На правах рукописи

БАРОВА ЕВГЕНИЯ АНАТОЛЬЕВНА

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2007

Работа выполнена на кафедре математического анализа Самарского государственного педагогического университета

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор $\boxed{\textbf{Волкодавов Виктор Филиппович}}$ |
| Научный консультант: | доктор физико-математических наук, профессор, чл.-корр. АН РБ **Сабитов Камиль Басирович** |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук, профессор **Хайруллин Равиль Сагитович** |
| | кандидат физико-математических наук, доцент **Бурмистров Борис Николаевич** |
| Ведущая организация: | Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН |

Защита состоится 21 марта 2007 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете имени В.И. Ульянова - Ленина по адресу: г. Казань, ул. Университетская, 17, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 14 февраля 2007 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Липачев Е.К.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Одним из важнейших разделов в теории дифференциальных уравнений с частными производными является теория уравнений смешанного типа. Простейшим уравнением смешанного эллиптико-гиперболического типа на плоскости является уравнение

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Известной краевой задачей для такого уравнения является задача Трикоми. Она впервые была решена самим Ф. Трикоми в 20-е годы XX века. Результаты, полученные Ф. Трикоми, были развиты С. Геллерстедтом для уравнения

$$y^{2m+1}u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Ф. И. Франкль обнаружил важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач в трансзвуковой газодинамике. И. Н. Векуа указал на важность проблемы уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, а также в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака. А. В. Бицадзе впервые сформулировал принцип экстремума для задачи Трикоми. Позднее он был доказан и для других краевых задач для уравнений смешанного типа. М. А. Лаврентьевым была предложена более простая модель уравнения смешанного типа

$$u_{xx} + sgn\, y \cdot u_{yy} = 0,$$

для которого вычисления проводятся с меньшими трудностями, чем в аналогичных задачах по уравнению (1).

В дальнейшем были поставлены и исследованы новые задачи для уравнения смешанного типа как в нашей стране (В.Ф. Волкодавов, В.Н. Врагов, Т.Д. Джураев, В.И. Жегалов, Т.Ш. Кальменов, А.И. Кожанов, Ю.М. Крикунов, А.Г. Кузьмин, М.Е. Лернер, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, С.М. Пономарёв, С.П. Пулькин, Л.С. Пулькина, О.А. Репин, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, Р.С Хайруллин, Л.И. Чибрикова, Хе Кан Чер и другие), так и за рубежом (S. Germain, R. Bader, S Agmon, L. Nirenberg, M.N. Protter, C. Morawetz, P.O. Lax, M. Schneider, A.K. Aziz, G.D. Dachev и другие).

В последние годы В.Ф. Волкодавовым рассмотрены краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа, для которых линия изменения типа есть их характеристика. В постановках этих задач условие сопряжения на линии изменения типа состоит в склеивании производной по нормали из области эллиптичности с производной дробного порядка или интегралом дробного порядка из области гиперболичности. Первые результаты в данном направлении были опубликованы в работе[1], где рассмотрена краевая задача для уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy}, \quad y > 0, \\ u_{xy}, \quad y < 0. \end{cases}$$

Краевые задачи с подобными условиями сопряжения изучены в работе Ю.О. Плотниковой[2] для частных случаев уравнения гиперболического типа

$$u_{xy} + a\,(x,\,y)\,u_x + b\,(x,\,y)\,u_y + c\,(x,\,y)\,u = 0$$

и уравнения смешанного типа

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \lambda u, \quad y > 0, \quad \lambda = const, \\ u_{xy} + \lambda u, \quad y < 0. \end{cases}$$

Н.А. Куликовой в работе[3] изучены краевые задачи, условие сопряжения которых содержат производные дробного порядка, для уравнений

$$Lu \equiv u_{xy} + \frac{\alpha}{x+y}\,u_y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},\, \alpha \neq 0,$$

в ограниченной области и

$$S\,(u) \equiv u_{xy} + \frac{q}{x+y}\,\left(u_x + u_y\right) = 0,\, 0 < 2q < 1,$$

в неограниченной области.

