотонными операторами и выпуклыми, недифференцируемыми функционалами на выпуклых замкнутых множествах в банаховых и гильбертовых пространствах, описывающие, в частности, задачи фильтрации, рассматриваемые в главе 1. Проведено исследование сходимости предложенного итерационного метода. Рассмотрено решение задач фильтрации методом итеративной регуляризации.

В § 1 сформулирована постановка общей задачи — вариационного неравенства второго рода.

Пусть V — рефлексивное банахово пространство с равномерно выпуклым сопряженным пространством V^*, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — отношение двойственности между V и V^*, M — выпуклое замкнутое множество в V, $A_0 : V \to V^*$ — псевдомонотонный, коэрцитивный оператор. Предполагаем, также, что A_0 — ограниченно липшиц-непрерывный оператор:

$$\|A_0 u - A_0 \eta\|_{V^*} \leq \mu(R) \Phi(\|u - \eta\|_V) \quad \forall\, u, \eta \in V, \tag{7}$$

где $R = \max\{\|u\|_V, \|\eta\|_V\}$, μ – неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, Φ – непрерывная, строго возрастающая на $[0, +\infty)$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$. Кроме того, считаем, что

$$\int_0^1 (\langle A_0(t(u+\eta)), u+\eta\rangle - \langle A_0(tu), u\rangle)dt = \int_0^1 \langle A_0(u+t\eta), \eta\rangle dt \quad \forall\, u, \eta \in V, \tag{8}$$

Пусть, далее, $F_1 : V \to R^1$ – выпуклый (вообще говоря, недифференцируемый), липшиц-непрерывный (с константой $\gamma > 0$) функционал.

Рассматривается задача поиска элемента $u \in M$, являющегося решением вариационного неравенства второго рода

$$\langle A_0 u, \eta - u\rangle + F_1(\eta) - F_1(u) \geq \langle f, \eta - u\rangle \quad \forall\, \eta \in M. \tag{9}$$

В § 2 **главы 2** построен метод итеративной регуляризации решения вариационного неравенства (9).

Для $\varepsilon > 0$ вводится функционал $F_{1\varepsilon}$, удовлетворяющий условиям

$$|F_{1\varepsilon}(\eta) - F_1(\eta)| \leq c(\varepsilon) \quad \forall\, \eta \in V, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) = 0, \tag{10}$$

$$|F_{1\varepsilon}(v) - F_{1\varepsilon}(u)| \leq \gamma^* \|v - u\|_V \quad \forall\, u, v \in V, \quad \gamma^* > 0. \tag{11}$$

Для решения задачи (9) рассмотрим следующий итерационный метод. Пусть $u^{(0)} \in M$ – произвольный элемент. Определим для $n = 0, 1, 2, \ldots$ элемент $u^{(n+1)} \in M$ как решение вариационного неравенства:

$$\langle J(u^{(n+1)} - u_n), \eta - u^{(n+1)}\rangle + \tau(F_{1\varepsilon_n}(\eta) - F_{1\varepsilon_n}(u^{(n+1)})) \geq$$
$$\geq \tau\langle f - A_0 u^{(n)}, \eta - u^{(n+1)}\rangle \qquad \forall\, \eta \in M, \tag{12}$$

где $\tau > 0$ – итерационный параметр, $J : V \to V^*$ – оператор двойственности, порождаемый функцией Φ.

В § 3 **главы 2** исследована сходимость метода (12) в случае банахова пространства. Введем функционал

$$F(\eta) = F_0(\eta) + F_1(\eta) - \langle f, \eta\rangle, \quad F_0(\eta) = \int_0^1 \langle A_0(t\eta), \eta\rangle dt, \quad f \in V^*.$$

Теорема 1 . *Пусть* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c(\varepsilon_n) = \sigma < +\infty, \qquad 0 < \tau < \min\left\{1, \frac{1}{\mu_0}\right\}$,

где $\mu_0 = \mu(R_0 + \Phi^{-1}(R_1 + \gamma^*))$, $R_0 = \sup\limits_{u \in S_0} \|u\|_V$, $R_1 = \sup\limits_{u \in S_0} \|A_0 u - f\|_{V^*}$,

$$S_0 = \{u \in M : F(u) \le F(u^{(0)}) + 2\sigma\}.$$

Тогда последовательность $\{u^{(n)}\}$*, построенная согласно (12), ограничена в* V*, и все ее слабо предельные точки являются решениями задачи (9) при* $n \to +\infty$.

В § 4 **главы 2** рассмотрен случай, когда V − гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным V^*. Предполагаем, что оператор A_0 удовлетворяет условию обратной сильной монотонности:

$$\|A_0 u - A_0 \eta\|_V^2 \le d_0\ (A_0 u - A_0 \eta, u - \eta)_V\,,\ d_0 > 0 \quad \forall\, u,\, \eta \in V. \tag{13}$$

Теорема 2 . *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c(\varepsilon_n) = \sigma < +\infty$*, оператор* A_0 *является коэрцитивным и удовлетворяет условиям (8), (13). Пусть, далее,* $u^{(0)} \in M$ − *произвольный элемент. Определим для* $n = 0, 1, 2 \dots$ *элемент* $u^{(n+1)} \in M$ *как решение вариационного неравенства:*

$$(u^{(n+1)} - u^{(n)}\ ,\ \eta - u^{(n+1)})_V + \tau(F_{1\varepsilon_n}(\eta) - F_{1\varepsilon_n}(u^{(n+1)})) \ge$$

$$\ge \tau(f - A_0 u^{(n)}, \eta - u^{(n+1)})_V \ \ \forall\, \eta \in M, \tag{14}$$

где $0 < \tau < \tau_0 = 2/d_0$*. Тогда вся последовательность* $\{u^{(n)}\}$*, построенная согласно (14), сходится слабо в* V *к решению задачи (9) при* $n \to +\infty$.

