чи о контакте мягкой оболочки с препятствием /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Труды Междун. конференции по вычислительной математике МКВМ -2004. Ч. I / Под ред. Г.А.Михайлова, В.П.Ильина, Ю.М. Лаевского. (Новосибирск, 21-25 июня 2004 г.)- Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. - С. 390-395.

11. Бадриев И.Б. О численном решении задач о равновесии мягких осесимметричных оболочек /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Матер. 5-го Всеросс. сем. (Казань, 17-21 сентября 2004 г.) Казань: Казанский государственный университет. - 2004. - С. 14-16.

12. Бадриев И.Б. Постановка и численное решение стационарных осесимметричных задач теории мягких оболочек /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А.// Труды Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т. 25. Матер. Междун. научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики". (Казань, 15-20 сентября 2004 г.) - Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 2004. - С. 38-39.

13. Бадриев И.Б. Постановка и численное исследование осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Иссл. по прикладной математике и информатике, Казань: Казанский госуниверситет. - 2004. - Вып. 25. - С. 3-27.

Подписано в печать 18.05.2005
Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16
Гарнитура "Таймс". Печать ризографическая. Усл. печ. л. 0.93
Уч.-изд. л. 1.03. Тираж 100 экз. Заказ 5/45

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии издательского центра
Казанского государственного университета
420008, г. Казань, ул. Университетская, 17
Тел. (8432) 92-65-60

На правах рукописи

Бандеров Виктор Викторович

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ МЯГКИХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2005

Работа выполнена в Казанском государственном университете

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Бадриев Ильдар Бурханович,
	кандидат физико-математических наук, доцент Задворнов Олег Анатольевич.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Паймушин Виталий Николаевич,
	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Копысов Сергей Петрович.
Ведущая организация:	Институт Математического Моделирования Российской Академии Наук

Защита состоится 23 июня 2005 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного Совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета

Автореферат разослан 21 мая 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного Совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент О.А. Задворнов

мягких оболочек с невыпуклым достижимым множеством /Бадриев И
Задворнов О.А., Бандеров В.В. // Иссл. по прикладной математике и
форматике, Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва. - 2001. - Вып. 23. - С.

3. Бадриев И.Б. Задача о равновесном положении нити с невупуклым стижимым множеством /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // туальные проблемы матем. моделирования и информатики. Матер. нау конференции (Казань, 30.01.2002 - 06.02.2002 г.) - Казань: Изд-во Каза матем. об-ва. - 2002. - С. 25-29.

4. Бадриев И.Б. О численном решении одномерных задач теории мя оболочек /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Сеточные мет для краевых задач и приложения. Матер. 4-го Всеросс. сем. Казань: Из Казанского матем. общества. - 2002. - С. 17-18.

5. Бадриев И.Б. О решении задач теории мягких оболочек с препятс ем /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Современные мет теории краевых задач. Матер. Воронежской весенней матем. школы "П рягинские чтения - XIV". (Воронеж, 3-9 мая 2003г.) - Воронеж: Изд-во В нежского госуниверситета. - 2003. - С. 10-11.

6. Бадриев И.Б. Численные методы решения задач теории мягких об чек с препятствием /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. //Те докладов Двенадцатой Междун. конференции по вычислительной меха и современным прикладным системам,(Владимир, 30 июня - 5 июля 200 - М.: Изд-во МАИ. - 2003. - С. 74 - 75.

7. Бадриев И.Б. Исследование задачи о контакте нити с препятст /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Исследования по прик ной математике и информатике, Казань: Изд-во Казанского госуниверси - 2003. - Вып. 24. - С. 3-11.

8. Бандеров В.В. Численное решение вариационных неравенств, возн ющих в теории мягких сетчатых оболочек /Бандеров В.В., Задворнов // Матер. Междун. конференции "Ломоносов 2004" (Москва, 10-13 ап 2004 г.), М.: Изд-во МГУ. - 2004. - С. 3.

9. Бадриев И.Б. Приближенное решение некоторых задач теории мя сетчатых оболочек /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Со менные методы теории краевых задач. Матер. Воронежской весенней ма школы "Понтрягинские чтения - XV". (Воронеж, 3-9 мая 2004 г.) - Воро Изд-во Воронежского госуниверситета. - 2004. - С. 19-20.

10. Бадриев И.Б. Постановка и численное исследование стационарной з

ность зависит не только от количества узлов сетки, но и от расстояния между границей коинцидентного множества и ближайшей точки сетки вне его;

– оптимальное значение итерационных параметров следует выбирать близким к критическому значению (т.е значению при котором итерационный процесс перестает сходиться).

В § 2 главы 4 приведены вычислительные эксперименты для ряда модельных задач определения положения равновесия мягкой сетчатой оболочки вращения, аналогичные проведенным выше.

Выделим **основные результаты работы.**

1. Доказана разрешимость квазивариационных неравенств с псевдомонотонными операторами в банаховых пространствах, возникающих при описании задач об определении положения равновесия бесконечно длинных мягких сетчатых оболочек, ограниченных абсолютно жестким и абсолютно гладким препятствием.

2. Построены математические модели осесимметричных задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек вращения в виде вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами в банаховых пространствах. Доказана разрешимость вариационных неравенств.

3. Предложены приближенные методы решения задач об определении положения равновесия бесконечно длинных мягких сетчатых оболочек и осесимметричных задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек вращения. Получены достаточные условия сходимости этих методов.

4. Построены точные решения для ряда модельных задач об определении положения равновесия бесконечно длинных мягких сетчатых оболочек. Разработан комплекс программ, реализующий рассмотренные методы. Проведены численные расчеты, подтвердившие эффективность предложенных алгоритмов.

Список работ по теме диссертации

1. Бадриев И.Б. Математическое моделирование плоских стационарных задач теории мягких оболочек с невыпуклым достижимым множеством /Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Бандеров В.В. // Совр. пробл. матем. моделирния. Матер. IX Всерос. школы-семинара (Абрау-Дюрсо, 8-13 сентября 2001 г.), Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ГУ. - 2001. - С. 33-36.

2. Бадриев И.Б. Постановка и исследование стационарных задач теории

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическое моделирование является од из наиболее эффективных способов решения задач, возникающих в раз ных практических областях - механике, физике, экономике, биологии, м цине и т.д. Многие из этих задач описываются уравнениями и неравенства частными производными. В связи с этим особое внимание уделяется мет их решения. Поскольку возникающие здесь задачи сложны и, как прав нелинейны, то для их решения необходимо использовать численные мет

К настоящему времени достаточно полно изучены методы решения в ационных неравенств с сильно монотонными и максимально монотонн операторами на выпуклых замкнутых множествах в гильбертовых прост ствах. Методы же решения вариационных неравенств с псевдомонотонн операторами в банаховых пространствах, в особенности, в невыпуклом чае, мало разработаны. Тем не менее, при математическом моделиров широких классов нелинейных задач механики сплошной среды, в частн задач теории мягких оболочек, возникает потребность в решении именн ких вариационных неравенств. Следует отметить, что задачи теории мя оболочек находят многочисленные приложения в механике, биомеханике, проектировании различных конструкций из тканевых и пленочных мате лов. Описанию этих задач, построению методов их решения, посвящен ширная литература. Однако соответствующий математический аппарат вит весьма слабо.

Поэтому изучение рассматриваемых в диссертации вопросов являетс туальным, как с теоретической, так и с практической точек зрения зада

Цель исследований. Основная цель работы состоит в построении и следовании математических моделей задач об определении положения ра весия мягких сетчатых оболочек, построении и исследовании приближен методов их решения.

Методы исследований. При изучении рассматриваемых в работе з широко используются методы теории псевдомонотонных операторов, н нейного функционального анализа, выпуклого анализа, численного анал

Научная новизна.

Все результаты работы являются новыми и состоят в исследовании ра шимости математических моделей задач, возникающих при моделиров мягких сетчатых бесконечно длинных оболочек при наличии препятств осесимметричных задач, возникающих при моделировании оболочек вр ния, а также построении и исследовании методов их численной реализации.

Достоверность результатов работы обеспечивается строгими математическими доказательствами, сравнением результатов численных экспериментов с полученными точными решениями для модельных задач.

