На правах рукописи

УДК 519.853

Фукин Игорь Анатольевич

АЛГОРИТМЫ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ В МЕТОДЕ ШТРАФОВ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА

01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2004

Работа выполнена на кафедре экономической кибернетики Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова – Ленина.»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Заботин Ярослав Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, Жадан Виталий Григорьевич

доктор технических наук, профессор Галиев Шамиль Ибрагимович

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится "___"___________ 2004 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета К-212.081.07 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Казанском государственном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлевская,18, корпус ___ , ауд.___).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "___"___________ 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доцент Агачев Ю.Р.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

На данный момент актуальной является разработка алгоритмов, позволяющих находить приближенное решение нелинейных оптимизационных задач

$$f(x) \to \min, \tag{1}$$

$$f_i(x) \leq 0, \; i \in I \tag{2}$$

с заданной по $f(x)$ точностью. Одной из сновных проблем, с которой сталкиваются вычислители при решении задачи (1)-(2) заключается в том, что даже наличие теоретического критерия оптимальности в известных на данный момент методах оптимизации не всегда помогает в вычислениях, поскольку условия этого критерия выполняются только в оптимальной точке, которую можно получить в общем случае лишь в результате бесконечного итерационного процесса. Поэтому, при решении задач математического программирования, зачастую, приходится пользоваться эвристическими правилами остановки, не гарантирующими необходимый уровень точности.

В данной диссертации разработаны алгоритмы в методе штрафов, позволяющие решать задачу выпуклого программирования (1)-(2) с заданной по целевому функционалу точностью за конечное число итераций. Эти алгоритмы имеют легко проверяемые на практике критерии остановки, при выполнении условий которых гарантируется допустимость и заданная точность полученного решения.

Существенный вклад в исследование вопросов построения алгоритмов и получения условий достижения точного или приближенного решения задачи (1)-(2) в методе штрафных функций в разное время внесли такие отечественные ученые, как Васильев Ф.П., Гольштейн Е.Г., Евтушенко Ю.Г., Еремин И.И., Жадан В.Г., Поляк Б.Т. Скарин В.Д., Федоров В.В., и другие.

Целью работы является разработка алгоритмов в методе штрафных функций, гарантирующих заданную точность приближенного решения задачи (1)-(2) за конечное число итераций. Основным инструментом при построении алгоритмов является аппроксимация допустимого множества решений.

Методы исследования. При формулировке и доказательстве результатов используется теория выпуклого анализа и математического программирования. Достоверность результатов подтверждается приведенными доказательствами всех лемм и теорем, сформулированных в работе.

Научная новизна. В методе штрафных функций разработаны и обоснованы новые алгоритмы. Использование в этих алгоритмах аппроксимации допустимого множества позволило получить легко проверяемые на практике условия остановки, выполнение которых гарантирует заданную точность полученного решения. Разработаны также практически реализуемые правила задания управляющих параметров, при использовании которых выполнение условий остановки в алгоритмах заданной точности выполняется не более, чем за требуемое число этапов минимизации вспомогательной функции метода штрафов.

Таким образом, на защиту выносятся следующие, полученные автором результаты:

1. Принципы построения алгоритмов в методе штрафных функций на основе использования множеств, аппроксимирующих множество допустимых решений.

2. Построенные на этом принципе алгоритмы в методе штрафов, имеют критерии остановки вычислений, легко проверяемые на практике, выполняемые за конечное число итераций и гарантирующие, что получено решение, удовлетворяющее заданной точности.

3. Алгоритмы в методе штрафов, позволяющие получить решение с заданной по функционалу точностью задачи (1)-(2) не более чем за заданное количество итераций.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенные и обоснованные в диссертации алгоритмы гарантируют получение приближенного решения с заданной точностью задачи (1)-(2) при выполнении практически реализуемых и легко проверяемых критериев остановки за конечное число итераций. Это свойство алгоритмов позволяет эффективно применять их для решения практических задач.

Видимо, предложенный прием аппроксимации допустимого множества может быть использован также и в алгоритмах со штрафными функциями, отличными от тех, что использовались в данной работе.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Всероссийских научных конференциях "Алгоритмический анализ неустойчивых задач"(Екатеринбург, 26 февраля - 2 марта 2001 года и 2-6 февраля 2004 года), на XII весенней математической школе "Понтрягинские чтения"(Воронеж, 3-9 мая 2001 года), международном семинаре, посвященном 90-летию со дня рождения С.Н.Черникова (Екатеринбург, 1-5 июня 2002 года), на российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций"(24-28 июня 2002 года), на XII международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики"(Казань, 27-31 мая 2002 года), Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения"(Омск, 1-5 июля 2003), XII Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения"(Екатеринбург, 24-28 февраля 2003 года), научной конференции "Актуальные проблемы математического моделирования и информатики"(Казань, 30 января-6 февраля 2003 года), на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета и научных семинарах кафедры экономической кибернетики Казанского государственного университета за 2000 - 2003 годы.