В § 5 **главы 2** приведена реализация метода (14) в случае специального вида функционала F_1.

Пусть V, H - гильбертовы пространства, $M = V$. Предполагаем, что $F_1 = G_1 \circ \Lambda$, $\Lambda : V \to H$ − линейный, непрерывный оператор, такой что $(\Lambda u, \Lambda \eta)_H = (u, \eta)_V$ для любых $u, \eta \in V$, где $G_1 : H \to R^1$ − собственный, выпуклый, слабо полунепрерывный снизу функционал. Введем функционал $G_{1\varepsilon}$, который удовлетворяет условиям вида (10), (11). Тогда положим $F_{1\varepsilon} = G_{1\varepsilon} \circ \Lambda$.

Для решения неравенства (14) рассматривается следующий итерационный процесс. Для заданных $r > 0$, начальных приближений $\lambda_0 \in H$, $p^{(0)} \in H$, таких, что $\lambda^{(0)} \in \partial G_{1\varepsilon}(p^{(0)})$, определим для $k = 0, 1, 2, \dots$ последовательности $\left\{w^{(k)}\right\}$, $\left\{p^{(k)}\right\}$, $\left\{\lambda^{(k)}\right\}$ следующим образом:

1) определим $w^{(n+1)}$ как решение задачи

$$(w^{(k+1)} - \tau F_n, \eta)_V + \tau \left(\lambda^{(k)} - r p^{(k)} + r \Lambda w^{(k+1)}, \Lambda \eta\right)_H = 0 \ \ \forall\, \eta \in V; \tag{15}$$

2) находим $p^{(n+1)}$, решая задачу минимизации

$$G_{1\varepsilon}\left(p^{(k+1)}\right) - \left(\lambda^{(k)}, p^{(k+1)}\right)_H + \frac{r}{2}\left\|\Lambda w^{(k+1)} - p^{(k+1)}\right\|_H^2 \le$$
$$\le G_{1\varepsilon}(q) - \left(\lambda^{(k)}, q\right)_H + \frac{r}{2}\left\|\Lambda w^{(k+1)} - q\right\|_H^2 \quad \forall\, q \in H; \tag{16}$$

3) вычислим $\lambda^{(k+1)}$ находим по формуле

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r\left(\Lambda w^{(k+1)} - p^{(k+1)}\right). \tag{17}$$

При этом $\{w^{(k)}\}$ сходится слабо в V к некоторому решению w задачи (14), $\{p^{(k)}\}$ сходится сильно в H к Λw при $k \to +\infty$.

В § 6 **главы 2** метод итеративной регуляризации применяется для решения задач фильтрации. Пусть функция $\xi \to g_0(\xi^2)\xi$, кроме, условий определенных в § 1 главы 1, удовлетворяет так называемому условию подчинения

$$\frac{g_0(\xi^2)\xi - g_0(\eta^2)\eta}{\xi - \eta} \le c_1(\alpha + \xi + \eta)^{p-2}\ \forall\, \xi, \eta > 0,\ c_1 > 0,\ \alpha = \begin{cases} 1, & \text{при } p \ge 2, \\ 0, & \text{при } p < 2. \end{cases}$$

При этом оператор A_0 удовлетворяет условию (7) с функциями Φ, μ, задаваемыми формулами

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} \xi^{p-1}, & 1 < p < 2, \\ \xi\ , & p \ge 2, \end{cases} \qquad \mu(\xi) = \begin{cases} c_2, & c_2 > 0\,,\ 1 < p < 2, \\ c_3(1 + 2\,\xi)^{p-2}, & c_3 > 0,\ p \ge 2. \end{cases}$$

В случае, когда пространство V является гильбертовым, оператор A_0 является обратно сильно монотонным, т.е. удовлетворяет условию (13).

Для решения рассматриваемых задач фильтрации выполнены условия теорем 1, 2. Функционал F_1, определяемый соотношением (4), представим в виде суперпозиции $F_1 = G_1 \circ \Lambda$, где $\Lambda = \nabla$, а функционал $G_1 : H = [L_2(\Omega)]^m \to R^1$ задается соотношением

$$G_1(p) = \vartheta \int\limits_\Omega h(|\,p\,| - \beta)\,dx, \quad p \in H.$$

Теперь исходное вариационное неравенство приобретает следующий вид

$$(A_0 u\,,\ \eta - u)_V + G_1(\Lambda\eta) - G_1(\Lambda u) \ge \langle f, \eta - u\rangle \quad \forall\, \eta \in V.$$

Определим функцию по формуле

$$g_{1\varepsilon}(\xi^2)\xi = \begin{cases} 0, & \xi \le \beta - \varepsilon, \\ \vartheta(\xi - \beta + \varepsilon)/\varepsilon, & \beta - \varepsilon \le \xi \le \beta, \\ \vartheta, & \xi \ge \beta, \end{cases}$$

которая порождает функционалы $F_{1\varepsilon}$ и $G_{1\varepsilon}$.