Практическая значимость. Приведенные в диссертационной работе исследования могут быть использованы при решении конкретных задач теории мягких оболочек.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на IX Всероссийской школе-семинаре "Современные проблемы математического моделирования"(п. Абрау-Дюрсо, 2001 г.), научной конференции "Актуальные проблемы математического моделирования и информатики"(г. Казань, 2002 г.), 4-м и 5-м Всероссийском семинаре "Сеточные методы для краевых задач и приложения"(г. Казань, 2002 г., 2004 г.), весенних математических школах “Понтрягинские чтения - XIV”, “Понтрягинские чтения - XV” – "Современные методы теории краевых задач"(г. Воронеж, 2003 г., 2004 г.), 12-й Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (г. Владимир, 2003 г.), Международной конференции "Ломоносов 2004"(Москва, 2004г.), Международной конференции по вычислительной математике МКВМ -2004 (г. Новосибирск, 2004г.), Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики"(г. Казань, 2004 г.), итоговых научных конференциях Казанского университета за 2001-2004 г.г., научных семинарах кафедры вычислительной математики КГУ и лаборатории математического моделирования Института информатики КГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы и изложена на 134 страницах, содержит 24 рисунка. Список литературы состоит из 106 наименований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 03-01-00380, 04-01-00821) и КЦФЕ Минобразования России (проект А03-2.8-660)

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждается актуальность темы исследований, формулируется цель работы, проводится обзор литературы, прилегающей к тематике диссертации.

В **первой** главе приводится постановка задачи об определении поло-

Для задачи (18) получены достаточные условия сходимости метода и у
новлено утверждение, аналогичное сформулированному в теореме 5. В
чае, когда следящая нагрузка отсутствует, и функции, задающие физиче
соотношения в нитях, имеют линейный рост на бесконечности, установ л
утверждение, аналогичное сформулированному в теореме 6.

Реализация метода (21) осуществляется следующим образом. Сна ч
определяется v, как решение уравнения $Jv = \tau\,(f - Pu^n)$, где $P = A + q_0$
для задачи (10), $P = A+D+q_0\,(\,B+H\,)$ – для задачи (18). Затем определя
$u_*^{n+1} = u^n + v$ и вычисляется $u^{n+1} = P_K(u_*^{n+1})$, P_K – оператор проектирова
в V на множество K.

В **четвертой** главе проводится анализ результатов численных эксп
ментов по решению нелинейных задач теории мягких оболочек, в сл
$V = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}\ (0,l)\right]^2$. Приближенное решение задачи осуществлялось на о
ве ее конечноэлементной аппроксимации с использованием кусочно – ли
ных функций и последующим применением предложенных в третьей г л
методов. Выход из итерационных процессов осуществлялся при достиж е
относительной разности на двух соседних итерациях заданной точности

Изложенный алгоритм решения задач реализован в виде комплекса
грамм в среде MATLAB. Программа выполнена в соответствии с модуль
принципом, что позволило осуществить раздельное программирование,
ладку и тестирование составных частей пакета программ, а также прос
модернизацию и настройку пакета на решение задач различного уровня с л
ности. Проведен анализ результатов численных экспериментов.

В § 1 приведены результаты вычислительных экспериментов, и пров е
анализ этих результатов для задач об определении положения равнов е
бесконечно длинных мягких оболочек.

Вычислительные эксперименты проводились в двух направлениях.

Во – первых исследовалось поведение погрешности между точным и
ближенным решением в зависимости от числа узлов сетки при конечноме р
аппроксимации, от значений итерационного параметра и т.д.

Во – вторых, эмпирическим путем определялись оптимальные итерац
ные параметры. При этом варьировалось количество узлов сетки.

Проведя анализ экспериментов, мы выявили следующие закономерно
– как и ожидалось, погрешность между точным и приближенным р е
нием уменьшается с увеличением количества узлов сетки. При этом пог р

из K. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$, зная $u^{(n)}$, определим $u^{(n+1)}$ как решение вариационного неравенства

$$\left\langle J(u^{(n+1)} - u^{(n)}), v - u^{(n+1)} \right\rangle \geq \tau \left\langle f - Pu^{(n)}, v - u^{(n+1)} \right\rangle \quad \forall v \in K, \qquad (21)$$

где $J : V \to V^*$ – оператор двойственности, порождаемый функцией Φ, $P = A + q_0 B$, $\tau > 0$ – итерационный параметр.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (1), (2), (7), (19), а также* $0 < \tau < \min\{1, 1/\mu_0\}$, *где* $\mu_0 = \mu(R_0 + \Phi^{-1}(R_1))$, $\Phi(\xi) = \xi$, $\mu = \mu_A + c_1$, $R_0 = \sup\limits_{u \in S_0} \|u\|$, $R_1 = \sup\limits_{u \in S_0} \|Pu - f\|_{V^*}$, $S_0 = \{ u \in K : F(u) \leq F(u^{(0)}) \}$, $F(u) = \int\limits_0^1 \langle P(t\,u), u \rangle \, dt$.

Тогда при $p > 2$ *итерационная последовательность* $\{u^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$, *построенная согласно (21), ограничена в* V, *и все ее слабо предельные точки являются решениями задачи (10). Если же* $p = 2$, *то утверждение теоремы справедливо при условии* $|q_0| < q_1 = k_0/c_1$.

Отдельно рассматривалась случай гильбертова пространства V $(p = 2)$ при условии $(q_0 \equiv 0)$. При этом справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (1), (2), (7), (19),* $\tau \in (0, 2/d)$. *Тогда вся итерационная последовательность* $\{u^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$, *построенная согласно (21), сходится слабо к некоторому решению задачи (10).*

В § 2 устанавливается ряд дополнительных свойств операторов, необходимых для сходимости итерационного процесса в случае задачи (18). При этом считаем, что функции T_1 и T_2 дополнительно удовлетворяют условиям:

$$\frac{T_1(\beta) - T_1(\gamma)}{\beta - \gamma} \leq k_2\,(\alpha + \beta + \gamma)^{p-2}\; \forall \beta, \gamma \in (0, +\infty),\; k_2 > 0,$$

где $\alpha = 1$ при $p \geq 2$, $\alpha = 0$ при $1 < p < 2$,

$$\frac{T_2(\beta) - T_2(\gamma)}{\beta - \gamma} \leq k_3\,(1 + \beta + \gamma)^{\sigma - 1} \quad \forall \beta, \gamma \in (0, +\infty),\; k_3 > 0,\; \sigma > 1,\; p > 1.$$

При выполнении этих условий оператор A является ограниченно липшиц-непрерывным, при $p = 2$ – обратно сильно монотонным и, кроме того, потенциальным. Оператор B является потенциальным и липшиц-непрерывным. Операторы H и D являются потенциальными и ограниченно липшиц-непрерывными.

жения равновесия бесконечно длинной мягкой оболочки, закрепленно й краям, находящейся под воздействием внешних сил и ограниченной в п мещениях препятствием. Математически задача сформулирована в виде зивариационного неравенства в банаховом пространстве. Доказана тео р существования.

В § 1 формулируется поточечная постановка задачи и описывается пер от поточечной постановки к вариационной.

Рассматривается задача об определении положения равновесия растя мой бесконечно длинной цилиндрической оболочки, закрепленной по кр находящейся под воздействием поверхностных и массовых сил и ограни ной в перемещениях препятствием. Деформации и перемещения допуска конечными.

Рассматриваемый класс задач сводится к изучению деформаций в п речном сечении оболочки. Введем в плоскости поперечного сечения дека ву систему координат Ox_1x_2 таким образом, чтобы точки закрепления к оболочки имели координаты $(0, 0)$ и $(l, 0)$. Считаем, что длина оболоч недеформированном состоянии равна l. Положение оболочки в плоскост перечного сечения будем описывать вектор-функцией $w(s) = (w_1(s), w_2$ где $0 \leq s \leq l$ – лагранжева координата, выбранная так, что длина лочки, отсчитываемая в недеформированном состоянии от точки $(0, 0)$ текущей, равна s (т.е. s – натуральный параметр при описании недефо рованной оболочки). Деформация оболочки характеризуется степенью у нения $\lambda(w) = |w'|/|\mathring{w}'|$, $\mathring{w}$ – функция, описывающая положение оболоч недеформированном состоянии $\mathring{w} = (\mathring{w}_1, \mathring{w}_2) = (s, 0), s \in [0, l]$.