Публикации. Основные результаты изложены в 16 работах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Библиография включает 143 наименования. Общий объем диссертации составляет 123 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность задачи построения алгоритмов в методе штрафов с аппроксимацией множества допустимых решений, приведен обзор основных существующих на данный момент подходов, применяемых в методах последовательной безусловной минимизации для получения решения с заданной точностью задачи (1)-(2), описана структура диссертации и кратко изложено содержание работы.

Первая глава «Аппроксимация допустимого множества» посвящена оценке близости решений исходной задачи и вспомогательной, построенной при помощи штрафных функций множества, аппроксимирующего допустимое. Глава состоит из трех параграфов.

Параграф 1.1 носит компилятивный характер. Здесь ставится задача, определяются основные понятия и приводятся некоторые результаты из анализа и теории оптимизации, на которые далее в работе делаются неоднократные ссылки.

Пусть функции $f(x), f_i(x)$, для $i \in I = \{1, 2 \dots m\}$ определены, непрерывны и выпуклы в n-мерном евклидовом пространстве R_n. Для любого числа p определим множество $D(p) = \{x \in R_n, g(x) + p \leq 0\}$, где $g(x) = \max\{f_i(x), i \in I\}$. Считается, что минимум функции $f(x)$ на множестве $D(0)$ достигается, то есть множество $X^* = \mathrm{Argmin}\{f(x), x \in R_n\}$ не пусто. Положим

$$f^* = \min\{f(x), x \in D(0)\}. \tag{3}$$

Требуется по заданному числу $\varepsilon > 0$ найти точку $x' \in X_\varepsilon^* = \{x \in D(0) : f(x) - f^* \leq \varepsilon\}$. Точку x' будем называть ε- решением задачи отыскания (3). Считается, что множество $D(0)$ удовлетворяет условию Слейтера, то есть $\{x \in R, g(x) < 0\} \neq \varnothing$.

Определение 1. Множество A будем называть погруженным в B, если множество B является окрестностью A, то есть B содержит открытое множество, содержащее A.

Очевидно, множество $D(p)$ погружено в $D(0)$ при $p > 0$.

Пусть выпуклая функция штрафа $V(x) = 0$ при $x \in D(p)$ и $V(x) > 0$ при $x \notin D(p)$, $p > 0$. Обозначим $A(\alpha) = \{x \in R_n : V(x) \leq \alpha,\ \alpha > 0\}$. Если $\overline{\alpha} = \max\{\alpha : A(\alpha) \subset D(0)\}$, то $D(0)$ является окрестностью множества $A(\gamma\overline{\alpha})$ при $\gamma \in [0, 1)$.

Определение 2. Множество $A(\gamma\overline{\alpha}), \gamma \in [0, 1)$ будем называть аппроксимацией допустимого множества.

Вводится определение ρ - аппроксимируемости функции, несколько обобщающее известное понятие ρ - регулярности ограничений задачи математического программирования. В этом определении будем считать, что функция $\varphi(x)$ определена в R_n, число λ таково, что

$$M(\lambda) = \{x : x \in R_n, \varphi(x) \leq \lambda\} \neq \varnothing,$$

G - заданное в R_n множество, $M(\lambda) \cap G \neq \varnothing$ и $\rho(x, M(\lambda)) = \inf\limits_{x \in M(\lambda)} \|x - y\|$.

Определение 3. Функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \forall x \in M(\lambda) \cap G, \\ \beta\rho(x, M(\lambda)) + \lambda & \forall x \in G \setminus M(\lambda), \beta > 0 \end{cases} \tag{4}$$

будем называть (ρ, β, λ)-аппроксимирующей снизу заданную функцию $\varphi(x)$, а функцию $\varphi(x)$ - (ρ, β, λ)-аппроксимируемой снизу на множестве G, если

$$\psi(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in G. \tag{5}$$

В этом же параграфе приведены достаточные условия ρ-аппроксимируемости снизу выпуклой функции, более слабые и универсальные, чем подобные условия для понятия ρ-регулярности ограничений. В частности, в определении 3 множество G может быть неограниченным. Это обстоятельство, например, позволило существенно расширить круг исследуемых задач.