В случае гильбертова пространства $J = -\Delta$. Поэтому метод итеративной регуляризации (15) - (17) для определения последовательностей $\left\{w^{(k)}\right\}$, $\left\{p^{(k)}\right\}$, $\left\{\lambda^{(k)}\right\}$ запишется в следующем виде: пусть $p^{(0)} \in H$ - произвольный вектор, $\lambda_0 = g_{1\varepsilon}(\left|p^{(0)}\right|^2)p^{(0)}/\left|p^{(0)}\right|$, для $k = 0, 1, 2, \ldots$

1) находим $w^{(k+1)}$ как решение краевой задачи

$$-(1+\tau r)\Delta w^{(k+1)} = \tau\ \left[F_n + \operatorname{div}(\lambda^{(k)} - rp^{(k)})\right], x \in \Omega,$$

$$(w^{(k+1)}(x), \mathbf{n}) = 0,\ x \in \Gamma_1,\ w^{(k+1)}(x) = 0,\ x \in \Gamma_2; \tag{18}$$

2) полагаем $p^{(k+1)} = \alpha/(g_{1\varepsilon}(t^2) + r)$, где $\alpha = \lambda^{(k)} + r\nabla w^{(k+1)}$,

$$t = \begin{cases} |\alpha|/r, & z \leq r(\beta - \varepsilon), \\ (\vartheta(\beta - \varepsilon) + \varepsilon|\alpha|)/(\vartheta + \varepsilon r), & r(\beta - \varepsilon) \leq |\alpha| \leq r\beta + \vartheta, \\ (|\alpha| - \vartheta)/r, & |\alpha| \geq r\beta + \vartheta; \end{cases}$$

3) вычисляем $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r\ \left(\nabla w^{(k+1)} - p^{(k+1)}\right)$.

Таким образом, на каждом шаге итерационный метод сводится фактически к решению краевой задачи (18).

В **третьей** главе построен итерационный метод расщепления решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами и выпуклыми недифференцируемыми функционалами в гильбертовых пространствах, возникающих при описании рассматриваемых задач фильтрации. Проведено исследование сходимости метода.

В § 1 рассмотрен частный случай вариационного неравенства (9) в гильбертовом пространстве, когда функционал F_1 является суперпозицией выпуклого функционала и линейного непрерывного оператора.

Пусть $V,\ H -$ гильбертовы пространства, $M = V,\ F(\eta) = \Psi(\eta) + G_1(\Lambda\eta)$, $\Psi : V \to R^1 -$ дифференцируемый по Гато функционал, причем производная Гато $A_0 = \Psi' : V \to V -$ коэрцитивный, обратно сильно монотонный оператор с константой $d_0 > 0$, т.е. выполнено условие (13), $G_1 : H \to R^1 -$ собственный, выпуклый, слабо полунепрерывный снизу функционал, $\Lambda : V \to H -$ линейный непрерывный оператор, имеющий ограниченный обратный, такой, что $(\Lambda u, \Lambda\eta)_H = (u, \eta)_V$ для всех $u, \eta \in V$.

Рассматривается задача

$$F(u) = \inf_{\eta \in V}\ \{F(\eta) - (f, \eta)_V\}. \tag{19}$$

Эта задача имеет по крайней мере одно решение и эквивалентна следующему вариационному неравенству второго рода

$$(A_0 u - f, \eta - u)_V + G_1(\Lambda\eta) - G_1(\Lambda u) \geq 0 \quad \forall\, \eta \in V, \tag{20}$$

являющемуся частным случаем вариационного неравенства (9). Поэтому задача (20) также имеет по крайней мере одно решение.

Введем функции $L : V \times H \times H \to R^1$ и $L_r : V \times H \times H \to R^1$:

$$L(\eta, z; \mu) = \Psi(\eta) + G_1(z) + (\mu, \Lambda\eta - z)_H - (f, \eta)_V,$$

$$L_r(\eta, z; \mu) = L(\eta, z; \mu) + \frac{r}{2}\, \|\Lambda\eta - z\|_H^2\,, r > 0.$$

Наряду с задачей (19) рассматриваются следующие задачи о поиске седловых точек функционалов L и L_r:

$$\inf_{\eta\in V,\, z\in H} \ \sup_{\mu\in H} L(\eta, z; \mu), \tag{21}$$

$$\inf_{\eta\in V,\, z\in H} \ \sup_{\mu\in H} L_r(\eta, z; \mu). \tag{22}$$

Теорема 3 . *Задача (21) разрешима, при этом первая компонента седловой точки u — решение задачи (19) , вторая и третья компоненты седловой точки y и λ связаны с первой компонентой и соотношениями $y = \Lambda u$, $\lambda \in \partial G_1(\Lambda u)$. Обратно, если u — решение задачи (19), $\Lambda u = y$, тогда существует $\lambda \in \partial G_1(\Lambda u)$ такая, что $(u, y; \lambda)$ — седловая точка задачи (21).*

Теорема 4 . *Множества решений задач (21) и (22) совпадают.*

В § 2 **главы 3** построен метод расщепления решения задачи (20).

