

На правах рукописи

Багаев Андрей Владимирович

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ
НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР
НА ОРБИОБРАЗИЯХ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2006

Работа выполнена на кафедре геометрии и высшей алгебры механико-математического факультета Нижегородского государственного университета имени Н.И. Лобачевского.

Научный руководитель кандидат физико-математических наук,
доцент Жукова Нина Ивановна

Официальные оппоненты доктор физико-математических наук,
профессор Степанов Сергей Евгеньевич;
кандидат физико-математических наук,
Иваньшин Петр Николаевич

Ведущая организация Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится года в часов на заседании Диссертационного совета Д.212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. н., доцент

Малахальцев М.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы Понятие орбиобразия введено И. Сатаки (I. Satake) под названием V -многообразия. Сам термин орбиобразие предложен У. Терстоном (W.P. Thurston).

Орбиобразия естественным образом появляются и используются в различных областях математики и теоретической физики: в теории струн, в симплектической геометрии, в деформационном квантовании.

Орбиобразия возникают в теории слоений в качестве "хороших" пространств слоев. Как доказано в [1], из существования собственного слоя с конечной группой голономии для трансверсально полного риманова слоения вытекает, что все слои этого слоения собственные, замкнутые, имеют конечные группы голономии, а пространство слоев является орбиобразием. Верно и обратное [2], каждое орбиобразие является пространством слоев некоторого трансверсально полного риманова слоения с замкнутыми слоями. Известно также, что компактное слоение имеет в качестве пространства слоев орбиобразие тогда и только тогда, когда оно локально стабильно.

У. Терстон использовал двумерные орбиобразия при классификации трехмерных многообразий.

Гладкое орбиобразие является одним из естественных обобщений гладкого многообразия: в качестве модельного пространства берется не $\mathbb{R}^n$, а фактор-пространство $\mathbb{R}^n$ по конечной группе диффеоморфизмов Γ , при этом группа Γ не является фиксированной и может меняться при переходе от одной окрестности орбиобразия к другой.

Гладкие орбиобразия образуют категорию, которая является подкатегорией категории A -пространств М.В. Лосика [3].

Для гладкого орбиобразия естественным образом вводится понятие стратификации. Изоморфизм координатных окрестностей в категории орбиобразий соответствует эквивалентным действиям одной и той же группы Γ на $\mathbb{R}^n$. Мы говорим, что две точки орбиобразия имеют один

орбифолдный тип, если у них существуют изоморфные координатные окрестности. На множестве точек одного орбифолдного типа индуцируется структура гладкого, вообще говоря, несвязного многообразия. Стратификацией n -мерного орбиобразия $\mathcal{N}$ называется его разбиение $\Delta(\mathcal{N}) = \{\Delta_k\}$ на k -мерные, вообще говоря, несвязные подмногообразия Δ_k , где k принимает значения в множестве $\{0, 1, \dots, n\}$. При этом каждая компонента связности многообразия Δ_k образована точками одного орбифолдного типа. Таким образом, гладкие орбиобразия являются стратифицированными пространствами, причем указанная стратификация совпадает с известной стратификацией орбиобразия [4].

Поскольку страта максимальной размерности Δ_n n -мерного орбиобразия $\mathcal{N}$ является связным открытым всюду плотным подмногообразием в $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N} = \Delta_n$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}$ — многообразие, то орбиобразие можно рассматривать также как n -мерное многообразие с особенностями, где под особенностями понимаются страты размерности $< n$.

Первой работой по римановой геометрии орбиобразий является статья И. Сатаки [5], где он распространил теорему Гаусса–Бонне на римановы орбиобразия. К. Ситон [4] обобщил теоремы Гаусса–Бонне и Пуанкаре–Хопфа на римановы орбиобразия с краем.

Римановой геометрии орбиобразий посвящены работы Ж. Борзелино [6, 7], Ж. Борзелино и С. Жу [8]. Ж. Борзелино получил обобщения на орбиобразия некоторых результатов римановой геометрии многообразий. В частности, им доказано [7], что компактное n -мерное риманово орбиобразие с неотрицательной кривизной Риччи и первым числом Бетти $b_1(\mathcal{N}) = n$ изометрично n -мерному плоскому тору.

Ж. Борзелино и В. Брансденом [9] показано, что топологическая структура гладкого компактного орбиобразия определяется его группой диффеоморфизмов.

Взаимосвязи между кривизнами римановых орбиобразий и их груп-

пами изометрий, а также влиянию стратификаций на размерности групп изометрий римановых орбиобразий и групп автоморфизмов орбиобразий аффинной связности посвящены статьи диссертанта и Н.И. Жуковой [14, 18, 20, 23], а также диссертанта [24, 25].