Параграф 1.3 посвящен оценке величины $|f(x(C)) - f^*|$, где $x(C)$ - точка безусловного минимума вспомогательной функции $F(x, C) = f(x) + CV(x)$. Доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $p > 0$ такое, что неравенство

$$|f(x(C)) - f^*| \leq \varepsilon \tag{6}$$

выполняется при всех $C > 0$ таких, что $x(C) \in D(0)$. Для оценки подобного $p = p(\varepsilon)$ накладываются следующие дополнительные условия.

Условие a) Функция $g(x)$ является равномерно выпуклой на множестве $D(0)$ с неубывающим модулем выпуклости $\delta(t)$.

Условие b) Существуют числа $p' \in (0, \overline{p})$, где $\overline{p} \in (0, -\inf\{g(x), x \in R_n\})$, и $\overline{f} > \min\limits_{x \in D(p')} f(x)$ такие, что множество $D(p') \cap Q(\overline{f})$ ограничено, где $Q(t) = \{x \in R_n : f(x) \leq t\}$.

Условие c) Существует число $\hat{p} \in (0, -\inf\{g(x), x \in R_n\})$ такое, что функция цели $f(x)$ удовлетворяет на множестве $D(0) \cap Q(f_{\hat{p}})$ условию Липшица с константой L, где $f_{\hat{p}} = \min\limits_{x \in D(\hat{p})} f(x)$.

Доказано, что для выполнения условия b) необходимо и достаточно, чтобы множество решений задачи (1)-(2) было ограниченным.

Лемма 1. Пусть выполнено условие b). Тогда для числа p' найдется $\beta = \beta(p') > 0$ такое, что функция $g(x)$ будет $(\rho, \beta, -p)$-аппроксимируемой снизу на множестве $Q(\overline{f})$ при всех $p \leq p'$.

Всюду далее $\beta > 0$ - параметр, при котором функция $g(x)$ является $(\rho, \beta, -p)$ аппроксимируемой снизу на множестве $Q(\overline{f})$.

Получены оценки параметра p.

Теорема 1. Пусть выполняются условия a) и c), число $p \in (0, \min\{\delta(\varepsilon/L), \hat{p}\})$. Тогда $|f(\bar{x}) - f^*| \leq \varepsilon$, для любой точки $\bar{x} \in Q$, где $Q = \{x \in R_n : f(x) \leq \min\limits_{x \in D(p)} f(x)\} \cap D(0)$.

Следствие. Если для некоторого $C > 0$ выполняется $x(C) \in D(0)$, то $|f(x(C)) - f^*| \leq \varepsilon$.

Замечание. В теореме оценка решения не зависит от способа нахождения $\bar{x} \in Q$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия b) и c), число $p \in (0, \min\{\frac{\varepsilon\beta}{L}, p', \hat{p}\}]$. Тогда любая точка $x(C) \in D(0)$ является ε - решением задачи (1)-(2).

Оценку штрафного параметра $C > 0$ сверху дают следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть выполняются условия a) и c), функции $f(x), V(x)$ - дифференцируемы, существует $\delta^{-1}(\cdot)$ - функция, обратная к модулю выпуклости $\delta(t)$ и $0 < p \leq \hat{p}$. Тогда неравенство

$$C \leq \frac{L\delta^{-1}(p)}{V(x(C))}. \tag{7}$$

выполняется для всех $C > 0$ таких, что $x(C) \in D(0)$.

Следствие. Включение $x(C) \in D(0)$ выполняется при всех $C \geq \geq \frac{L\delta^{-1}(p)}{\overline{\alpha}}$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия b) и c), функции $f(x), V(x)$ - дифференцируемы, $0 < p \leq \min\{p', \hat{p}\}$. Тогда неравенство

$$C \leq \frac{Lp}{V(x(C))\beta}. \tag{8}$$

выполняется для всех $C > 0$ таких, что $x(C) \in D(0)$.

Следствие. Включение $x(C) \in D(0)$ выполняется при всех $C \geq \frac{Lp}{\overline{\alpha}\beta}$.

Теоремы 1 и 2 дают легко проверяемый критерий остановки в методе штрафов, а следствия к теоремам 3 и 4 указывают значение штрафного параметра $C > 0$, при котором условие критерия выполняется.

Далее даны оценки величины $\min\{f(x), x \in A(\gamma\overline{\alpha})\} - f^*$ и параметров p и γ, при которых неравенство (6) выполняется при всех $C > 0$ таких, что $x(C) \in D(0) \setminus A(\gamma\overline{\alpha})$.