Из теорем 3, 4 вытекает, что для нахождения решения задачи (20), в силу ее эквивалентности задаче (19), можно использовать алгоритмы поиска седловой точки функции Лагранжа L_r.

Пусть $u^{(0)} \in V$ — произвольный элемент, полагаем $y^{(0)} = \Lambda u^{(0)}$, находим $\lambda^{(0)} \in \partial G_1(u^{(0)})$. Определим для $k = 1, 2, \ldots$ последовательности $\{u^{(k)}\}$, $\{y^{(k)}\}$, $\{\lambda^{(k)}\}$ следующим образом:

1) находим $u^{(k+1)}$ как решение задачи

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \tau\, \left[A_0 u^{(k)} - f + \Lambda^*\lambda^{(k)} + r\, u^{(k)} - r\,\Lambda^* y^{(k)}\right], \tag{23}$$

где τ — итерационный параметр;

2) определяем элемент $y^{(k+1)}$, решая задачу минимизации

$$L_r(u^{(k+1)}, y^{(k+1)}; \lambda^{(k)}) \leq L_r(u^{(k+1)}, z; \lambda^{(k)}) \quad \forall z \in H; \tag{24}$$

3) вычисляем λ_{k+1} по формуле

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r \left(\Lambda u^{(k+1)} - y^{(k+1)} \right). \tag{25}$$

При численной реализации метода расщепления (23) - (25) основную трудность представляет решение задачи минимизации (24). Запишем (24) в виде:

$$(r\, \Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)}, z - y^{(k+1)})_H \leq G_r(z) - G_r(y^{(k+1)}) \quad \forall\, z\, \in H, \tag{26}$$

где $G_r(z) = G_1(z) + \dfrac{r}{2}\, \|z\|_H^2$, т. е. $r\, \Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)} \in \partial\, G_r(y^{(k+1)})$. Известно, что $q \in \partial\, G_r(z)$ тогда и только тогда, когда $z \in \partial\, G_r^*(q)$, где G_r^* — сопряженный к G_r функционал. Поэтому имеем, что

$$y^{(k+1)} \in \partial\, G_r^*(r\, \Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)}).$$

Таким образом, решение задачи (24) существенно облегчается в случае, когда мы можем эффективно вычислить субдифференциал ∂G_r^*. При этом задача поиска элемента $y^{(k+1)}$ сводится к вычислениям по явным формулам. Этим мы пользуемся ниже при решении рассматриваемых задач фильтрации.

В § 3 **главы 3** проведено исследование сходимости итерационного процесса расщепления (23) - (25). Определим гильбертово пространство $Q = V \times H \times H$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_Q = a_1\, (\cdot,\cdot)_V + a_2\, (\cdot,\cdot)_H + a_3\, (\cdot,\cdot)_H$, где $a_1 = (1 - \tau\, r)/(2\,\tau)$, $a_2 = r/(2)$, $a_3 = 1/(2\, r)$, τ, r - положительные константы, связанные соотношением $\tau r < 1$.

Рассмотрим оператор $T : Q \to Q$: $\;Tq = \{T_1 q,\, T_2 q,\, T_3 q,\}$,

$$T_1 q = q_1 - \tau\, \left[A_0 q_1 - f + \Lambda^* q_3 + r\, q_1 - r\, \Lambda^* q_2\right], \quad T_2 q = \operatorname*{Arg\,min}_{z \in H} L_r(T_1 q, z; q_3),$$

$$T_3 q = q_3 + r\, \left[\Lambda T_1 q - T_2 q\right].$$

Тогда итерационный метод (23) - (25) запишется в виде $q^{(k+1)} = Tq^{(k)}$, $q^{(k)} = (\, u^{(k)},\, y^{(k)};\, \lambda^{(k)}\,)$, для $k = 0, 1, 2\ldots$, т.е. T — оператор перехода итерационного процесса.

Теорема 5 . *Множество седловых точек задачи (21) совпадает с множеством неподвижных точек оператора T.*

Таким образом, исследование сходимости метода (23) - (25) сводится к исследованию сходимости метода последовательных приближений для нахождения неподвижной точки оператора T.

Теорема 6 . *Пусть* $0 < \tau < 2\,d_0/(2\,d_0\,r + 1)$, $q^{(0)} \in Q$ *− произвольно заданный элемент. Определим последовательность* $\{q^{(k)}\}$ *по формуле* $q^{(k+1)} = Tq^{(k)}$ *для* $k = 0, 1, 2, \ldots$. *Тогда эта последовательность* $\{q^{(k)}\}$ *сходится слабо в* Q *при* $k \to +\infty$, *ее предел* q^* *является неподвижной точкой оператора* T, *и справедливы равенства*

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| q_2^{(k)} - \Lambda q_1^{(k)} \right\|_H = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \left\| q^{(k+1)} - q^{(k)} \right\|_Q = 0. \qquad (27)$$

Затем рассмотрен случай, когда оператор A_0 удовлетворяет более сильному условию, чем условие обратно сильной монотонности. Справедлива