Относительно функции T, характеризующей материал оболочки, пре лагаем, что она удовлетворяет условиям:

$$T(\xi) = 0,\; \xi \leq 1 \quad \text{(оболочка не воспринимает сжимающих усилий)},$$

$$T \;-\; \text{непрерывная, неубывающая},$$

Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют вид:

$$D + \lambda P_0 = 0, \qquad \text{где} \quad D(w(s)) = \left(T(\lambda) \frac{w'}{|w'|} \right)' + \lambda \tilde{q} + \tilde{f},$$

которые дополняются граничными условиями

$$w(0) = (w_1(0), w_2(0)) = (0, 0),\; w(l) = (w_1(l), w_2(l)) = (l, 0).$$

Здесь $\tilde{q}$ и $\tilde{f}$ – известные плотности погонных и массовых сил соответственно, P_0 – функция, характеризующая плотность силы взаимодействия оболочки с препятствием. Изначально функция P_0 не известна и, наряду с равновесным положением оболочки w, является решением задачи.

Предположим, что в рассматриваемой декартовой системе координат поверхность препятствия задается в виде $x_2 = F(x_1)$, где F – непрерывно-дифференцируемая функция, определенная на всей вещественной оси, такая, что $F(0) \leq 0$, $F(l) \leq 0$, т.е. оболочка находится над препятствием.

Считаем материал препятствия абсолютно твердым, а его поверхность – абсолютно гладкой. Поэтому плотность силы реакции препятствия можно представить в виде $P_0(s) = \beta(s) N(w_1(s))$, где β – неизвестная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\beta(s) \geq 0,\ s \in I_w,\ \beta(s) = 0,\ s \in I_w^-, \tag{5}$$

$I_w = \{s \in (0,l) : w_2(s) = F(w_1(s))\}$ – множество лагранжевых координат точек оболочки, лежащих на препятствии (так называемое коинцидентное множество), $I_w^- = (0,l) \setminus I_w$ – множество лагранжевых координат точек оболочки, не контактирующих с препятствием, N – вектор-функция единичной внешней нормали к поверхности препятствия.

Введем множество допустимых конфигураций оболочки:

$$M = \{\eta :\ \eta_2(s) \geq F(\eta_1(s)),\ \text{где } s \in (0,l)\,,\ \eta(0) = (0,0)\,,\ \eta(l) = (l,0)\}\,.$$

Задача в поточечной постановке формулируется в следующем виде.

Найти функции $w \in M$ и β, такие что, имеют место уравнения (3),(4) и выполнены условия (5).

Далее вводится множество направлений возможных перемещений из текущего положения w: $M(w) = \{\eta :\ w + \alpha\,\eta \in M$ для всех $\alpha \in (0,1)\}$ – множество таких направлений η, что перемещение из положения w в этих направлениях не выводит за пределы M, и формулируется вариационная постановка задачи, состоящая в поиске функции $w \in M$, такой, что

$$\int_0^l \frac{T\,(\lambda(w))}{\lambda(w)}\ (w', \eta' - w')\,ds - \int_0^l (\lambda\,\tilde{q} + \tilde{f}, \eta - w)\,ds \geq 0 \quad \forall\, \eta \in M(w). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть w, β – решение поточечной задачи (3) – (5). Тогда w является решением задачи (6). Наоборот, если w – решение задачи (6), w и T – достаточно гладкие функции, функция β определятся по формуле: $\beta(s) = |D(s)|/\lambda(w)$, тогда w, β – решения задачи (3) – (5).*

Показано, что оператор H удовлетворяет условию

$$\langle Hu, u\rangle \leq c_2\ \|u\|\ [\ \|u\,\| + 1\ ]\ \|u\|, \qquad \text{где } c_2 = \frac{2\sqrt{2}\,l^{3/p^*}}{r_0}.$$

В § 3 устанавливаются ряд свойств операторов (псевдомонотонн о непрерывность и коэрцитивность), необходимых при исследовании разр е мости задачи (18).

В § 4 доказывается

Теорема 4. *Пусть $f \in V^*$, выполнены условия (15) – (17). Тогда*

1) если $p > 3$, то неравенство (18) имеет решение при любом $q_0 \in R$

2) если $p = 3$, то неравенство (18) имеет решение при всех q_0, удо творяющих условию: $|q_0| < k_0/c_2$;

3) если $1 < p < 3$, то для любого $\delta > 0$ найдется $q_\delta > 0$, такое, задача (18) имеет решение при условиях: $\|f\|_{V^*} \leq \delta$, $\quad |q_0| < q_\delta$.

В **третьей** главе рассматривается двухслойный итерационный метод решения вариационных неравенств второго рода с псевдомонотонными раторами. Устанавливаются достаточные условия сходимости метода.

В § 1 для задачи, рассмотренной в первой главе, доказан ряд допо л тельных свойств операторов, необходимых для обоснования сходимости рационного процесса.

Доказывается, что при выполнении условий (1), (2), (7), а также усло

$$\frac{T(\beta) - T(\gamma)}{\beta - \gamma} \leq k_2\,(\alpha + \beta + \gamma)^{p-2}\ \forall\, \beta, \gamma \in (0, +\infty),\ k_2 > 0,$$

где $\alpha = 1$ при $p \geq 2$, $\alpha = 0$ при $1 < p < 2$, оператор A является ограниче липшиц-непрерывным, т.е. выполнено неравенство:

$$\|Au - Av\|_{V^*} \leq \mu_A(R)\Phi(\|u - v\|_V) \quad \forall\, u, v \in V,$$

$R = \max\{\|u\|_V, \|v\|_V\}$, μ_A – неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, Φ – не рывная, строго возрастающая на $[0, +\infty)$ функция такая, что $\Phi(0) =$ $\Phi(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$. При $p = 2$ устанавливается, что операто является обратно сильно монотонным с постоянной d. Доказано, что липшиц-непрерывный оператор с константой Липшица c_1.

Для решения рассматриваемых задач теории мягких оболочек, испол ется следующий итерационный процесс. Пусть $u^{(0)}$ – произвольный элем

Вариационная постановка задачи (11) – (13) имеет вид

$$\int_0^l \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,\left(\tilde{u}', v'\right) ds + q_0 \int_0^l \left(1+\frac{u_2}{r_0}\right)[\tilde{u}_1' \, v_2 - u_2' \, v_1 \,]\, ds +$$

$$+\frac{1}{r_0}\int_0^l T_2(\lambda_2(u))\, v_2\, ds = \int_0^l (\tilde{f},\, v) ds, \tag{14}$$

гдеv – произвольная бесконечно дифференцируемая, финитная на $[0,l]$ функция.

Граничные условия (13) приобретают вид: $u(0) = (0,0), \quad u(l) = (0,0)$. Кроме того, решение задачи должно удовлетворять условию $u_2(s)+r_0 \geq 0$, естественному для цилиндрической системы координат. Относительно функцийT_1 и T_2 считаем, что выполнены условия (аналогичные условиям (1), (2))

$$T_i(\xi) = 0,\ \xi \leq 1,\ i = 1,2, \tag{15}$$

$$T_i,\ i = 1,2, - \text{ непрерывные, неубывающие}, \tag{16}$$

T_1 имеет на бесконечности степенной рост порядка $p-1>0$, т.е. существуют положительные k_0, k_1, такие, что

$$k_0\,(\xi-1)^{p-1} \leq T_1(\xi) \leq k_1\,\xi^{p-1} \quad \text{при} \quad \xi \geq 1. \tag{17}$$

В § 2 приводится обобщенная постановка задачи в виде вариационного неравенства с псевдомонотонным оператором в банаховом пространстве.

Обозначим $V = \left[\mathring{W}_p^{(1)}\,(0,l)\right]^2$, $K = \{u \in V : r_0 + u_2 \geq 0\}$, $\|\cdot\|$ – норма, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – отношение двойственности между V и V^*.

Под обобщенным решением осесимметричной задачи будем понимать функцию $u \in K$, удовлетворяющую вариационному неравенству:

$$\langle (A+D+q_0\,(B+H))u,\ v-u\rangle \geq \langle f,\ v-u\rangle \qquad \forall\, v \in K. \tag{18}$$

где операторы$A, B, D, H : V \to V^*$ и элемент $f \in V^*$, порождаются формами

$$\langle Au, v\rangle = \int_0^l \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,(\tilde{u}\,', v\,')\, ds, \quad \langle Bu, v\rangle = \int_0^l [\,\tilde{u}\,'_1\, v_2 + u_2\, v\,'_1\,]\, ds,$$

$$\langle Du, v\rangle = \frac{1}{r_0}\int_0^l T_2(\lambda_2(u))\, v_2\, ds, \quad \langle Hu, v\rangle = \frac{1}{r_0}\int_0^l \left[\frac{1}{2}\,u_2^2\, v\,'_1 + \tilde{u}\,'_1\, u_2\, v_2\right] ds,$$

$$\langle f, v\rangle = \int_0^l (\tilde{f},\, v)\, ds.$$

В § 2 на основе вариационной постановки задачи формулируется обоб ная постановка в виде квазивариационного неравенства.