В диссертации также использованы штрафные функции $V_\gamma(x) = = (V(x) - \gamma\overline{\alpha})^s_+, \ s > 1, \ t_+ = max\{0, t\}$, построенные по аппроксимации допустимого множества. То есть $V_\gamma(x) = 0$ при $x \in A(\gamma\overline{\alpha})$, $V_\gamma(x) > 0$ при $x \notin A(\gamma\overline{\alpha})$. Оценены значения параметров p и γ, при которых включение точки безусловного минимума $x_\gamma(C)$ вспомогательной функции $F_\gamma(x, C) = f(x) + CV_\gamma(x)$ в $D(0)$ обеспечивает ее ε-оптимальность.

Оценено значение штрафного параметра $C > 0$, при котором включение $x_\gamma(C) \in D(0)$ достигается.

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда при

$$C \geq \frac{L\delta^{-1}(p)}{s(1-\gamma)^{s-1}\overline{\alpha}^s} \tag{9}$$

выполняется включение $x_\gamma(C) \in A(\overline{\alpha})$.

Теорема 5. Пусть выполняются условия теоремы 4. Тогда при

$$C \geq \frac{Lp}{\beta s(1-\gamma)^{s-1}\overline{\alpha}^s} \tag{10}$$

выполняется включение $x_\gamma(C) \in A(\overline{\alpha})$.

Во второй главе построены алгоритмы решения с заданной точностью задачи выпуклого программирования (1)-(2).

В параграфе 2.1 приведена следующая вычислительная

Общая схема. Задается требуемая точность решения ε. Выбирается $C_0 > 0, r > 1$, число $p > 0$ такое, что $|f(x(C)) - f^*| \leq \varepsilon$, при всех $x(C) \in D(0)$. Полагается $k = 0$.

1. Выбирается метод A_k безусловной минимизации, обеспечивающий нахождение минимума функции $F(x, C_k)$.

2. Методом A_k находим точку $x(C_k) \in \text{Argmin}\{F(x, C_k), x \in R_n\}$.

3. Если $x(C_k) \in D(0)$, то процесс окончен и $x(C_k)$ является ε- решением задачи (1)-(2).

4. Выбираем $C_{k+1} \geq rC_k$.

5. Переходим к пункту 1 при k, замененном на $k+1$.

Доказано, что условие пункта 3 общей схемы выполнится за конечное число итераций. При этом, полученная точка гарантированно будет ε-решением задачи (1)-(2).

На основе этой схемы обоснована сходимость двух алгоритмов, предназначенных для решения с заданной точностью задач, удовлетворяющих либо условиям теоремы 3, либо теоремы 4.

Приведем здесь, для примера, алгоритм, сходящийся за конечное число итераций к ε-решению задачи (1)-(2) при выполнении условий теоремы 4.

Алгоритм 1. Задается требуемая точность решения ε. Выбираются числа $p \in (0, \min\{\frac{\varepsilon\beta}{L}, p', \hat{p}\})$ и натуральное число N. Задается точка $x_0 \in R_n$ и возрастающая функция $\varphi(\cdot)$ такая, что $\varphi(N) \geq \frac{Lp}{\overline{\alpha}\beta}$, $\varphi(1) > 0$. Полагается $k = 1$.

1. Вычисляется $C_k = \varphi(k)$.

2. Выбирается метод A_k, обеспечивающий нахождение безусловного минимума функции $F(x, C_k)$.

3. Методом A_k находим точку $x_k = x(C_k)$.

4.Если $x_k \in D(0)$, то процесс окончен и x_k является ε- решением задачи (1)-(2). Иначе переходим к пункту 1 при k, замененном на $k+1$.

В этом алгоритме на итерации с номером $k \geq 1$ штрафной параметр C_k задается по формуле $C_k = \varphi(k)$, где $\varphi(k)$ - положительная возрастающая функция. Если $\overline{C}$ - величина штрафного параметра, обеспечивающего включение $x(\overline{C}) \in D(0)$, то при выборе функции $\varphi(k)$ таким образом, что $\varphi(1) \geq \overline{C}$, приближенное решение с заданной точностью можно получить за один этап минимизации вспомогательной функции $F(x, C_1)$. Однако, для расчета величины $\overline{C}$ в параграфе 1.3 используются оценки константы Липшица, модуля равномерной выпуклости и параметра ρ-аппроксимируемости, вследствие чего она может быть сильно завышена.

Использовать завышенное значение $\overline{C}$ следует лишь в крайнем случае, так как увеличение параметра C ведет к ухудшению дифференциальных свойств вспомогательной функции. Но включение $x(C) \in D(0)$ будет достигаться и при $C < \overline{C}$. Поэтому целесообразно увеличивать штрафной коэффициент постепенно так, чтобы через заданное количество итераций N>0 алгоритма он достиг величины $\overline{C}$. В этом случае остановка счета произойдет, скорее всего, по критерию попадания точки минимума вспомогательной функции в разность допустимого множества и его аппроксимации.