Группы автоморфизмов различных геометрических структур на многообразиях исследовались ван Данцигом (van D. Dantzig) и ван дер Варденом (van der B.L. Waerden), Ш. Эресманом (С. Ehresmann), А. Лихнеровичем (А. Lichnerowicz), Д. Монтгомери (D. Montgomery), Л. Циппином (L. Zippin), П. Либерманн (P. Libermann), Р. Пале (R. Palais), С. Бохнером (S. Bochner), С. Стернбергом (S. Sternberg), К. Яно (К. Yano), Т. Нагано (T. Nagano), Ш. Кобаяси (S. Kobayashi), Е. Ру (E.A. Ruh), Х. Ямабе (H. Yamabe), Н. Танака (N. Tanaka), Х. Чжу (H. Chu).

Инфинитезимальным группам автоморфизмов римановых многообразий и многообразий аффинной связности, а также оценкам их размерностей посвящены работы И.П. Егорова [10]. Исследованию и классификации римановых пространств по группам проективных преобразований посвящены труды Г. Фубини (G. Fubini), А.С. Солодовникова. А.В. Аминовой и ее учениками решается проблема классификации лоренцевых многообразий по алгебрам Ли проективных и аффинных преобразований [11].

Одной из центральных задач дифференциальной геометрии является вопрос о том, когда группа автоморфизмов геометрической структуры является группой Ли [12]. С. Майерс (S.B. Myers) и Н. Стинрод (N. Steenrod) доказали, что группа всех изометрий риманова многообразия, наделенная компактно-открытой топологией, есть группа Ли. К. Номидзу (K. Nomizu) показал, что группы всех автоморфизмов полного многообразия аффинной связности является группой Ли. Позже Дж. Ханно (J. Hano) и А. Моримото (A. Morimoto) получили этот результат без предположения полноты аффинной связности. Теорема о том, что группа автоморфизмов G -структуры конечного ти-

па на многообразии допускает структуру группы Ли, принадлежит Ш. Эресману. Известно также, что группа изометрий n -мерного риманова многообразия имеет максимальную размерность $n(n+1)/2$ только тогда, когда оно является одним из следующих n -мерных римановых многообразий постоянной кривизны: евклидово пространство $\mathbb{E}^n$; сфера S^n ; проективное пространство $\mathbb{R}P^n$; односвязное гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$, а размерность группы автоморфизмов n -мерного многообразия аффинной связности $\mathcal{N}$ максимальна и равна $n^2 + n$ только тогда, когда $\mathcal{N}$ есть обычное n -мерное аффинное пространство $\mathbb{A}^n$.

Исследованию групп автоморфизмов некоторых классов геометрических структур на орбиобразиях в зависимости от топологических свойств стратификаций орбиобразий посвящена данная диссертационная работа.

Одним из аналитических методов глобальной дифференциальной геометрии является техника Бохнера, основанная на получении и использовании интегральных формул. Этот метод нашел развитие и применение в трудах А. Лихнеровича, К. Номидзу, Б.-Я. Чена (В.-Y. Chen), К. Яно, а также отечественных геометров Н.С. Синюкова и С.Е. Степанова.

Интегральные формулы для орбиобразий применяется нами при получении аналогов указанных ниже теорем Бохнера и Яно для римановых орбиобразий.

Цель диссертационной работы — исследование взаимосвязи между кривизнами, стратификациями и размерностями групп автоморфизмов римановых орбиобразий и орбиобразий аффинной связности.

Методы исследования В диссертации применяются результаты и методы локальной и глобальной дифференциальной геометрии, теории групп Ли преобразований, а также теории расслоенных пространств.

Научная новизна Все результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

1. Доказана теорема о том, что группа $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ всех изометрий произвольного n -мерного риманова орбиобразия $\mathcal{N}$, наделенная компактно-открытой топологией, является группой Ли преобразований $\mathcal{N}$ размерности $\dim \mathcal{I}(\mathcal{N}) \leq \frac{n(n+1)}{2}$, причем равенство $\dim \mathcal{I}(\mathcal{N}) = \frac{n(n+1)}{2}$ возможно только в случае, когда $\mathcal{N}$ изометрично одному из следующих n -мерных римановых многообразий постоянной кривизны: а) евклидову пространству $\mathbb{E}^n$; б) сфере S^n ; в) проективному пространству $\mathbb{RP}^n$; г) односвязному гиперболическому пространству $\mathbb{H}^n$ (теорема 3.2.1).
2. Доказана теорема о конечности группы изометрий компактного риманова орбиобразия с неположительно определенным тензором Риччи, имеющего точку, в которой тензор Риччи отрицательно определен (аналог теоремы Бохнера) (теорема 3.2.2).
3. Найдены оценки размерности группы автоморфизмов n -мерного орбиобразия аффинной связности в следующих двух случаях: когда орбиобразие допускает k -мерную страту, и когда орбиобразие допускает незамкнутую k -мерную страту, где $k < n$ в обоих случаях, а также доказана точность полученных оценок (теорема 3.1.2, предложение 3.1.5). Таким образом показано как существование орбифолдных точек орбиобразия аффинной связности уменьшает размерность его группы автоморфизмов.
4. Доказана теорема о совпадении компонент связности единицы группы Ли $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ всех изометрий и группы Ли $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ всех аффинных преобразований компактного риманова орбиобразия $\mathcal{N}$ (аналог теоремы Яно). С помощью этой теоремы получены оценки размерности группы аффинных преобразований собственного риманова орбиобразия, имеющего либо компактную компонен-

ту связности страты, либо незамкнутую компоненту связности, замыкание которой компактно. Доказана точность полученных оценок (теорема 3.3.1, следствие 3.3.1, теорема 3.3.2, предложение 3.3.1).