Относительно функции T, характеризующей материал оболочки, наря (1),(2), дополнительно предполагаем, что существуют положительные k_0 $p>1$, такие, что

$$k_0(\xi-1)^{p-1} \leq T(\xi) \leq k_1 \xi^{p-1} \quad \text{при} \quad \xi \geq 1.$$

Обобщенная постановка формулируется в перемещениях, при этом, скольку края оболочки закреплены, то перемещения на концах равны н Связь между координатами точек оболочки и перемещениями определя соотношением $w = \mathring{w} + u$.

Пусть $V = \left[\mathring{W}_p^{(1)}(0,1)\right]^2$ с нормой $\|\cdot\|$. Сопряженным к V будет простр ство $V^* = \left[\mathring{W}_{p^*}^{(-1)}\,(0,l)\right]^2$, $p^* = p/(p-1)$, обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ отноше двойственности между V и V^*.

Положим $\tilde{u}(s) = (\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(s))$, где $\tilde{u}_1(s) = u_1(s)+s$, $\tilde{u}_2(s) = u_2(s)$; этом $\lambda_1(u) = \lambda(\tilde{u}) = |\tilde{u}'(s)|$.

Относительно внешних нагрузок считаем, что погонная нагрузка явл ся постоянной и следящей, т.е. оболочка нагружена постоянным давле н q_0, при этом $\lambda\,\tilde{q} = -\,q_0\,Q\,\tilde{u}'$, где $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, массовая нагрузка сч ется заданной функцией лагранжевой координаты s, и для любых v и определена форма $\int_0^l (\tilde{f}, v)\, ds$.

Очевидно, что множество допустимых конфигураций оболочки в пер щениях есть $K = \left\{ u \in V \ :\ \ \mathring{w}_2 + u_2 \geq F(\,\mathring{w}_1 + u_1\,),\ s \in (0,l) \right\}$.

При этом множество направлений возможных перемещений выглядит $K(u) = \{v :\ u + \alpha\,(v-u) \in K$ для всех $\alpha \in (0,1)\}$. Отметим, что множе K слабо замкнуто и, вообще говоря, не является выпуклым.

Под обобщенным решением задачи будем понимать, в соответствии с функцию $u \in K$, удовлетворяющую следующему квазивариационному н венству:

$$\int_0^l \frac{T\,(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,(\tilde{u}', v'-u')\ ds + \int_0^l \left(q_0\,Q\tilde{u}' - \tilde{f}, v-u\right) ds \geq 0 \quad \forall\, v \in K(u).$$

Введем операторы $A, B : V \to V^*$ и элемент $f \in V^*$, порождаемые ф мами

$$\langle Au, v\rangle = \int\limits_0^l \frac{T(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\ (\tilde u\,', v\,')\, ds,\ \langle Bu, v\rangle = \int\limits_0^l (q_0\, Q\tilde u', v)\ ,\ \langle f, v\rangle = \int\limits_0^l (\tilde f,\ v)\, ds.$$

При этом обобщенная задача (8) приобретает вид:

$$\text{Найти } u \in K: \qquad \langle Au + q_0\, Bu - f, v - u\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in K(u). \tag{9}$$

Для оператора B получена следующая оценка

$$\langle Bu, u\rangle \leq c_1\ (\|u\,\| + 1)\,\|u\|, \qquad \text{где } c_1 = 2\, l^{\,2/p^*}.$$

В § 3 устанавливаются свойства операторов (псевдомонотонность, потенциальность, непрерывность, коэрцитивность), необходимые при исследовании разрешимости задачи (9).

В § 4 доказана

Теорема 2. *Пусть $f \in V^*$, выполнены условия (1), (2), (7). Тогда:*

1) если $p > 2$, то задача (9) имеет решение при любом $q_0 \in R^1$;

2) если $p = 2$, то задача (9) имеет решение при всех q_0, удовлетворяющих условию: $|q_0| < k_0/c_1$.

Отдельно рассматривается случай, когда функция, описывающая препятствие – выпуклая. В этом случае множество K – выпуклое и совпадает с $K(u)$. Поэтому задача (9) формулируется в виде следующего вариационного неравенства:

$$\text{Найти } u \in K: \qquad \langle Au + q_0\, Bu - f, v - u\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in K. \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть $f \in V^*$, выполнены условия (1), (2), (7). Тогда:*

1) если $p > 2$, то задача (10) имеет решение при любом $q_0 \in R^1$;

2) если $p = 2$, то задача (10) имеет решение при всех q_0, удовлетворяющих условию: $|q_0| < k_0/c_1$;

3) если $1 < p < 2$, то для любого $\delta > 0$ найдется $q_\delta > 0$, такое, что задача (10) имеет решение при условиях: $\|f\|_{V^*} \leq \delta, \quad |q_0| < q_\delta$.

В § 5 предлагается полуобратный метод построения точных решений задач об определении положения равновесия бесконечно длинных цилиндрических оболочек, закрепленных по краям, находящихся под воздействием давления и ограниченных в перемещениях препятствием. Построены точные решения для ряда модельных задач.

Во **второй** главе рассматривается пространственная осесимметри ч
задача о равновесии мягкой сетчатой оболочки вращения, находящейся
воздействием массовой и поверхностной нагрузок. Оболочка образован а
реплетением двух семейств нитей, одно из которых имеет циркулярное
правление, а другое – продольное. Края оболочки считаются закрепленн ы
Поверхностная нагрузка предполагается постоянной и следящей, т.е. нап р
лена по нормали к поверхности оболочки. Вектор плотности массовых
лежит в радиальной (проходящей через ось симметрии) плоскости. При э
перемещение точек оболочки происходит также в радиальном направле н
Эта задача сформулирована математически в виде вариационного нера
ства с псевдомонотонным оператором в банаховом пространстве. Установ л
разрешимость вариационного неравенства.

В § 1 приводится краевая постановка задачи в цилиндрической сис т
координат. Затем формулируется вариационная постановка задачи.

Рассматривается осесимметричная задача о равновесии мягкой сетч а
оболочки вращения, представляющей из себя в недеформированном со
янии цилиндр радиуса r_0 и длины l. Указанная задача в цилиндриче
системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T_1}{\lambda_1}\left(1 + \frac{dy}{ds}\right)\right) + \lambda_2\, q_0\, \frac{dw}{ds} + \tilde f_1 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T_1}{\lambda_1}\frac{dw}{ds}\right) - \frac{1}{r_0}\, T_2 - \lambda_2\, q_0\, \left(1 + \frac{dy}{ds}\right) + \tilde f_2 = 0,$$

$$y(0) = w(0) = 0, \quad y(l) = w(l) = 0,$$

где $y, w,$ – перемещения точек оболочки в продольном и циркулярном
правлениях соответственно, $\tilde f$ – плотность массовых сил, q_0 – плотность
дящей поверхностной нагрузки, T_1, T_2 – функции, задающие физические с
ношения в нитях в продольном и циркулярном направлениях соответстве н
λ_1, λ_2 – степени удлинения в продольном и радиальном направлениях соот
ственно. Предполагается, что функция, определяющая в продольных н и
зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, имеет степе н
рост. Ограничений на рост функции, определяющей в циркулярных нитя х
висимость модуля силы натяжения от степени удлинения, не накладывае

Обозначим $u_1 = y, \quad u_2 = w, \quad \tilde u(s) = (\tilde u_1,\, \tilde u_2), \quad \tilde u_1(s) = u_1(s)$ -
$\tilde u_2(s) = u_2(s) + r_0$; при этом $\lambda_1(u) = |\tilde u'(s)|$, $\lambda_2(u) = 1 + u_2(s)/r_0$.