В предлагаемых алгоритмах выбирается такая положительная возрастающая функция $\varphi(k)$, что $\varphi(N) \geq \overline{C}$. Поэтому последовательности $\{x_k\}$, построенные по этим алгоритмам, сходятся к допустимому ε-оптимальному решению не более, чем за заданное число N итераций.

В следующем параграфе приводятся алгоритмы с применением штрафных функций, построенных по аппроксимации допустимого множества. Вычисления останавливаются при выполнении условия

$$x_\gamma(C) \in D(0). \tag{11}$$

Как и в параграфе 2.1, штрафной параметр изменяется в зависимости от номера итерации k по такому правилу $\varphi(k)$, что $\varphi(N) \geq \overline{C}$, где $\overline{C}$ - значение штрафного коэффициента, при котором гарантируется включение (11), N - верхняя граница числа итераций, за которое требуется найти допустимое ε-оптимальное решение задачи (1)-(2).

Параграф 2.3 посвящен разработке алгоритмов, осуществляющих двустороннее приближение к решению задачи (1)-(2): изнутри множества $A(\gamma\overline{\alpha})$ и снаружи $D(0)$.

Приведем алгоритм, сходящийся за конечное число итераций к ε-решению задачи (1)-(2) при выполнении условий теоремы 3 и предположении, что $D(0) \cap \operatorname{Argmin}\{f(x), x \in R_n\} = \varnothing$.

Алгоритм 2. Подготовительный шаг. Задается требуемая точность решения ε. Выбираются числа $0 < \gamma < 1,\ 0 < p \leq \min\{\delta(\frac{\varepsilon\gamma\overline{\alpha}}{L(V(x^*)-\gamma\overline{\alpha})}), \hat{p}\}$, $\overline{C}_0 \geq \frac{L\delta^{-1}(p)}{\gamma\overline{\alpha}},\ \underline{C}_0 = 0, 0 < \underline{\lambda} \leq \overline{\lambda} < 1$. Полагаем $k = 0$.

1. Находим $C_k = \lambda_k\overline{C}_k + (1-\lambda_k)\underline{C}_k$, где $\underline{\lambda} \leq \lambda_k \leq \overline{\lambda}$.

2. Выбирается метод A_k безусловной минимизации, обеспечивающий нахождение минимума функции $F(x, C_k)$.

3. Методом A_k отыскиваем $x(C_k) \in X(C_k)$.

4. Если $x(C_k) \in D(0) \setminus A(\gamma\overline{\alpha})$, то процесс окончен и $x(C_k)$ является ε-решением задачи (1)-(2).

5. Если $x(C_k) \in A(\gamma\overline{\alpha})$, то полагаем $\overline{C}_{k+1} = C_k, \underline{C}_{k+1} = \underline{C}_k$.
Иначе $\overline{C}_{k+1} = \overline{C}_k, \underline{C}_{k+1} = C_k$.

6. Переходим к пункту 1 при k, замененном на k+1.

Разработан также подобный алгоритм, применимый при выполнении условия $b)$ вместо условия $a)$.

На подготовительном этапе этих алгоритмов выбираются параметры $\underline{C}_0$ и $\overline{C}_0$ таким образом, что $x(\underline{C}_0) \notin D(0)$, $x(\overline{C}_0) \in A(\gamma\overline{\alpha})$. Согласно оценкам параграфа 1.3, величина $\overline{C}_0$ достаточно велика и вспомогательная функция $F(x, \overline{C}_0)$ будет очень овражной. Поэтому предложены также алгоритмы с постепенным увеличением C до тех пор, пока не выполнится включение $x(C) \in D(0)$. Если окажется, что $x(C) \notin A(\gamma\overline{\alpha})$, то $x(C)$ - искомая точка. В противном случае текущее значение параметра C принимается за $\overline{C}_0$, предыдущее значение C, при котором $x(C) \notin D(0)$ принимается за $\underline{C}_0$ и начинается двустороннее приближение к множеству $D(0) \setminus A(\gamma\overline{\alpha})$.

Для штрафных функций

$$V(x) = W(g(x) + p), \tag{12}$$

где $W(t)$ - возрастающая по t функция и $W(t) = 0$ при $t \leq 0$, $W(t) > 0$

при $t > 0$ доказано, что из равенства $g(x(C)) = 0$ следует оптимальность точки $x(C)$. Предложен следующий алгоритм решения задачи (1)-(2), не использующий оценок главы 1.