Теоретическая и практическая значимость Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты могут использоваться при исследовании геометрии орбиобразий, в теории слоений и расслоений, применены в теоретической и математической физике, а также в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов-математиков.

Апробация Результаты диссертационной работы докладывались: на международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (Тула, ТГПУ, 2003); на международной конференции "Колмогоров и современная математика" (Москва, МГУ, 2003); на международной конференции "Неевклидова геометрия в современной физике и математике" (Н. Новгород, ННГУ, 2004); на международной конференции "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ" (Москва, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2005); на международных летних школах-семинарах по современным проблемам теоретической и математической физики "Петровские чтения" (Казань, КГУ, 2003, 2004, 2005); дважды на всероссийских молодежных научных школах-конференциях "Лобачевские чтения" (Казань, КГУ, 2003, 2005).

По теме диссертации сделаны доклады: на геометрических семинарах кафедры геометрии и высшей алгебры ННГУ (рук. доц. Н.И. Жукова и проф. Е.И. Яковлев); на семинаре кафедры теории статистических решений факультета ВМК ННГУ (сентябрь 2006 г., рук. проф. А.П. Колданов); а также на трех конференциях студентов и аспирантов механико-математического факультета ННГУ (2002, 2003, 2006).

По результатам диссертации сделан доклад на геометрическом семинаре кафедры геометрии КГУ (май 2006 г., рук. проф. Б.Н. Шапуков).

Исследования по теме диссертации вошли в научные проекты, поддержанные следующими грантами: грант Российского Фонда Фундаментальных Исследований (тема НИР "Слоения и расслоения со связностями и их приложения", науч. рук. Е.И. Яковлев, № 01-01-590); грант для поддержки научно-исследовательской работы аспирантов ВУЗов Министерства образования России (тема НИР "Группы автоморфизмов геометрических структур на орбиобразиях", науч. рук. Н.И. Жукова, № А03-2.8-480); ведомственная программа "Развитие научного потенциала высшей школы" (тема НИР "Группы автоморфизмов некоторых классов геометрических структур на орбиобразиях", науч. рук. Н.И. Жукова, № 4603).

Публикации и вклад соискателя Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приведен в конце автореферата. Во всех совместных работах [14]–[23] научному руководителю Н.И. Жуковой принадлежат постановки задач, руководство работой и идеи доказательств некоторых теорем.

В [14] доказательство теорем 1, 2 и 3 получено научным руководителем и диссертантом совместно. Кроме того, Н.И. Жуковой введены индуцированные группы автоморфизмов компонент связности страт орбиобразия, ею доказаны лемма 4 и теорема 5, А.В. Багаевым доказана теорема 4.

В [18] научному руководителю принадлежит доказательство предложения 2, диссертанту — доказательство предложения 1 и теоремы.

В [20] научным руководителем доказаны теоремы 1, 3, предложения 2, 4, 6, 7, 8, а соискателем — теоремы 2, 4 и предложения 1, 3, 5 и 9.

В [23] научным руководителем доказаны теорема о том, что группа автоморфизмов орбиобразия аффинной связности является группой

Ли, и утверждение о замыкании компонент связности страт. Диссертантом получены оценки размерностей групп автоморфизмов орбиобразий аффинной связности в зависимости от стратификации.

Теорема 5 из [14], а также доказательства теорем 1 и 3 из [16] не включены в диссертацию.

Результаты, анонсированные в тезисах совместных докладов [15]–[17], [19], [21], [22], включенные в диссертацию, вошли в статьи [14], [18], [20], [23].

Все результаты, выносящиеся на защиту, получены лично А.В. Багаевым.

Структура и объем работы Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы и подразделы, списка литературы и включает в себя 10 рисунков. Объем диссертации составляет 126 страниц. Список литературы состоит из 85 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы основные результаты диссертации, кратко описано ее содержание и приведен список публикаций автора по теме диссертации.

Глава 1 носит реферативный характер. В **разделе 1.1** мы напоминаем определения орбиобразия и гладкого отображения орбиобразий, введенные И. Сатаки [5] (см. также [13]).

Гладким n -мерным орбиобразием называется (определение 1.1.1) связное хаусдорфово топологическое пространство $\mathcal{N}$ со счетной базой с заданным на нем максимальным атласом карт $\mathcal{A} = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \mid i \in J\}$. *Картой* называется тройка $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i)$, где Ω_i — связное открытое подмножество в n -мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, Γ_i — конечная группа диффеоморфизмов Ω_i , а $p_i: \Omega_i \rightarrow \mathcal{N}$ — композиция фактор-отображения $r_i: \Omega_i \rightarrow \Omega_i/\Gamma_i$ и некоторого гомеоморфизма $q_i: \Omega_i/\Gamma_i \rightarrow U_i$ фактор-пространства Ω_i/Γ_i на открытое подмножество

$U_i \subset \mathcal{N}$, называемое *координатной окрестностью карты*.