мами
$$\langle Au, v\rangle = \int\limits_0^l \frac{T(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,(\tilde u\,', v\,')\,ds,\ \langle Bu, v\rangle = \int\limits_0^l (q_0\,Q\tilde u', v)\,,\ \langle f, v\rangle = \int\limits_0^l (\tilde f,\,v)\,ds.$$

При этом обобщенная задача (8) приобретает вид:

$$\text{Найти } u\in K: \qquad \langle Au + q_0\,Bu - f, v-u\rangle \geq 0 \qquad \forall v\in K(u). \tag{9}$$

Для оператора B получена следующая оценка

$$\langle Bu, u\rangle \leq c_1\,(\|u\,\|+1)\,\|u\|, \qquad \text{где } c_1 = 2\,l^{2/p^*}.$$

В § 3 устанавливаются свойства операторов (псевдомонотонность, потенциальность, непрерывность, коэрцитивность), необходимые при исследовании разрешимости задачи (9).

В § 4 доказана

Теорема 2. *Пусть $f\in V^*$, выполнены условия (1), (2), (7). Тогда:*
1) если $p>2$, то задача (9) имеет решение при любом $q_0\in R^1$;
2) если $p=2$, то задача (9) имеет решение при всех q_0, удовлетворяющих условию: $|q_0|<k_0/c_1$.

Отдельно рассматривается случай, когда функция, описывающая препятствие – выпуклая. В этом случае множество K – выпуклое и совпадает с $K(u)$. Поэтому задача (9) формулируется в виде следующего вариационного неравенства:

$$\text{Найти } u\in K: \qquad \langle Au + q_0\,Bu - f, v-u\rangle \geq 0 \qquad \forall v\in K. \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть $f\in V^*$, выполнены условия (1), (2), (7). Тогда:*
1) если $p>2$, то задача (10) имеет решение при любом $q_0\in R^1$;
2) если $p=2$, то задача (10) имеет решение при всех q_0, удовлетворяющих условию: $|q_0|<k_0/c_1$;
3) если $1<p<2$, то для любого $\delta>0$ найдется $q_\delta>0$, такое, что задача (10) имеет решение при условиях: $\|f\|_{V^*}\leq\delta,\quad |q_0|<q_\delta$.

В § 5 предлагается полуобратный метод построения точных решений задач об определении положения равновесия бесконечно длинных цилиндрических оболочек, закрепленных по краям, находящихся под воздействием давления и ограниченных в перемещениях препятствием. Построены точные решения для ряда модельных задач.

Во **второй** главе рассматривается пространственная осесимметри
задача о равновесии мягкой сетчатой оболочки вращения, находящейся
воздействием массовой и поверхностной нагрузок. Оболочка образован
реплетением двух семейств нитей, одно из которых имеет циркулярное
правление, а другое – продольное. Края оболочки считаются закрепленн
Поверхностная нагрузка предполагается постоянной и следящей, т.е. нап
лена по нормали к поверхности оболочки. Вектор плотности массовых
лежит в радиальной (проходящей через ось симметрии) плоскости. При
перемещение точек оболочки происходит также в радиальном направле
Эта задача сформулирована математически в виде вариационного нера
ства с псевдомонотонным оператором в банаховом пространстве. Установ
разрешимость вариационного неравенства.

В § 1 приводится краевая постановка задачи в цилиндрической сис
координат. Затем формулируется вариационная постановка задачи.

Рассматривается осесимметричная задача о равновесии мягкой сетч
оболочки вращения, представляющей из себя в недеформированном со
янии цилиндр радиуса r_0 и длины l. Указанная задача в цилиндриче
системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T_1}{\lambda_1}\left(1+\frac{dy}{ds}\right)\right) + \lambda_2\,q_0\,\frac{dw}{ds} + \tilde f_1 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T_1}{\lambda_1}\frac{dw}{ds}\right) - \frac{1}{r_0}\,T_2 - \lambda_2\,q_0\,\left(1+\frac{dy}{ds}\right) + \tilde f_2 = 0,$$
$$y(0)=w(0)=0, \quad y(l)=w(l)=0,$$

где $y, w,$ – перемещения точек оболочки в продольном и циркулярном
правлениях соответственно, $\tilde f$ – плотность массовых сил, q_0 – плотность
дящей поверхностной нагрузки, T_1, T_2 – функции, задающие физические с
ношения в нитях в продольном и циркулярном направлениях соответстве
λ_1, λ_2 – степени удлинения в продольном и радиальном направлениях соот
ственно. Предполагается, что функция, определяющая в продольных н
зависимость модуля силы натяжения от степени удлинения, имеет степе
рост. Ограничений на рост функции, определяющей в циркулярных нитя
висимость модуля силы натяжения от степени удлинения, не накладывае

Обозначим $u_1=y,\quad u_2=w,\quad \tilde u(s)=(\tilde u_1,\,\tilde u_2),\quad \tilde u_1(s)=u_1(s)$
$\tilde u_2(s)=u_2(s)+r_0$; при этом $\lambda_1(u)=|\tilde u'(s)|$, $\lambda_2(u)=1+u_2(s)/r_0$.

Вариационная постановка задачи (11) – (13) имеет вид

$$\int\limits_0^l \frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,(\tilde{u}', v')\,ds + q_0\int\limits_0^l \left(1+\frac{u_2}{r_0}\right)[\tilde{u}_1'\,v_2 - u_2'\,v_1\,]\,ds +$$

$$+\frac{1}{r_0}\int\limits_0^l T_2(\lambda_2(u))\,v_2\,ds = \int\limits_0^l(\tilde{f},\,v)ds, \qquad (14)$$

гдеv – произвольная бесконечно дифференцируемая, финитная на $[0,l]$ функция.

Граничные условия (13) приобретают вид: $u(0)=(0,0)$, $\;u(l)=(0,0)$. Кроме того, решение задачи должно удовлетворять условию $u_2(s)+r_0\geq 0$, естественному для цилиндрической системы координат. Относительно функцийT_1 и T_2 считаем, что выполнены условия (аналогичные условиям (1), (2))

$$T_i(\xi)=0,\ \xi\leq 1,\ i=1,2, \qquad (15)$$

$$T_i,\ i=1,2,-\ \text{непрерывные, неубывающие}, \qquad (16)$$

T_1 имеет на бесконечности степенной рост порядка $p-1>0$, т.е. существуют положительные $k_0,\,k_1$, такие, что

$$k_0\,(\xi-1)^{p-1}\leq T_1(\xi)\leq k_1\,\xi^{p-1} \quad \text{при} \quad \xi\geq 1. \qquad (17)$$

В § 2 приводится обобщенная постановка задачи в виде вариационного неравенства с псевдомонотонным оператором в банаховом пространстве.

Обозначим $V=\left[\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(0,l)\right]^2$, $K=\{u\in V: r_0+u_2\geq 0\}$, $\|\cdot\|$ – норма, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – отношение двойственности между V и V^*.

Под обобщенным решением осесимметричной задачи будем понимать функцию $u\in K$, удовлетворяющую вариационному неравенству:

$$\langle(A+D+q_0\,(B+H))u,\,v-u\rangle\geq\langle f,\,v-u\rangle \qquad \forall\,v\in K. \qquad (18)$$

где операторы$A,B,D,H:V\to V^*$ и элемент $f\in V^*$, порождаются формами

$$\langle Au,v\rangle=\int\limits_0^l\frac{T_1(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,(\tilde{u}',v')\,ds, \quad \langle Bu,v\rangle=\int\limits_0^l[\,\tilde{u}_1'\,v_2+u_2\,v_1'\,]\,ds,$$

$$\langle Du,v\rangle=\frac{1}{r_0}\int\limits_0^l T_2(\lambda_2(u))\,v_2\,ds, \quad \langle Hu,v\rangle=\frac{1}{r_0}\int\limits_0^l\left[\frac{1}{2}\,u_2^2\,v_1'+\tilde{u}_1'\,u_2\,v_2\right]ds,$$

$$\langle f,v\rangle=\int\limits_0^l(\tilde{f},\,v)\,ds.$$

В § 2 на основе вариационной постановки задачи формулируется обоб ц
ная постановка в виде квазивариационного неравенства.

Относительно функции T, характеризующей материал оболочки, наря
(1),(2), дополнительно предполагаем, что существуют положительные k_0
$p>1$, такие, что

$$k_0(\xi-1)^{p-1}\leq T(\xi)\leq k_1\xi^{p-1} \quad \text{при} \quad \xi\geq 1.$$

Обобщенная постановка формулируется в перемещениях, при этом,
скольку края оболочки закреплены, то перемещения на концах равны н у
Связь между координатами точек оболочки и перемещениями определя
соотношением $w=\overset{\circ}{w}+u$.