Теорема 7 . *Пусть оператор* A_0 *сильно монотонен липшиц-непрерывен с константами* $\delta > 0$ *и* $\gamma > 0$ *соответственно:*

$$(A_0 u - A_0 \eta, u - \eta)_V \ge \delta \left\| u - \eta \right\|_V^2, \quad \left\| A_0 u - A_0 \eta \right\|_V \le \gamma \left\| u - \eta \right\|_V \quad \forall\, u, \eta \in V,$$

выполнено условие $\tau < 2\,\delta \,/\, \left(2\,\delta\, r + \gamma^2\right)$. *Тогда справедливы соотношения (27) и, кроме того,* $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\| q_1^{(k)} - u \right\|_V = 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\| q_2^{(k)} - \Lambda u \right\|_H = 0$, *где* u *− решение задачи (20).*

В § 4 **главы 3** метод расщепления (23) - (25) применен для решения рассматриваемых в главе 1 задач фильтрации. Для этих задач $\Lambda = \nabla$, а $\Lambda^* = -\mathrm{div}$.

1) Реализация (23) состоит в решении краевой задачи

$$\begin{gathered} -\Delta w = f - Au^{(k)} + \mathrm{div}\,(\lambda^{(k)} - rp^{(k)}) + r\,\Delta u^{(k)},\ x \in \Omega, \\ (w(x), \mathbf{n}) = 0,\ x \in \Gamma_1,\ w(x) = 0,\ x \in \Gamma_2, \end{gathered} \qquad (28)$$

после чего вычисляется $\qquad u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau\, w.$

2) Установлено, что функционал G_r^* является выпуклым и дифференцируемым по Гато, субдифференциал этого функционала состоит из единственного элемента, совпадающего с его градиентом, который определяется следующим образом: $(G_r^*)' z = g_r^*(|z|^2) z$, где

$$g_r^*(\xi^2)\xi = \begin{cases} \xi/r, & \xi \le r\,\beta, \\ \beta, & r\,\beta < \xi \le r\,\beta + \vartheta, \\ (\xi - \vartheta)/r, & \xi > r\,\beta + \vartheta. \end{cases}$$

Поэтому задача минимизации (24), в соответствии с рассуждениями, приведенными в § 2 главы 3, сводится к нахождению $y^{(k+1)}$ по явным формулам: $y^{(k+1)} = g_r^*(|q|^2)q, \quad q = r\,\Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)}$.

3) Вычисляем $\lambda^{(k+1)}$ по формуле $\quad \lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r\,\left(\nabla u^{(k+1)} - y^{(k+1)}\right)$.

Таким образом, каждый шаг итерационного метода расщепления сводится фактически к решению краевой задачи (28).

В **четвертой** главе приводятся результаты численных экспериментов для модельных задач фильтрации, полученные методом итеративной регуляризации и методом расщепления, проводится их анализ.

В § 1 проведено построение внутренних конечноэлементных аппроксимаций вариационных неравенств с пседомонотонными операторами применительно к рассматриваемым задачам фильтрации.

В § 2 **главы 4** приведены постановки некоторых задач об определении границ предельно равновесных целиков вязкопластичной нефти, для которых аналитическим способом определены характеристики точных решений — линии, на которых модуль градиента давления имеет постоянное значение β — предельному градиенту давления (границы целиков). Эти задачи рассматриваются при различных схемах расположения скважин.

Сначала рассматривается задача для бесконечной цепочки скважин с расходом q, расположенных на прямой на расстоянии $2\,\ell$ друг от друга, при этом:

1) функция $\xi \to g_\vartheta(\xi^2)\xi$ имеет следующий вид (**задача 1a**):

$$g_\vartheta(\xi^2)\xi = \begin{cases} \alpha\,\xi\,, & 0 \le \xi < \beta, \\ [\alpha\,\beta\,,\beta]\,, & \xi = \beta, \\ \xi, & \xi > \beta, \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$ и $\beta \ge 0$. Решение данной задачи зависит от безразмерного параметра $Q = q/(4\,\beta\,\ell)$, характеризующего скорость фильтрующейся жидкости на бесконечности. Изучаются два случая: $Q \le \alpha < 1$ и $Q \ge 1$;

2) функция $\xi \to g_\vartheta(\xi^2)\xi$ имеет следующий вид (**задача 1b**):

$$g_\vartheta(\xi^2)\xi = \begin{cases} 0\,, & 0 \le \xi < \beta, \\ [0\,,\beta]\,, & \xi = \beta, \\ \xi, & \xi > \beta. \end{cases} \tag{29}$$

Элемент течения (см. рис. 1) для этой задачи представляет собой полуполосу $\{0 \le x \le \ell, y \ge 0\}$ $(\ell = 0.1)$, которая при решении заменяется на конечную прямоугольную область. Скважина расположена в точке $(0,0)$.

Далее рассматривается задача при пятиточечной схеме расположения скважин с расходом q. Исследуется случай, когда функция $\xi \to g_\vartheta(\xi^2)\xi$ определена соотношением (29) (**задача 2b**). Элемент симметрии изображен на рис. 4, скважины расположены в точках $(0,0)$ и $(1,1)$.