Точка x орбиобразия $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ называется *регулярной*, если существует карта $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \in \mathcal{A}$ с координатной окрестностью $U_i \ni x$ такая, что $\Gamma_i = \{\text{id}_{\Omega_i}\}$. Точка, не являющаяся регулярной, называется *орби-фолдной*, а орбиобразие, имеющее орбифолдную точку, — *собственным* орбиобразием.

Непрерывное отображение $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$ гладкого орбиобразия $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ в гладкое орбиобразие $(\mathcal{N}', \mathcal{A}')$ называется *гладким* (определение 1.1.6), если для любой точки $x \in \mathcal{N}$ существуют: а) карта $(\Omega, \Gamma, p) \in \mathcal{A}$ с координатной окрестностью $U \ni x$; б) карта $(\Omega', \Gamma', p') \in \mathcal{A}'$ с такой координатной окрестностью U' , что $f(U) \subset U'$; с) гладкое отображение $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \Omega'$ многообразия Ω в многообразии Ω' такое, что $p' \circ \tilde{f} = f|_U \circ p$.

Категорию орбиобразий мы обозначаем через $\mathfrak{Orb}$.

Отметим, что в отличие от И. Сатаки, мы не требуем, чтобы для карты (Ω, Γ, p) n -мерного орбиобразия $\mathcal{N}$ размерность множества неподвижных точек $\text{Fix}\Gamma$ группы Γ была меньше $n - 1$. Мы также не предполагаем, чтобы орбиобразия были хорошими, то есть представимыми в виде фактор-пространства гладкого многообразия по собственно разрывной группе диффеоморфизмов.

В **разделе 1.2** нами предложен новый подход к стратификации $\Delta(\mathcal{N}) = \{\Delta_k\}_{k \in \{0, \dots, n\}}$ n -мерного орбиобразия $\mathcal{N}$, эквивалентный подходу К. Ситона [4], указана связь со стратификацией в смысле М. Пфлаума (М. Pfauum). Построены примеры орбиобразий, описаны их стратификации. В этом разделе приведены известные свойства стратификации $\Delta(\mathcal{N})$ орбиобразия $\mathcal{N}$, а также свойства, доказанные Н.И. Жуковой [20, proposition 2, theorem 1], которые существенно используются в диссертационной работе.

Глава 2 посвящена G -структурам на орбиобразиях и их группам автоморфизмов. Основные результаты этой главы (теоремы 2.2.1, 2.4.1 и 2.5.1) получены совместно диссертантом и его научным руководите-

лем Н.И. Жуковой [14] и на защиту не выносятся.

В **подразделах 2.1.1 и 2.1.2** мы напоминаем принадлежащее У. Байли [13] определение расслоенного пространства над орбиобразом $\mathcal{N}$ со стандартным слоем F и структурной группой H , где F — гладкое многообразие, а H — группа Ли (см. также [5]). Как известно [5], для расслоенного пространства над орбиобразом $\mathcal{N}$ со стандартным слоем F и структурной группой Ли H естественным образом определены гладкое орбиобразие $\mathcal{P}$ размерности $\dim \mathcal{N} + \dim F$ и субмерсия орбиобразий $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$. Орбиобразие $\mathcal{P}$ называется *тотальным пространством*, $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$ — *проекцией*. Ввиду важности этого утверждения мы приводим его с доказательством (предложение 2.1.1).

В **подразделе 2.1.2** мы приводим определения векторного поля, 1-формы, тензорного поля типа (p, q) на орбиобразии, предложенные И. Сатаки [5] и У. Байли [13].

В **подразделе 2.1.3** мы даем определение касательного векторного пространства к орбиобразу, эквивалентное общепринятому определению И. Сатаки [5]. При этом касательный вектор к орбиобразу в точке определяется нами как класс гладких кривых, проходящих через эту точку. Доказано (теорема 2.1.1), что касательное векторное пространство $T_a\mathcal{N}$ к орбиобразу $\mathcal{N}$ в точке a страты Δ_k естественным образом отождествляется с касательным векторным пространством $T_a\Delta_k$ к многообразию Δ_k в a . Теорема 2.1.1 доказана диссертантом [20, theorem 2].

В **разделе 2.2**, следуя И. Сатаки [5], мы приводим определения главного расслоенного пространства, расслоения линейных реперов и G -структуры на орбиобразии. Если структурная группа $GL(n, \mathbb{R})$ расслоения линейных реперов над $\mathcal{N}$ редуцируема к подгруппе Ли $G \subset GL(n, \mathbb{R})$, то редуцированное главное расслоение называется *G -структурой на орбиобразии $\mathcal{N}$* . И. Сатаки в [5] отмечено, что тотальные пространства расслоения линейных реперов и расслоения ор-

тонормальных реперов являются гладкими многообразиями. Нами показано (теорема 2.2.1), что для произвольной G -структуры на орбиобразии ее тотальное пространство $\mathcal{R}$ является гладким многообразием размерности $n + \dim G$, а компоненты связности слоев проекции $\pi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{N}$ образуют гладкое слоение $\mathcal{F}$ коразмерности n .