Пусть $V=\left[\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(0,1)\right]^2$ с нормой $\|\cdot\|$. Сопряженным к V будет простр
ство $V^*=\left[\overset{\circ}{W}{}_{p^*}^{(-1)}(0,l)\right]^2$, $p^*=p/(p-1)$, обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ отноше
двойственности между V и V^*.

Положим $\tilde{u}(s)=(\tilde{u}_1(s),\tilde{u}_2(s))$, где $\tilde{u}_1(s)=u_1(s)+s$, $\tilde{u}_2(s)=u_2(s)$;
этом $\lambda_1(u)=\lambda(\tilde{u})=|\tilde{u}'(s)|$.

Относительно внешних нагрузок считаем, что погонная нагрузка явл
ся постоянной и следящей, т.е. оболочка нагружена постоянным давле н
q_0, при этом $\lambda\,\tilde{q}=-q_0\,Q\,\tilde{u}'$, где $Q=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, массовая нагрузка сч
ется заданной функцией лагранжевой координаты s, и для любых v и
определена форма $\int\limits_0^l(\tilde{f},v)\,ds$.

Очевидно, что множество допустимых конфигураций оболочки в пер
щениях есть $K=\left\{u\in V\ :\ \overset{\circ}{w}_2+u_2\geq F(\,\overset{\circ}{w}_1+u_1\,),\ s\in(0,l)\right\}$.

При этом множество направлений возможных перемещений выглядит
$K(u)=\{v:\ u+\alpha\,(v-u)\in K$ для всех $\alpha\in(0,1)\}$. Отметим, что множе
K слабо замкнуто и, вообще говоря, не является выпуклым.

Под обобщенным решением задачи будем понимать, в соответствии с
функцию $u\in K$, удовлетворяющую следующему квазивариационному н
венству:

$$\int\limits_0^l\frac{T\,(\lambda_1(u))}{\lambda_1(u)}\,(\tilde{u}',v'-u')\,ds+\int\limits_0^l\left(q_0\,Q\tilde{u}'-\tilde{f},v-u\right)ds\geq 0 \quad \forall\,v\in K(u).$$

Введем операторы $A,B:V\to V^*$ и элемент $f\in V^*$, порождаемые ф

Здесь $\tilde{q}$ и $\tilde{f}$ – известные плотности погонных и массовых сил соответственно, P_0 – функция, характеризующая плотность силы взаимодействия оболочки с препятствием. Изначально функция P_0 не известна и, наряду с равновесным положением оболочки w, является решением задачи.

Предположим, что в рассматриваемой декартовой системе координат поверхность препятствия задается в виде $x_2 = F(x_1)$, где F – непрерывно-дифференцируемая функция, определенная на всей вещественной оси, такая, что $F(0) \leq 0$, $F(l) \leq 0$, т.е. оболочка находится над препятствием.

Считаем материал препятствия абсолютно твердым, а его поверхность – абсолютно гладкой. Поэтому плотность силы реакции препятствия можно представить в виде $P_0(s) = \beta(s) N(w_1(s))$, где β – неизвестная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\beta(s) \geq 0,\ s \in I_w,\ \beta(s) = 0,\ s \in I_w^-, \tag{5}$$

$I_w = \{s \in (0,l) : w_2(s) = F(w_1(s))\}$ – множество лагранжевых координат точек оболочки, лежащих на препятствии (так называемое коинцидентное множество), $I_w^- = (0,l) \setminus I_w$ – множество лагранжевых координат точек оболочки, не контактирующих с препятствием, N – вектор-функция единичной внешней нормали к поверхности препятствия.

Введем множество допустимых конфигураций оболочки:

$$M = \{\eta :\ \eta_2(s) \geq F(\eta_1(s)),\ \text{где } s \in (0,l)\,,\ \eta(0) = (0,0)\,,\ \eta(l) = (l,0)\}\,.$$

Задача в поточечной постановке формулируется в следующем виде.

Найти функции $w \in M$ и β, такие что, имеют место уравнения (3),(4) и выполнены условия (5).

Далее вводится множество направлений возможных перемещений из текущего положения w: $M(w) = \{\eta :\ w + \alpha\,\eta \in M \text{ для всех } \alpha \in (0,1)\}$ – множество таких направлений η, что перемещение из положения w в этих направлениях не выводит за пределы M, и формулируется вариационная постановка задачи, состоящая в поиске функции $w \in M$, такой, что

$$\int\limits_0^l \frac{T\,(\lambda(w))}{\lambda(w)}\ (w', \eta' - w')\,ds - \int\limits_0^l (\lambda\,\tilde{q} + \tilde{f}, \eta - w)\,ds \geq 0 \quad \forall \eta \in M(w). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть w, β – решение поточечной задачи (3) – (5). Тогда w является решением задачи (6). Наоборот, если w – решение задачи (6), w и T – достаточно гладкие функции, функция β определятся по формуле: $\beta(s) = |D(s)|/\lambda(w)$, тогда w, β – решения задачи (3) – (5).*

Показано, что оператор H удовлетворяет условию

$$\langle Hu, u\rangle \leq c_2\ \|u\|\ [\ \|u\| + 1\ ]\ \|u\|, \qquad \text{где } c_2 = \frac{2\sqrt{2}\,l^{3/p^*}}{r_0}.$$

В § 3 устанавливаются ряд свойств операторов (псевдомонотонно
непрерывность и коэрцитивность), необходимых при исследовании разре
мости задачи (18).

В § 4 доказывается

Теорема 4. *Пусть $f \in V^*$, выполнены условия (15) – (17). Тогда*
1) если $p > 3$, то неравенство (18) имеет решение при любом $q_0 \in R$
2) если $p = 3$, то неравенство (18) имеет решение при всех q_0, удо
творяющих условию: $|q_0| < k_0/c_2$;
3) если $1 < p < 3$, то для любого $\delta > 0$ найдется $q_\delta > 0$, такое,
задача (18) имеет решение при условиях: $\|f\|_{V^*} \leq \delta$, $\quad |q_0| < q_\delta$.

В **третьей** главе рассматривается двухслойный итерационный метод
решения вариационных неравенств второго рода с псевдомонотонными
раторами. Устанавливаются достаточные условия сходимости метода.

В § 1 для задачи, рассмотренной в первой главе, доказан ряд допол
тельных свойств операторов, необходимых для обоснования сходимости
рационного процесса.

Доказывается, что при выполнении условий (1), (2), (7), а также усло

$$\frac{T(\beta) - T(\gamma)}{\beta - \gamma} \leq k_2\,(\alpha + \beta + \gamma)^{p-2}\ \forall\,\beta, \gamma \in (0, +\infty),\ k_2 > 0,$$

где $\alpha = 1$ при $p \geq 2$, $\alpha = 0$ при $1 < p < 2$, оператор A является ограниче
липшиц-непрерывным, т.е. выполнено неравенство:

$$\|Au - Av\|_{V^*} \leq \mu_A(R)\Phi(\|u - v\|_V) \quad \forall\,u, v \in V,$$

$R = \max\{\|u\|_V, \|v\|_V\}$, μ_A – неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, Φ – не
рывная, строго возрастающая на $[0, +\infty)$ функция такая, что $\Phi(0) =$
$\Phi(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$. При $p = 2$ устанавливается, что операто
является обратно сильно монотонным с постоянной d. Доказано, что
липшиц-непрерывный оператор с константой Липшица c_1.

Для решения рассматриваемых задач теории мягких оболочек, испол
ется следующий итерационный процесс. Пусть $u^{(0)}$ – произвольный элем

из K. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$, зная $u^{(n)}$, определим $u^{(n+1)}$ как решение вариационного неравенства

$$\left\langle J(u^{(n+1)} - u^{(n)}), v - u^{(n+1)} \right\rangle \geq \tau \left\langle f - Pu^{(n)}, v - u^{(n+1)} \right\rangle \quad \forall v \in K, \qquad (21)$$

где $J : V \to V^*$ – оператор двойственности, порождаемый функцией Φ, $P = A + q_0 B$, $\tau > 0$ – итерационный параметр.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (1), (2), (7), (19), а также* $0 < \tau < \min\{1, 1/\mu_0\}$, *где* $\mu_0 = \mu(R_0 + \Phi^{-1}(R_1))$, $\Phi(\xi) = \xi$, $\mu = \mu_A + c_1$, $R_0 = \sup\limits_{u \in S_0} \|u\|$, $R_1 = \sup\limits_{u \in S_0} \|Pu - f\|_{V^*}$, $S_0 = \{u \in K : F(u) \leq F(u^{(0)})\}$, $F(u) = \int\limits_0^1 \langle P(t\,u), u\rangle \, dt$.