Алгоритм 3. Подготовительный шаг. Выбираем $p > 0, \overline{C}_0, \underline{C}_0 > 0$ такие, что $x(\overline{C}_0) \in D(0), x(\underline{C}_0) \notin D(0), 0 < \underline{\lambda} \leq \overline{\lambda} < 1, k = 0$.

1. Если $|f(x(\overline{C}_k)) - f(x(\underline{C}_k))| \leq \varepsilon$, то процесс окончен и $x(\overline{C}_k)$ является ε - решением задачи (3).

2. Находим $C_k = \lambda_k \overline{C}_k + (1 - \lambda_k)\underline{C}_k$, где $\underline{\lambda} \leq \lambda_k \leq \overline{\lambda}$.

3. Если $x(C_k) \in D(0)$, то $\overline{C}_{k+1} = C_k, \underline{C}_{k+1} = \underline{C}_k$.
Иначе $\overline{C}_{k+1} = \overline{C}_k, \underline{C}_{k+1} = C_k$.

4. Переходим к п.1 при k, замененном на $k + 1$.

Алгоритм 3 осуществляет двусторонние, изнутри множества $D(0)$ и снаружи, приближения к границе $D(0)$. Доказано, что условия пункта 1 выполнятся через конечное число итераций.

Предложенные в параграфах 2.1 - 2.3 алгоритмы являются принципиальными, так как нахождение даже одной точки $x(C)$, в общем случае, процесс бесконечный. Поэтому в параграфе 2.4 предлагаются следующие алгоритмы, допускающие неполную минимизацию вспомогательных функций.

Алгоритм 4 . Задается требуемая точность решения $\varepsilon > 0, x_0 \in R_n$, натуральное число N, число $\delta \in (0, \varepsilon)$. Выбирается $0 < p \leq$ $\leq \min\{\frac{\beta}{2L}(\varepsilon - \delta), p', \hat{p}\}$, возрастающая функция $\varphi(\cdot)$ такая, что $\varphi(1) \geq 0$, $\varphi(N) = \frac{Lp}{\overline{\alpha}\beta}$. Полагается $k = 1$.

1.Вычисляется $C_k = \varphi(k)$.

2. Если $k < N$, то находится приближенное решение задачи нахождения $\min\{F(x, C_k), x \in R_n\}$. Переход к шагу 1 при k, замененном на k+1.

3.Если $k = N$, то находится точка $x_N \in A(\overline{\alpha})$, являющаяся δ-оптимальным по функционалу решением задачи $\min\limits_{x \in R_n} F(x, C_N)$. Точка x_N принимается в качестве ε - решения задачи (1)-(2).

Данный алгоритм позволяет найти ε - решение задачи (1)-(2) при выполнении условий теоремы 4. Подобный алгоритм предложен при выполнении условия a) вместо b).

Следующий алгоритм использует штрафные функции, построенные по аппроксимации допустимого множества.

Алгоритм 5. Задается требуемая точность решения $\varepsilon > 0, x_0 \in R_n$, числа $\delta \in (0, \varepsilon)$, $\gamma \in (0,1)$, натуральное число N. Выбирается $0 < p \leq$ $\leq \min\{\frac{\beta\gamma\overline{\alpha}s(\varepsilon-\delta)}{L(sV(x^*)-\gamma\overline{\alpha}(s-1+\gamma))}, p', \hat{p}\}$, где $x^* \in X^*$, возрастающая функция $\varphi(\cdot)$ такая, что $\varphi(1) \geq 0, \varphi(N) = \frac{Lp}{\beta s(1-\gamma)^{s-1}\overline{\alpha}^s}$. Выбирается функция штрафа $V_\gamma(x) = (V(x) - \gamma\overline{\alpha})_+^s$ при $s > 1$. Полагается $k = 1$.

1.Вычисляется $C_k = \varphi(k)$.

2. Если $k < N$, то находится приближенное решение задачи нахождения $\min\{F(x, C_k), x \in R_n\}$. Переход к шагу 1 при k, замененном на k+1.

3.Если $k = N$, то находится точка $x_N \in A(\overline{\alpha})$, являющаяся δ-оптимальным по функционалу решением задачи $\min\limits_{x \in R_n} F_\gamma(x, C_N)$. Точка x_N принимается в качестве ε - решения задачи (3).

Таким образом, алгоритмы 4 и 5 позволяют найти ε - решение задачи (1)-(2) за заданное число N итераций.

В алгоритмах 4 и 5 не задается точность решения вспомогательных задач при номерах итерации $k < N$, так как расположение точки x_N не зависит от x_{N-1} и, тем более, от x_k при $k < N - 1$. Решение вспомогательных задач в пунктах 2 этих алгоритмов необходимо лишь для постепенного приближения к точке x_N.