В разделе 2.3 для G -структуры на орбиобразии строится ее продолжение.

Пусть H — некоторая группа автоморфизмов орбиобразия $\mathcal{N}$, допускающая структуру группы Ли. Группа H называется *группой Ли преобразований орбиобразия $\mathcal{N}$* , если отображение $\Phi: H \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}: (f, x) \mapsto f(x)$ является гладким отображением произведения орбиобразий $H \times \mathcal{N}$ в $\mathcal{N}$. В разделе 2.4 доказана следующая теорема, которую можно рассматривать как аналог теоремы Ш. Эресмана о группе автоморфизмов G -структуры конечного типа на многообразии.

Теорема 2.4.1. *Группа $\mathfrak{A}(\mathcal{N})$ автоморфизмов G -структуры конечного типа и порядка k на гладком n -мерном орбиобразии $\mathcal{N}$ является группой Ли преобразований, причем*

$$\dim \mathfrak{A}(\mathcal{N}) \leq n + \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}_1 + \dots + \dim \mathfrak{g}_{k-1},$$

где $\mathfrak{g}_i$ — i -ое продолжение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G .

Показано (предложение 2.5.1), что для любой группы Ли H преобразований орбиобразия $\mathcal{N}$ подгруппа $H(\mathcal{N}, \Delta_k^c)$ в H , состоящая из тех автоморфизмов H , которые оставляют инвариантной компоненту связности Δ_k^c страты Δ_k , является открыто-замкнутой подгруппой Ли группы Ли H . Группу $H_{\mathcal{N}}(\Delta_k^c) := \{f|_{\Delta_k^c} \mid f \in H(\mathcal{N}, \Delta_k^c)\}$ мы называем *индуцированной группой автоморфизмов компоненты связности Δ_k^c* . Понятие индуцированной группы автоморфизмов компоненты связности страты орбиобразия и доказательство предложения 2.5.1 принадлежит Н.И. Жуковой [14, лемма 4], [20, proposition 8]. Предложение 2.5.1 существенно используется нами в главе 3 при оценке размер-

ностей групп изометрий римановых орбиобразий и групп автоморфизмов орбиобразий аффинной связности. С помощью предложения 2.5.1 мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.5.1. *Размерность группы автоморфизмов G -структуры конечного типа и порядка k на гладком орбиобразии, имеющем хотя бы одну изолированную орбифолдную точку, не более, чем $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}_1 + \dots + \dim \mathfrak{g}_{k-1}$.*

Глава 3 посвящена группам автоморфизмов римановых орбиобразий и орбиобразий аффинной связности и содержит доказательства всех результатов, выносящихся на защиту.

Основные результаты **раздела 3.1** опубликованы в совместных работах диссертанта и научного руководителя [20, 23].

В подразделе **3.1.1**, следуя И. Сатаки [5] и У. Байли [13], мы напомним определения аффинной связности на орбиобразии, кручения и кривизны аффинной связности, геодезической линии, вполне геодезического подорбиобразования орбиобразования аффинной связности. Аффинной связностью на орбиобразии $\mathcal{N}$ с максимальным атласом $\mathcal{A} = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \mid i \in J\}$ называется семейство $\nabla = \{\nabla^i\}_{i \in J}$, где ∇^i — Γ_i -инвариантная аффинная связность на многообразии Ω_i , $i \in J$, удовлетворяющее условию согласования (см. определение 3.1.1).

Как доказано научным руководителем [20, theorem 3], группа $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ автоморфизмов n -мерного орбиобразования аффинной связности является группой Ли преобразований размерности $\dim \mathcal{A}(\mathcal{N}) \leq n^2 + n$. Следующее утверждение включает в себя результаты теоремы 3.1.2 и предложения 3.1.5, доказанные диссертантом [20, theorem 4, proposition 9], и выносятся на защиту (пункт 3).

Теорема. *Пусть $\mathcal{N}$ — n -мерное орбиобразование аффинной связности, $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ — группа Ли его автоморфизмов, $\Delta(\mathcal{N}) = \{\Delta_k\}_{k \in \{0, \dots, n\}}$ — стратификация $\mathcal{N}$. Тогда:*

1. Если $\Delta_k \neq \emptyset$, $k < n$, то

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{N}) \leq n^2 + n - (n - k)(2k + 1). \quad (3.4)$$

2. Если $\mathcal{N}$ — собственное орбиобразие, то $\dim \mathcal{A}(\mathcal{N}) \leq n^2$.

3. Равенство $\dim \mathcal{A}(\mathcal{N}) = n^2 + n$ выполняется только в случае, когда $\mathcal{N}$ является обычным аффинным пространством с плоской аффинной связностью $\mathbb{A}^n$.