Тогда при $p > 2$ *итерационная последовательность* $\{u^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$, *построенная согласно (21), ограничена в* V, *и все ее слабо предельные точки являются решениями задачи (10). Если же* $p = 2$, *то утверждение теоремы справедливо при условии* $|q_0| < q_1 = k_0/c_1$.

Отдельно рассматривалась случай гильбертова пространства V $(p = 2)$ при условии $(q_0 \equiv 0)$. При этом справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (1), (2), (7), (19),* $\tau \in (0, 2/d)$. *Тогда вся итерационная последовательность* $\{u^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$, *построенная согласно (21), сходится слабо к некоторому решению задачи (10).*

В § 2 устанавливается ряд дополнительных свойств операторов, необходимых для сходимости итерационного процесса в случае задачи (18). При этом считаем, что функции T_1 и T_2 дополнительно удовлетворяют условиям:

$$\frac{T_1(\beta) - T_1(\gamma)}{\beta - \gamma} \leq k_2\,(\alpha + \beta + \gamma)^{p-2}\ \forall \beta, \gamma \in (0, +\infty),\ k_2 > 0,$$

где $\alpha = 1$ при $p \geq 2$, $\alpha = 0$ при $1 < p < 2$,

$$\frac{T_2(\beta) - T_2(\gamma)}{\beta - \gamma} \leq k_3\,(1 + \beta + \gamma)^{\sigma - 1} \quad \forall \beta, \gamma \in (0, +\infty),\ k_3 > 0,\ \sigma > 1,\ p > 1.$$

При выполнении этих условий оператор A является ограниченно липшиц-непрерывным, при $p = 2$ – обратно сильно монотонным и, кроме того, потенциальным. Оператор B является потенциальным и липшиц-непрерывным. Операторы H и D являются потенциальными и ограниченно липшиц-непрерывными.

жения равновесия бесконечно длинной мягкой оболочки, закрепленно й краям, находящейся под воздействием внешних сил и ограниченной в п мещениях препятствием. Математически задача сформулирована в виде зивариационного неравенства в банаховом пространстве. Доказана тео р существования.

В § 1 формулируется поточечная постановка задачи и описывается пер е от поточечной постановки к вариационной.

Рассматривается задача об определении положения равновесия растя мой бесконечно длинной цилиндрической оболочки, закрепленной по кр а находящейся под воздействием поверхностных и массовых сил и ограни ной в перемещениях препятствием. Деформации и перемещения допуска ю конечными.

Рассматриваемый класс задач сводится к изучению деформаций в п речном сечении оболочки. Введем в плоскости поперечного сечения дека р ву систему координат Ox_1x_2 таким образом, чтобы точки закрепления к р оболочки имели координаты $(0,0)$ и $(l,0)$. Считаем, что длина оболоч недеформированном состоянии равна l. Положение оболочки в плоскост и перечного сечения будем описывать вектор-функцией $w(s) = (w_1(s), w_2$ где $0 \leq s \leq l$ – лагранжева координата, выбранная так, что длина лочки, отсчитываемая в недеформированном состоянии от точки $(0,0)$ текущей, равна s (т.е. s – натуральный параметр при описании недефо р рованной оболочки). Деформация оболочки характеризуется степенью у д нения $\lambda(w) = |w'|/|\mathring{w}'|$, $\mathring{w}$ – функция, описывающая положение оболоч недеформированном состоянии $\mathring{w} = (\mathring{w}_1, \mathring{w}_2) = (s, 0), s \in [0, l]$.

Относительно функции T, характеризующей материал оболочки, пре д лагаем, что она удовлетворяет условиям:

$$T(\xi) = 0,\ \xi \leq 1 \quad \text{(оболочка не воспринимает сжимающих усилий)},$$

$$T\ -\ \text{непрерывная, неубывающая},$$

Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеют вид:

$$D + \lambda P_0 = 0, \qquad \text{где} \quad D(w(s)) = \left(T(\lambda)\frac{w'}{|w'|}\right)' + \lambda\tilde{q} + \tilde{f},$$

которые дополняются граничными условиями

$$w(0) = (w_1(0), w_2(0)) = (0,0),\ w(l) = (w_1(l), w_2(l)) = (l, 0).$$

ния, а также построении и исследовании методов их численной реализации.

Достоверность результатов работы обеспечивается строгими математическими доказательствами, сравнением результатов численных экспериментов с полученными точными решениями для модельных задач.

Практическая значимость. Приведенные в диссертационной работе исследования могут быть использованы при решении конкретных задач теории мягких оболочек.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на IX Всероссийской школе-семинаре "Современные проблемы математического моделирования"(п. Абрау-Дюрсо, 2001 г.), научной конференции "Актуальные проблемы математического моделирования и информатики"(г. Казань, 2002 г.), 4-м и 5-м Всероссийском семинаре "Сеточные методы для краевых задач и приложения"(г. Казань, 2002 г., 2004 г.), весенних математических школах "Понтрягинские чтения - XIV", "Понтрягинские чтения - XV" – "Современные методы теории краевых задач"(г. Воронеж, 2003 г., 2004 г.), 12-й Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (г. Владимир, 2003 г.), Международной конференции "Ломоносов 2004"(Москва, 2004г.), Международной конференции по вычислительной математике МКВМ -2004 (г. Новосибирск, 2004г.), Международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики"(г. Казань, 2004 г.), итоговых научных конференциях Казанского университета за 2001-2004 г.г., научных семинарах кафедры вычислительной математики КГУ и лаборатории математического моделирования Института информатики КГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы и изложена на 134 страницах, содержит 24 рисунка. Список литературы состоит из 106 наименований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 03-01-00380, 04-01-00821) и КЦФЕ Минобразования России (проект А03-2.8-660)

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждается актуальность темы исследований, формулируется цель работы, проводится обзор литературы, прилегающей к тематике диссертации.

В **первой** главе приводится постановка задачи об определении поло-

Для задачи (18) получены достаточные условия сходимости метода и у
новлено утверждение, аналогичное сформулированному в теореме 5. В
чае, когда следящая нагрузка отсутствует, и функции, задающие физиче
соотношения в нитях, имеют линейный рост на бесконечности, установ л
утверждение, аналогичное сформулированному в теореме 6.

Реализация метода (21) осуществляется следующим образом. Сна ч
определяется v, как решение уравнения $Jv = \tau\,(f - Pu^n)$, где $P = A + q_0$
для задачи (10), $P = A+D+q_0\,(B+H)$ – для задачи (18). Затем определя
$u_*^{n+1} = u^n + v$ и вычисляется $u^{n+1} = P_K(u_*^{n+1})$, P_K – оператор проектирова
в V на множество K.

В **четвертой** главе проводится анализ результатов численных эксп
ментов по решению нелинейных задач теории мягких оболочек, в сл у
$V = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}\,(0,l)\right]^2$. Приближенное решение задачи осуществлялось на о
ве ее конечноэлементной аппроксимации с использованием кусочно – ли
ных функций и последующим применением предложенных в третьей г л
методов. Выход из итерационных процессов осуществлялся при достиж е
относительной разности на двух соседних итерациях заданной точности

Изложенный алгоритм решения задач реализован в виде комплекса
грамм в среде MATLAB. Программа выполнена в соответствии с модуль
принципом, что позволило осуществить раздельное программирование,
ладку и тестирование составных частей пакета программ, а также прос
модернизацию и настройку пакета на решение задач различного уровня с л
ности. Проведен анализ результатов численных экспериментов.

В § 1 приведены результаты вычислительных экспериментов, и пров е
анализ этих результатов для задач об определении положения равнов е
бесконечно длинных мягких оболочек.

Вычислительные эксперименты проводились в двух направлениях.

Во – первых исследовалось поведение погрешности между точным и
ближенным решением в зависимости от числа узлов сетки при конечноме р
аппроксимации, от значений итерационного параметра и т.д.