В § 3 **главы 4** приведены результаты численных расчетов для описанных в § 2 главы 4 задач. Строятся триангуляции рассматриваемых расчетных областей Ω, которые получаются путем равномерного разбиения ее сторон на n_1 и n_2 частей, построения треугольников с диагоналями, параллельными биссектрисе первого и третьего координатного углов, и применения МКЭ с использованием кусочно-линейных на треугольниках функции.

На приводимых ниже рисунках сплошные линии — это границы целиков, построенные аналитическим способом по входным данным задачи Q, α и ℓ. Темным цветом выделено множество треугольников, на которых модуль градиента приближенного решения равен β (предельному градиенту давления).

На рис. 1 приведены результаты расчетов **задачи 1a** для цепочки скважин. Результаты получены методом итеративной регуляризации. Выбирались следующие значения параметров задачи: $q = 0.16, Q = 0.4, \alpha = 0.5, Q \leq \alpha$.

На рис. 2 приведены результаты расчетов **задачи 1a** для цепочки скважин при более интенсивном течении (при $Q \geq 1$). Результаты получены методом расщепления. Выбирались следующие значения параметров задачи: $q = 0.4304, Q = 1.076, \alpha = 0.5, Q \geq 1$.

На рис. 3 приведены результаты расчетов **задачи 1b** для цепочки скважин. Результаты получены методом итеративной регуляризации. Выбирались следующие значения параметров задачи: $q = 0.6, Q = 1.5, \alpha = 0, Q \geq 1$.

На рис. 4 приведены результаты расчетов **задачи 2b** для пятиточечной расстановки скважин. Результаты получены методом расщепления. Выбирались следующие значения параметров задачи: $q = 0.4, Q = 1, \alpha = 0$.

В § 4 **главы 4** приведены результаты численных расчетов для других законов фильтрации и областей.

На рис. 5 приведены результаты численных расчетов для задачи о бесконечной цепочке скважин, когда функция $\xi \to g_\vartheta(\xi^2)\xi$ имеет вид (**задача 3a**):

$$g_\vartheta(\xi^2)\xi = \begin{cases} 0\,, & 0 \leq \xi < \beta, \\ [0\,,\beta]\,, & \xi = \beta, \\ \sqrt{\xi - \beta} + \beta, & \xi > \beta. \end{cases}$$

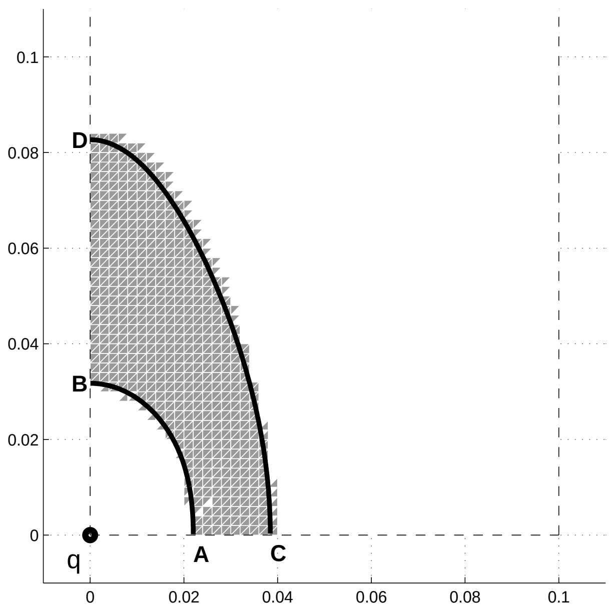

Рис. 1: Границы целика (**задача 1a**).

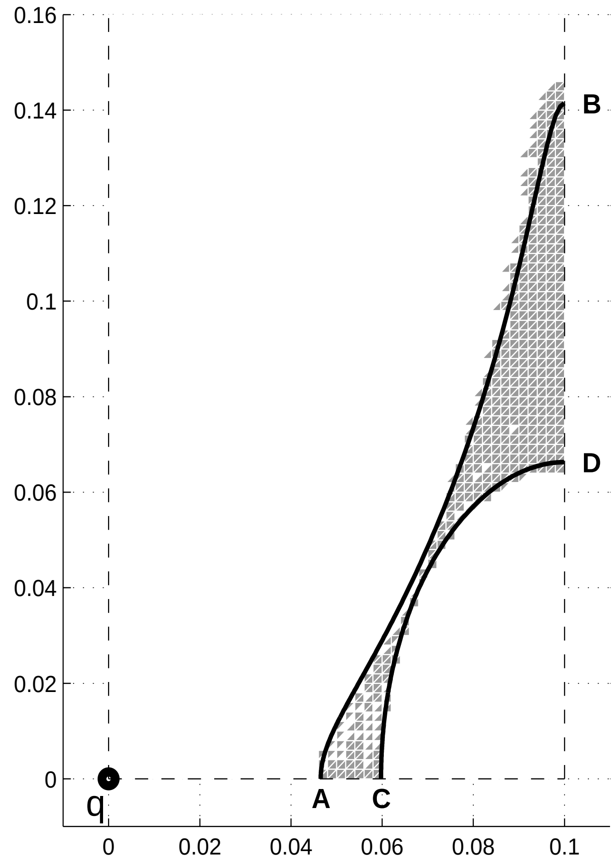

Рис. 2: Границы целика при $Q \geq 1$ (**задача 1a**).