4. Если страта Δ_k , $k < n$, незамкнута, то

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{N}) \leq n^2 + n - (n - k)(2k + 1) - k. \quad (3.5)$$

5. Оценки (3.4) и (3.5) точные.

Точность оценок (3.4) и (3.5) доказана построением для любых пар целых чисел (n, k) и (p, q) , где $0 \leq k < n$, $0 < q < p$, n -мерного орбиобразия аффинной связности $\mathcal{N}_1$, имеющего k -мерную страту, и p -мерного орбиобразия аффинной связности $\mathcal{N}_2$, имеющего незамкнутую q -мерную страту, для которых выполняются равенства $\dim \mathcal{A}(\mathcal{N}_1) = n^2 + n - (n - k)(2k + 1)$ и $\dim \mathcal{A}(\mathcal{N}_2) = p^2 + p - (p - q)(2q + 1) - q$.

Как известно, группа автоморфизмов обычного n -мерного аффинного пространства с плоской аффинной связностью $\mathbb{A}^n$ изоморфна полупрямому произведению линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$ и группы сдвигов $\mathbb{R}^n$ и имеет размерность $n^2 + n$, поэтому утверждение 3 сформулированной теоремы выполняется и в обратную сторону.

Основные результаты **раздела 3.2** опубликованы в совместных работах диссертанта и научного руководителя [14, 18]. В **подразделе 3.2.1**, следуя И. Сатаки [5] и У. Байли [13], мы напоминаем определения римановой метрики и римановой связности на орбиобразии. Римановой метрикой на орбиобразии $\mathcal{N}$ с максимальным атласом $\mathcal{A} = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \mid i \in J\}$ называется семейство $\{g_i\}_{i \in J}$, где g_i — Γ_i -инвариантная риманова метрика на многообразии Ω_i , $i \in J$, удовлетворяющее условию согласования (см. определение 3.2.1).

Согласно предложению 3.2.1 для любого риманова орбиобразия существует единственная метрическая связность без кручения, называемая *связностью Леви–Чивита*. Всюду в диссертационной работе римановы орбиобразия рассматриваются со связностью Леви–Чивита.

В подразделе 3.2.2 диссертантом доказана следующая теорема, опубликованная в [14] и выносимая на защиту (пункт 1).

Теорема 3.2.1. *Группа $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ изометрий n -мерного риманова орбиобразия $\mathcal{N}$, наделенная компактно-открытой топологией, является группой Ли размерности $\leq n(n+1)/2$, причем действие группы Ли $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ на $\mathcal{N}$ является гладким и собственным, а равенство $\dim \mathcal{I}(\mathcal{N}) = n(n+1)/2$ достигается только в случае, когда $\mathcal{N}$ изометрично одному из следующих n -мерных римановых многообразий постоянной кривизны: а) евклидову пространству $\mathbb{E}^n$; б) сфере S^n ; в) проективному пространству $\mathbb{RP}^n$; д) односвязному гиперболическому пространству $\mathbb{H}^n$.*

В случае, когда $\mathcal{N}$ — многообразие, теорема 3.2.1 включает в себя классическую теорему Майерса–Стинрода. Хорошо известно, что группы изометрий n -мерных римановых многообразий постоянной кривизны, указанных в теореме 3.2.1, имеют размерность $n(n+1)/2$, поэтому равенство $\dim \mathcal{I}(\mathcal{N}) = n(n+1)/2$ для n -мерного риманова орбиобразия $\mathcal{N}$ возможно тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}$ изометрично одному из указанных в теореме 3.2.1 римановых многообразий.

Подраздел 3.2.3 посвящен доказательству следующей теоремы, принадлежащей диссертанту [18] и выносимой на защиту (пункт 2).

Теорема 3.2.2. *Пусть $\mathcal{N}$ — компактное риманово орбиобразие с неположительно определенным тензором Риччи, причем существует точка, в которой тензор Риччи отрицательно определен. Тогда группа изометрий риманова орбиобразия $\mathcal{N}$ конечна.*

Следствие 3.2.2. *Группа изометрий компактного риманова орбиобразия с отрицательно определенным тензором Риччи конечна.*

В случае, когда риманово орбиобразия является римановым многообразием, утверждение следствия 3.2.2 совпадает с известной теоремой Бохнера. Из теоремы 3.2.2, в частности, вытекает, что группа изометрий компактного риманова орбиобразия постоянной отрицательной кривизны конечна (следствие 3.2.3).

При доказательстве теоремы 3.2.2 мы использовали интегрирование на орбиобразиях [13, 5] и аналог формулы Грина для компактных орбиобразий.

Как доказано Н.И. Жуковой [14, лемма 4], если n -мерное риманово орбиобразия $\mathcal{N}$ допускает k -мерную страту Δ_k , $k < n$, то имеет место оценка

$$\dim \mathcal{J}(\mathcal{N}) \leq n(n+1)/2 - (n-k)(k+1); \quad (3.11)$$

если при этом страта Δ_k незамкнута, то

$$\dim \mathcal{J}(\mathcal{N}) \leq n(n+1)/2 - (n-k)(k+1) - k. \quad (3.12)$$

Имеет место следующее утверждение, доказанное диссертантом [14, теорема 4] с использованием оценки (3.11).