В главе 3 «Реализация алгоритмов и анализ вычислительных экспериментов» для проверки работоспособности и эффективности предложенных алгоритмов проводится их анализ на основе вычислительного эксперимента.

В первом параграфе уточняются некоторые аспекты реализации алгоритмов на ЭВМ. Здесь обсуждается выбор функции $\varphi(k)$, задающей штрафной параметр C_k в зависимости от номера итерации k, доказываются практически применимые оценки величин $\overline{\alpha}$ и $V(x^*)$, конкретизируются оценки значений p и $\varphi(N)$, используемых в алгоритмах.

В данном параграфе диссертации также предлагается такой способ изменения штрафного коэффициента в алгоритмах с двусторонним приближением, что их можно трактовать как алгоритмы решения уравнения $V(x(C)) = \frac{1+\gamma}{2}\overline{\alpha}$ с точностью $\frac{1-\gamma}{2}\overline{\alpha}$ по функционалу $V(x)$.

Алгоритмы с неполной минимизацией вспомогательной функции несколько модифицированы для гарантии выполнения критерия остановки за конечное число шагов процесса минимизации N-ой вспомогательной функции.

В следующем параграфе приводятся некоторые из тех задач, что использовались в эксперименте. Объясняются способы получения априорной информации о задачах, на основании которой в алгоритмах задаются параметры построения множеств $D(p)$ и $A(\gamma\overline{\alpha})$, штрафных функций и функции $\varphi(k)$.

Анализ результатов решения с заданной точностью этих задач разработанными алгоритмами приводится в последнем параграфе главы 3. Для этого вычислительный эксперимент проводился для различных значений заданной точности $\varepsilon > 0$, заданной верхней границы числа итераций N, параметра γ. Результаты вычислений сравнивались между собой и с классическим методом штрафных функций. Для остановки вычислительного процесса, проводимого по методу штрафов, использовался эвристический критерий - вычисления прекращались, если при некотором номере $k \geq 0$ имело место неравенство $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \varepsilon$.

По результатам исследования сделаны следующие выводы.

1. При решении задач выпуклого программирования предложенными алгоритмами заданная точность достигается при выполнении условий простого, легко проверяемого на практике критерия остановки. В то же время, при решении тех же задач методом штрафов с эвристическим правилом остановки требуемая точность достигалась лишь в двух случаях из трех.

2. При решении задач алгоритмами с неполной минимизацией вспомогательной функции заданная точность достигается за заданное число N итераций алгоритма.

3. В алгоритмах, предложенных в параграфах 2.1-2.2 диссертации выполнение критерия остановки происходило не более, чем через заданное число N итераций. Вычисления зачастую останавливались менее, чем через N итераций, что говорит о целесообразности использования разработанного в диссертации критерия остановки (включение итерационной точки в $D(0)$).

4. В отличие от метода штрафных функций предложенные алгоритмы дают допустимое решение.

5. Вычислительные затраты (число вычислений вспомогательной функции и ее градиента) предложенных алгоритмов сопоставимы, а зачастую и намного меньше, чем в методе внешних штрафов.

6. В алгоритмах, предложенных в параграфах 2.1-2.3 диссертации вычислительные затраты на решение задачи велики при очень больших,

либо очень малых N. В эксперименте лучшим для большинства задач оказывался выбор $5 \le N \le 10$.

7. В алгоритмах, использующих аппроксимацию допустимого множества, величина $\gamma \in (0,1)$ слабо влияет на число вычислений вспомогательной функции и градиента.

8. Показатели точности, трудоемкости и скорости вычислений алгоритмов с использованием множества $D(p)$ примерно равны таким же показателям алгоритмов с аппроксимацией $A(\gamma\overline{\alpha})$ допустимого множества.

Указанные выводы подтверждают эффективность использования алгоритмов, предложенных в диссертации, для решения практических задач.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложен принцип аппроксимации допустимого множества, позволяющий строить алгоритмы заданной точности в методе штрафных функций.

2. На основании этого принципа построены новые практически реализуемые алгоритмы в методе штрафных функций, гарантирующие нахождение приближенного решения задачи выпуклого программирования с заданной точностью.

3. Введено понятие ρ-аппроксимируемости функции снизу, эффективно использованное для оценок параметров алгоритмов. Получены достаточные условия ρ-аппроксимируемости снизу выпуклых функций.

4. Построены алгоритмы в методе штрафов, позволяющие получить решение с заданной по функционалу точностью задачи выпуклого программирования не более чем за заданное количество итераций.