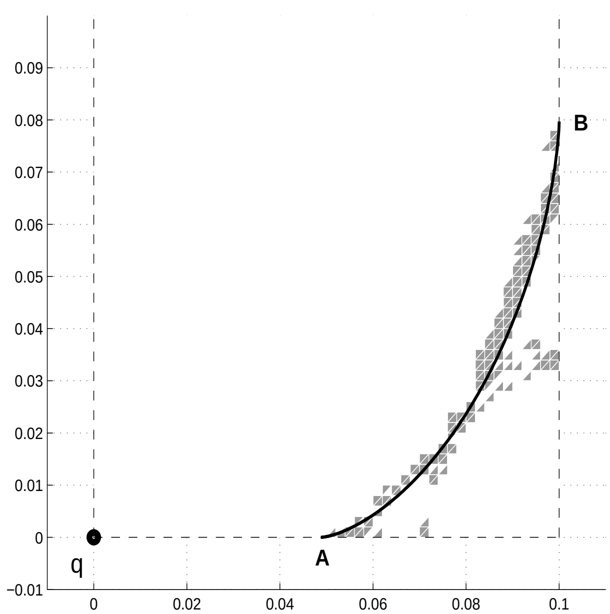

Рис. 3: Границы целика (**задача 1b**).

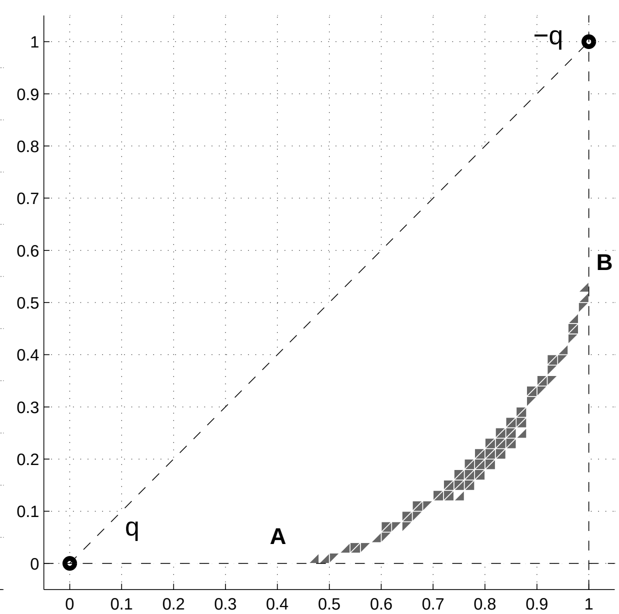

Рис. 4: Границы целика (**задача 2b**).

Для ее решения используется метод итеративной регуляризации. Темным цветом выделена граница застойной зоны, области, где жидкость не движется. Выбирались следующие значения параметров: $q = 0.6$, $Q = 1.5, \alpha = 0, Q \geq 1$.

Приведены также результаты численных расчетов для L - образной области (рис. 6), внутри которой располагаются две скважины с расходом $q = 1.5$: одна — эксплуатационная, другая — нагнетательная (**задача 3b**). Закон фильтрации определяется соотношением (29). Приведенные численные результаты показали эффективность предложенных методов решения стационарных задач фильтрации.

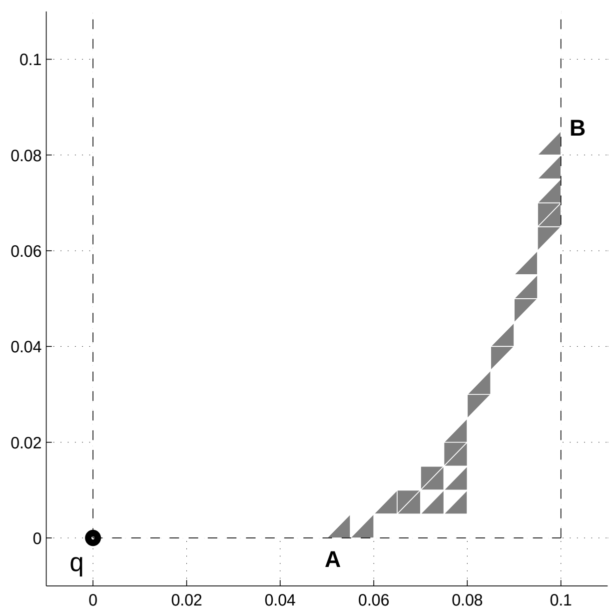

Рис. 5: Границы целика (**задача 3a**).