Предложение 3.2.6. *Если $\mathcal{N}$ — собственное орбиобразия, то $\dim \mathcal{J}(\mathcal{N}) \leq n(n-1)/2$. Равенство $\dim \mathcal{J}(\mathcal{N}) = n(n-1)/2$ влечет $\Delta_k = \emptyset$ для всех $k \in \{1, \dots, n-2\}$. Если $\dim \mathcal{J}(\mathcal{N}) = n(n-1)/2$, причем $\Delta_{n-1} \neq \emptyset$, то каждая компонента связности Δ_{n-1}^c страты Δ_{n-1} является одним из следующих $(n-1)$ -мерных римановых многообразий постоянной кривизны: а) $\mathbb{E}^{n-1}$; б) S^{n-1} ; в) $\mathbb{RP}^{n-1}$; г) $\mathbb{H}^{n-1}$.*

Согласно предложению 3.2.7 оценки (3.11) и (3.12) являются точными. Точность этих оценок проверена путем построения для любых пар целых чисел (n, k) и (p, q) , где $0 \leq k < n$, $0 < q < p$, n -мерного риманова орбиобразия $\mathcal{N}_1$, имеющего k -мерную страту, и p -мерного риманова орбиобразия $\mathcal{N}_2$, имеющего незамкнутую q -мерную страту, для которых имеют место равенства $\dim \mathcal{J}(\mathcal{N}_2) = n(n+1)/2 - (n-k)(k+1)$ и $\dim \mathcal{J}(\mathcal{N}_2) = p(p+1)/2 - (p-q)(q+1) - q$.

Раздел 3.3 посвящен группам аффинных преобразований римановых орбиобразий. Результаты данного раздела опубликованы в работах диссертанта [24, 25] и выносятся на защиту (пункт 4). Показано, что любое инфинитезимальное аффинное преобразование компактного риманова орбиобразия является киллинговым векторным полем (теорема 3.3.1). Отсюда вытекает, что компоненты связности единицы в группе Ли $\mathcal{J}(\mathcal{N})$ всех изометрий и в группе Ли $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ всех аффинных преобразований компактного риманова орбиобразия $\mathcal{N}$ совпадают (следствие 3.3.1). Это распространяет известную теорему Яно для римановых многообразий на римановы орбиобразия. Используя следствие 3.3.1 и полученные ранее оценки размерностей групп автоморфизмов орбиобразий аффинной связности (раздел 3.1) и групп изометрий римановых орбиобразий (раздел 3.2), доказана следующая теорема.

Теорема 3.3.2. *Пусть $\mathcal{N}$ — n -мерное риманово орбиобразие и $\{\Delta_k\}$ — его стратификация. Тогда:*

1) если компонента связности Δ_k^c страты Δ_k , $k < n$, компактна, то

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{N}) \leq n^2 + n - (n - k)(2k + 1) - k(k + 1)/2; \quad (3.22)$$

2) если замыкание $\overline{\Delta_k^c}$ компоненты связности Δ_k^c , $k < n$, компактно и $\overline{\Delta_k^c} \neq \Delta_k^c$, то

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{N}) \leq n^2 + n - (n - k)(2k + 1) - k - k(k + 1)/2. \quad (3.23)$$

Согласно предложению 3.3.2 оценки (3.22) и (3.23) являются точными, то есть для любых пар целых чисел (n, k) и (p, q) , где $0 \leq k < n$, $0 < q < p$, существуют n -мерное риманово орбиобразие $\mathcal{N}_1$, допускающее компактную компоненту связности Δ_k^c k -мерной страты, и p -мерное риманово орбиобразие $\mathcal{N}_2$, допускающее такую незамкнутую

компоненту связности Δ_q^c q -мерной страты, что ее замыкание $\overline{\Delta_q^c}$ компактно, для которых выполняются равенства

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{N}_1) = n^2 + n - (n - k)(2k + 1) - k(k + 1)/2,$$

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{N}_2) = p^2 + p - (p - q)(2q + 1) - q - q(q + 1)/2.$$

Список литературы

- [1] Zhukova, N. On the stability of leaves of Riemannian foliations / N. Zhukova // Ann. Global Anal. and Geom. – 1987. – Vol. 5, № 3. – P. 261–271.
- [2] Жукова, Н.И. Моделирование орбиобразий римановыми слое- ниями / Н.И. Жукова // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования : тез. докладов Международной научной конференции (Воронеж, 12 – 17 декаб- ря 2005). – Воронеж, 2005. – С. 94.
- [3] Лосик, М.В. О характеристических классах структур на много- образиях / М.В. Лосик // Функцион. анализ и его прил. – 1987. – Т. 21, № 3. – С. 38–52.
- [4] Seaton, C. Two Gauss-Bonnet and Poincarre-Hopf theorems for orbifolds with boundary / Christopher W. Seaton. – Ph. D. Thesis, University of Colorado at Boulder, 2004 (www.arxiv.org/math.DG/0311075).
- [5] Satake, I. The Gauss-Bonnet theorem for V -manifolds / I. Satake // J. Math. Soc. Japan. – 1957. – Vol. 9. – P. 464–492.
- [6] Borzellino, J.E. Orbifolds of Maximal diameter / J.E. Borzellino // Indiana U. Math. – 1993. – Vol. 42. – P. 37–53.