5. Показано, что предложенный принцип аппроксимации допустимого множества действительно обеспечивает заданную точность, тогда как в различных тестовых задачах, как оказалось, заданная точность при других критериях остановки не всегда достигается.

ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Заботин Я.И. Об одной модификации метода сдвига штрафов для задач нелинейного программирования /Я.И. Заботин, И.А. Фукин//Изв. вузов. Матем. - 2000. - №12. - С.49–54.

2. Заботин Я.И. Критерий останова в методе штрафов /Я.И. Заботин, И.А. Фукин// Современные методы в теории краевых задач "Понтрягинские чтения".Тезисы докладов. - Воронеж, ВГУ, 2001, - С. 72.

3. Заботин Я.И. Модификация метода сдвига штрафов /Я.И. Заботин, И.А. Фукин// Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. Докл. Всерос. Науч. Конф., Екатеринбург, 26 февр.- 2 марта 2001 года. Екатеринбург:Изд-во Урал.ун-та, 2001. - С. 217–218.

4. Заботин Я.И. Алгоритм метода штрафов с аппроксимацией допустимого множества /Я.И. Заботин, И.А. Фукин//"Понтрягинские чтения - XIII". Сборник материалов - Воронеж, ВГУ, 2002. - С. 58–59.

5. Заботин Я.И. Алгоритм с погружением в допустимое множество /Я.И. Заботин, И.А. Фукин//Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XIII международной конференции (Казань, 27-31 мая 2002 г.), Часть I / Под редакцией О.Б.Лупанова. - М.:Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2002. - С. 66.

6. Заботин Я.И. Критерий остановки, гарантирующий заданную точность в методе штрафов /Я.И. Заботин, И.А. Фукин// Материалы российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций", 24-28 июня 2002 г. - Новосибирск, 2002. - С. 164.

7. Заботин Я.И. Конечные алгоритмы в методе штрафных функций с погружением в допустимое множество /Я.И. Заботин, И.А. Фукин// Актуальные проблемы математического моделирования и информатики (математическая научная конференция. Казань. 30 января 2002 г. - 6 февраля 2002 г.) Изд. Казанского математического общества. Казань, 2002. - С. 43–45.

8. Заботин Я.И. Алгоритмы с неполной минимизацией вспомогательных функций в методе штрафов /Я.И. Заботин, И.А. Фукин// Всероссийская конференция "Проблемы оптимизации и экономические приложения": Материалы конференции (Омск, 1-5 июля 2003) / Омский филиал Института математики СО РАН. - Омск: Изд-во Наследие. Диалог Сибирь, 2003. - С. 121.

9. Заботин Я.И. Аппроксимация допустимого множества в методе штрафов /Я.И. Заботин, И.А. Фукин// Информационный бюллетень ассоциации математического программирования. №10. Научное издание. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. - с.110–111.

10. Заботин Я.И. Алгоритмы в методе штрафов с аппроксимацией допустимого множества /Я.И. Заботин, И.А. Фукин// Изв.вузов.Матем. - 2004. - №1. - С.36–47.

11. Фукин И.А. Метод сдвига штрафов в решении задач экономического планирования /И.А. Фукин// Проблемы реформирования российской экономики: основные тенденции и направления. Материалы межвузовской научно-практической конференции. – Казань: Издательство "Таглимат", 2001. – С. 136–137.

12. Фукин И.А. Решение задачи линейного программирования с заданной точностью методом штрафов /И.А. Фукин// Алгебра и линейная оптимизация: Труды международного семинара, посвященного 90-летию со дня рождения С.Н. Черникова. Екатеринбург: УрО РАН, 2002. - С.309–313.

13. Фукин И.А. Приближенное решение вспомогательных задач в методе штрафов /И.А. Фукин//Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XIV". - Воронеж, Воронежский государственный университет, 2003. - С.144–145.

14. Фукин И.А. Вычислительный опыт решения с заданной точностью задачи выпуклого программирования алгоритмами метода штрафов с аппроксимацией допустимого множества /И.А. Фукин ; Казан. ун-т. - Казань, 2004. - 58 с.: Библ. 24 назв. - Рус. - Деп. в ВИНИТИ 20.05.04 № 869–В2004.

15. Фукин И.А. Сведение решения задачи выпуклого программирования к решению уравнения /И.А. Фукин//Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XV". Воронеж, ВГУ, 2004. - С.222.

16. Фукин И.А. ρ - аппроксимируемость выпуклых функций /И.А. Фукин//Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. конф., Екатеринбург, 2-6 февр. 2004 г. - Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2004. - С. 306–307.