Во – вторых, эмпирическим путем определялись оптимальные итерац
ные параметры. При этом варьировалось количество узлов сетки.

Проведя анализ экспериментов, мы выявили следующие закономерно

– как и ожидалось, погрешность между точным и приближенным р е
нием уменьшается с увеличением количества узлов сетки. При этом пог р

ность зависит не только от количества узлов сетки, но и от расстояния между границей коинцидентного множества и ближайшей точки сетки вне его;

– оптимальное значение итерационных параметров следует выбирать близким к критическому значению (т.е значению при котором итерационный процесс перестает сходиться).

В § 2 главы 4 приведены вычислительные эксперименты для ряда модельных задач определения положения равновесия мягкой сетчатой оболочки вращения, аналогичные проведенным выше.

Выделим **основные результаты работы.**

1. Доказана разрешимость квазивариационных неравенств с псевдомонотонными операторами в банаховых пространствах, возникающих при описании задач об определении положения равновесия бесконечно длинных мягких сетчатых оболочек, ограниченных абсолютно жестким и абсолютно гладким препятствием.

2. Построены математические модели осесимметричных задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек вращения в виде вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами в банаховых пространствах. Доказана разрешимость вариационных неравенств.

3. Предложены приближенные методы решения задач об определении положения равновесия бесконечно длинных мягких сетчатых оболочек и осесимметричных задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек вращения. Получены достаточные условия сходимости этих методов.

4. Построены точные решения для ряда модельных задач об определении положения равновесия бесконечно длинных мягких сетчатых оболочек. Разработан комплекс программ, реализующий рассмотренные методы. Проведены численные расчеты, подтвердившие эффективность предложенных алгоритмов.

Список работ по теме диссертации

1. Бадриев И.Б. Математическое моделирование плоских стационарных задач теории мягких оболочек с невыпуклым достижимым множеством /Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Бандеров В.В. // Совр. пробл. матем. моделирния. Матер. IX Всерос. школы-семинара (Абрау-Дюрсо, 8-13 сентября 2001 г.), Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ГУ. - 2001. - С. 33-36.

2. Бадриев И.Б. Постановка и исследование стационарных задач теории

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическое моделирование является од из наиболее эффективных способов решения задач, возникающих в раз ных практических областях - механике, физике, экономике, биологии, м цине и т.д. Многие из этих задач описываются уравнениями и неравенства частными производными. В связи с этим особое внимание уделяется мет их решения. Поскольку возникающие здесь задачи сложны и, как прав нелинейны, то для их решения необходимо использовать численные мет

К настоящему времени достаточно полно изучены методы решения в ационных неравенств с сильно монотонными и максимально монотонн операторами на выпуклых замкнутых множествах в гильбертовых прост ствах. Методы же решения вариационных неравенств с псевдомонотонн операторами в банаховых пространствах, в особенности, в невыпуклом чае, мало разработаны. Тем не менее, при математическом моделиров широких классов нелинейных задач механики сплошной среды, в частн задач теории мягких оболочек, возникает потребность в решении именн ких вариационных неравенств. Следует отметить, что задачи теории мя оболочек находят многочисленные приложения в механике, биомеханике, проектировании различных конструкций из тканевых и пленочных мате лов. Описанию этих задач, построению методов их решения, посвящен ширная литература. Однако соответствующий математический аппарат вит весьма слабо.

Поэтому изучение рассматриваемых в диссертации вопросов являетс туальным, как с теоретической, так и с практической точек зрения зада

Цель исследований. Основная цель работы состоит в построении и следовании математических моделей задач об определении положения ра весия мягких сетчатых оболочек, построении и исследовании приближен методов их решения.

Методы исследований. При изучении рассматриваемых в работе з широко используются методы теории псевдомонотонных операторов, н нейного функционального анализа, выпуклого анализа, численного анал

Научная новизна.

Все результаты работы являются новыми и состоят в исследовании ра шимости математических моделей задач, возникающих при моделиров мягких сетчатых бесконечно длинных оболочек при наличии препятств осесимметричных задач, возникающих при моделировании оболочек вр

Работа выполнена в Казанском государственном университете

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Бадриев Ильдар Бурханович, кандидат физико-математических наук, доцент Задворнов Олег Анатольевич.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Паймушин Виталий Николаевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Копысов Сергей Петрович.
Ведущая организация:	Институт Математического Моделирования Российской Академии Наук

Защита состоится 23 июня 2005 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного Совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета

Автореферат разослан 21 мая 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного Совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент О.А. Задворнов

мягких оболочек с невыпуклым достижимым множеством /Бадриев И Задворнов О.А., Бандеров В.В. // Иссл. по прикладной математике и форматике, Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва. - 2001. - Вып. 23. - С.

3. Бадриев И.Б. Задача о равновесном положении нити с невупуклым стижимым множеством /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // туальные проблемы матем. моделирования и информатики. Матер. нау ч конференции (Казань, 30.01.2002 - 06.02.2002 г.) - Казань: Изд-во Каза матем. об-ва. - 2002. - С. 25-29.

4. Бадриев И.Б. О численном решении одномерных задач теории мя оболочек /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Сеточные мет для краевых задач и приложения. Матер. 4-го Всеросс. сем. Казань: Из Казанского матем. общества. - 2002. - С. 17-18.

5. Бадриев И.Б. О решении задач теории мягких оболочек с препятс ем /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Современные мет теории краевых задач. Матер. Воронежской весенней матем. школы "П рягинские чтения - XIV". (Воронеж, 3-9 мая 2003г.) - Воронеж: Изд-во В нежского госуниверситета. - 2003. - С. 10-11.

6. Бадриев И.Б. Численные методы решения задач теории мягких об чек с препятствием /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. //Те докладов Двенадцатой Междун. конференции по вычислительной меха и современным прикладным системам,(Владимир, 30 июня - 5 июля 200 - М.: Изд-во МАИ. - 2003. - С. 74 - 75.

7. Бадриев И.Б. Исследование задачи о контакте нити с препятст /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Исследования по прик ной математике и информатике, Казань: Изд-во Казанского госуниверси - 2003. - Вып. 24. - С. 3-11.

8. Бандеров В.В. Численное решение вариационных неравенств, возн ющих в теории мягких сетчатых оболочек /Бандеров В.В., Задворнов // Матер. Междун. конференции "Ломоносов 2004" (Москва, 10-13 ап 2004 г.), М.: Изд-во МГУ. - 2004. - С. 3.

9. Бадриев И.Б. Приближенное решение некоторых задач теории мя сетчатых оболочек /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Со менные методы теории краевых задач. Матер. Воронежской весенней ма школы "Понтрягинские чтения - XV". (Воронеж, 3-9 мая 2004 г.) - Воро Изд-во Воронежского госуниверситета. - 2004. - С. 19-20.

10. Бадриев И.Б. Постановка и численное исследование стационарной з

чи о контакте мягкой оболочки с препятствием /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Труды Междун. конференции по вычислительной математике МКВМ -2004. Ч. I / Под ред. Г.А.Михайлова, В.П.Ильина, Ю.М. Лаевского. (Новосибирск, 21-25 июня 2004 г.)- Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. - С. 390-395.

11. Бадриев И.Б. О численном решении задач о равновесии мягких осесимметричных оболочек /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Матер. 5-го Всеросс. сем. (Казань, 17-21 сентября 2004 г.) Казань: Казанский государственный университет. - 2004. - С. 14-16.

12. Бадриев И.Б. Постановка и численное решение стационарных осесимметричных задач теории мягких оболочек /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А.// Труды Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т. 25. Матер. Междун. научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики". (Казань, 15-20 сентября 2004 г.) - Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 2004. - С. 38-39.

13. Бадриев И.Б. Постановка и численное исследование осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения /Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. // Иссл. по прикладной математике и информатике, Казань: Казанский госуниверситет. - 2004. - Вып. 25. - С. 3-27.

Подписано в печать 18.05.2005
Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16
Гарнитура "Таймс". Печать ризографическая. Усл. печ. л. 0.93
Уч.-изд. л. 1.03. Тираж 100 экз. Заказ 5/45

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии издательского центра
Казанского государственного университета
420008, г. Казань, ул. Университетская, 17
Тел. (8432) 92-65-60

На правах рукописи

Бандеров Виктор Викторович

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ МЯГКИХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2005