- [7] Borzellino, J.E. Orbifolds with Ricci curvature bounds / J.E. Borzellino // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – Vol. 125, № 10. – P. 3001–3018.
- [8] Borzellino, J.E. The splitting theorem for orbifolds / J.E. Borzellino, S. Zhu // Illinois J. Math. – 1994. – Vol. 38. – P. 679–691.
- [9] Borzellino, J.E. The splitting theorem for orbifolds / J.E. Borzellino, V. Brunsden // Journal of Lie Theory. – 2003. – Vol. 13. – P. 311–327.
- [10] Егоров, И.П. Движения в пространствах аффинной связности / И.П. Егоров. – Казань : КГУ, 1965.
- [11] Аминова, А.В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий / А.В. Аминова. – М. : Янус-К, 2002. – 619 с.
- [12] Кобаяси, Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси. – М. : Наука, 1986. – 224 с.
- [13] Baily, W. L. Jr. The decomposition theorem for V -manifolds / W. L. Jr. Baily // Amer. J. of Math. – 1956. – Vol. 78, № 4. – P. 862–888.

Публикации автора по теме диссертации

- [14] Багаев, А.В. Группы автоморфизмов G -структур конечного типа на орбиобразиях / А.В. Багаев, Н.И. Жукова // Сиб. Мат. Журнал. – 2003. – Т. 44, № 2. – С. 263–278.
- [15] Багаев, А.В. Группы преобразований G -структур конечного типа на орбиобразиях / А.В. Багаев, Н.И. Жукова // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения : тез. докл. V Международной конференции (Тула, 19–24 мая 2003 г.). – Тула : Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2003. – С. 20–21.

- [16] Bagaev, A.V. Automorphisms of G-structures on orbifolds / A.V. Bagaev, N.I. Zhukova // Kolmogorov and contemporary mathematics : abstracts of the International conference in commemoration of the centennial of A.N. Kolmogorov (Moscow, 16–21 June, 2003). – Moscow : MSU, 2003. – P. 787–788.
- [17] Багаев, А.В. Аналог теоремы Бохнера для орбиобразий / А.В. Багаев, Н.И. Жукова // Петровские чтения : тез. докл. XV Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики (Казань, 22 июня – 3 июля, 2003 г.). – Казань, 2003. – С. 17–18.
- [18] Багаев, А.В. Римановы орбиобразия с малыми группами изометрий / А.В. Багаев, Н.И. Жукова // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань : Изд-во казанского матем. общества. – 2003. – Т. 21. – С. 67–71.
- [19] Багаев, А.В. Обобщенные локально симметрические орбиобразия / А.В. Багаев, Н.И. Жукова // Петровские чтения : тез. докл. XVI Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики (Казань, 22 июня – 3 июля 2004 г.). – Казань, 2004. – С. 15–16.
- [20] Bagaev, A.V. Affinely connected orbifolds and their automorphisms / A.V. Bagaev, N.I. Zhukova // Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics : Proceedings of the International Conference BGL-4 (Bolyai-Gauss-Lobachevsky) (Nizhny Novgorod, Sept. 7–11, 2004). – Kiev : ИТФ НАН України, 2004. – P. 31–48.
- [21] Багаев, А.В. Взаимосвязь кривизны, стратификации и группы изометрий риманова орбиобразия / А.В. Багаев, Н.И. Жукова // Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ : тез. докл. Международной конференции, посвящен-

ной столетию академика С.М. Никольского (Москва, 23–29 мая 2005г.). – М. : Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2005. – С. 41.

- [22] Багаев, А.В. Группы автоморфизмов орбиобразий аффинной связности / А.В. Багаев, Н.И. Жукова // Петровские чтения : тез. докл. XVII Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики (Казань, 22 июня – 3 июля, 2005 г.). – Казань, 2005. – С. 15–16.
- [23] Багаев, А.В. Стратификации и группы автоморфизмов орбиобразий аффинной связности / А.В. Багаев, Н.И. Жукова // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань : Изд-во Казанского матем. общества. – 2005. – Т. 31. – С. 18–20.
- [24] Багаев, А.В. О группе аффинных преобразований римановых орбиобразий / А.В. Багаев // Петровские чтения : материалы XVIII Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики (Казань, 22 июня – 3 июля, 2006 г.). – Казань, 2006. – С. 22–23.
- [25] Багаев, А.В. Некоторые оценки размерностей групп аффинных преобразований римановых орбиобразий / Багаев А.В.; Нижегор. гос. ун-т. – Н.Новгород, 2006. – 20 с. – Деп. в ВИНТИ 28.08.2006, № 1106 – В2006.