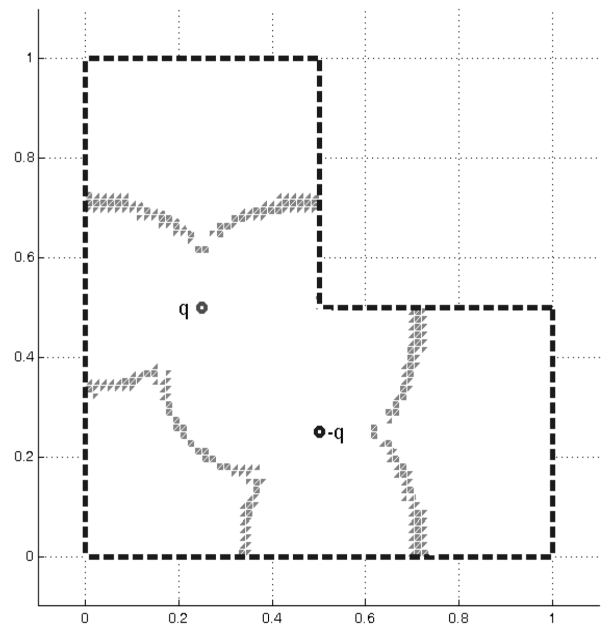

Рис. 6: Границы застойных зон (**задача 3b**).

Основные научные положения и результаты работы

1. Достаточные условия сходимости метода итеративной регуляризации решения вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами и выпуклыми недифференцируемыми функционалами на выпуклых замкнутых множествах в банаховых и гильбертовых пространствах.

2. Достаточные условия сходимости метода расщепления решения вариационных неравенств с обратно сильно монотонными, потенциальными операторами и выпуклыми недифференцируемыми функционалами в гильбертовых пространствах.

3. Результаты численных экспериментов по решению стационарных задач фильтрации с многозначным законом, подтвердившие эффективность предложенных итерационных методов.

Список публикаций по теме диссертации

1. Бадриев И.Б. Методы итеративной регуляризации для вариационных неравенств второго рода с псевдомонотонными операторами/ И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов, Л.Н. Исмагилов // Актуальные проблемы математического моделирования и информатики. Матер. научной конференции (г. Казань, 30.01.2002 - 06.02.2002 г.) - Казань: Издательство Казанского математического общества, - 2002. - С. 29-32.

2. Бадриев И.Б. О методах регуляризации для решения некоторых вариационных неравенств второго рода с псевдомонотонными операторами/ И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов, Л.Н. Исмагилов // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Матер. 4-го Всеросс. семинара. Казань: Изд-во Казанского математического общества. - 2002. - С. 23-28.

3. Бадриев И.Б. О численном решении некоторых нелинейных стационарных задач теории фильтрации/ И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов, Л.Н. Исмагилов // Современные методы теории краевых задач. Матер. Воронежской весенней матем. школы "Понтрягинские чтения - XIV". (3-9 мая 2003 г.) - Воронеж: Изд-во ВГУ. - 2003. - С. 11-12.

4. Badriev I.B. On the methods of iterative regularization for the variational inequalities of the second kind with pseudomonotone operators/ I.B. Badriev, O.A. Zadornov , L.N. Ismagilov// Computational Methods in Applied Mathematics. - 2003, - V. 3. - N. 2. - P. 223-234.

5. Бадриев И.Б. Численное исследование некоторых нелинейных стационарных задач теории фильтрации/ И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов, Л.Н. Исмагилов // Тезисы докладов Двенадцатой Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам, Владимир, 30 июня - 5 июля 2003 г. - М.: Изд-во МАИ. -2003. - С. 75 - 76.

6. Бадриев И.Б. Применение метода декомпозиции для численного решения некоторых нелинейных стационарных задач теории фильтрации/ И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов, Л.Н. Исмагилов // Исследования по прикладной математике и информатике. Вып. 24.-Казань: Изд-во КГУ. - 2003.- С. 12-24.

7. Бадриев И.Б. Численное решение задачи о целиках остаточной вязкопластичной нефти/ И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов, Л.Н. Исмагилов // Современные методы теории краевых задач. Матер. Воронежской весенней матем. школы "Понтрягинские чтения - XV". (3 - 9 мая 2004 г.) - Воронеж: Изд-во ВГУ. - 2004. - С. 20-21.

8. Бадриев И.Б. О численном решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации/ И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов, Л.Н. Исмагилов, А.Д. Ляшко // Труды международной конференции по вычислительной математике МКВМ-2004. Ч. I. Под ред. Г.А.Михайлова, В.П.Ильина, Ю.М. Лаевского. - Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. - С. 396-400.

9. Бадриев И.Б. Численное решение вариационных неравенств, возникающих при описании процессов фильтрации/ И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов, Л.Н. Исмагилов // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Матер. 5-го Всероссийского семинара. - Казань: КГУ. - 2004. - С. 24-25.

10. Бадриев И.Б. О численном решении некоторых задач фильтрации с предельным градиентом/ И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов, Л.Н. Исмагилов, Э.В. Скворцов // Труды Математического центра им. Н.И.Лобачевского. Т. 25. Матер. международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики". - Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2004. - С. 39-40.

11. Бадриев И.Б. Решение задач об определении предельно равновесных целиков остаточной вязко - пластической нефти/ И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов, Л.Н. Исмагилов, Э.В. Скворцов // Исследования по прикладной математике и информатике. Вып. 25. - Казань: КГУ. - 2004. - С.26-41.

Подписано в печать 18.05.2005. Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16
Гарнитура "Таймс". Печать ризографическая. Усл. печ. л. 1.16
Уч.-изд. л. 1.29. Тираж 100 экз. Заказ 5/46

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии издательского центра
Казанского государственного университета
420008, г. Казань, ул. Университетская, 17
Тел. (8432) 92-65-60