[1]Волкодавов В.Ф., Наумов О.Ю. Для уравнения смешанного типа задача T с сопряжением специального вида // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2002. – С. 41 – 49.

[2]Плотникова Ю.А. Краевые задачи для уравнений гиперболического и смешанного типов со специальными условиями сопряжения. Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Стерлитамак: СГПА, 2005. – 14 с.

[3]Куликова Н.А. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений гиперболического типа с вырождением в одной точке. – Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат наук: 01.01.02. – Стерлитамак: СГПА, 2006. – 14 с.

Данная диссертационная работа посвящена постановке и доказательству существования и единственности решений краевых задач с аналогичными условиями сопряжения для уравнений

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad y > 0, \\ u_{xy} + q\left[\ln a(x)\right]' u_y = 0, \quad y < 0, \end{cases} \tag{2}$$

$q \in R,\ q \neq 0;\ a(x) \in C^1[0,1];\ a(x) > 0,\ x \in [0,1]$, и

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{p}{x} u_x = 0, \quad y > 0,\ 0 < p < 1, \\ u_{xy} + \dfrac{p}{2}\,\dfrac{1}{x+y}\left(u_x + u_y\right) = 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{3}$$

**Цель работы.** Основной целью диссертации является исследование краевых задач для уравнений (2) и (3) со специальными условиями сопряжения. В их постановке условия сопряжения на линии изменения типа содержат либо производные дробного порядка, либо интегралы дробного порядка от искомой функции. Такие условия позволяют обосновать корректную постановку краевых задач в случае, когда линия изменения типа совпадает с характеристической линией уравнения.

**Методы исследования.** При решении поставленных задач использованы аналитические методы решения дифференциальных уравнений с частными производными: метод общих решений, метод Римана-Адамара, принципы экстремума; теория интегральных уравнений Фредгольма 2 рода, а также аппарат специальных функций.

**Научная новизна.** 1. Доказаны характеристические принципы локального экстремума для уравнений гиперболического типа.

2. Доказаны теоремы существования и единственности решения задач для уравнения смешанного типа с характеристической линией изменения типа и краевыми условиями, заданными на всей границе области.

3. Доказаны теоремы существования и единственности решения краевых задач типа Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом и характеристической линией изменения типа.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. В ней получены теоремы однозначной разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа со специальными условиями сопряжения внутри рассматриваемой области. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейших исследованиях уравнений смешанного типа.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались:

1) на областном семинаре по дифференциальным уравнениям под руководством доктора физико-математических наук, профессора В.Ф. Волкодавова (г. Самара, СамГПУ, 2002 - 2005 гг.);

2) на международной конференции "Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблем"(г. Стерлитамак, 24-28 июня 2003 г.);

3) на международной научно-практической конференции "Дни науки 2005"(г. Днепропетровск, 15 - 27 апреля 2005 г.);

4) на всероссийской научной конференции "Математическое моделирование и краевые задачи"(г. Самара, 1 - 3 июня 2005 г.);

5) на научном семинаре кафедры математического анализа Стерлитамакской государственной педагогической академии в 2006 г. (научные руководители: д.ф.-м.н., профессор К.Б. Сабитов и д.ф.-м.н., профессор И.А. Калиев).

6) на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор В.И. Жегалов, январь 2007 г.).

**Публикации.** Основные результаты работы опубликованы в 8 работах, список которых приведён в конце автореферата. Работа [5] выполнена в соавторстве с научным руководителем Волкодавовым В.Ф., которому принадлежит постановка рассмотренных задач.

**Структура и объём диссертации.** Диссертационная работа изложена на 121 страницах и состоит из введения, двух глав и библиографического списка, включающего 76 наименований.

## Основное содержание работы

Во **введении** отмечается актуальность темы диссертации, проводится обзор результатов исследований по её тематике, кратко излагается содержание работы.

**Первая глава** посвящена решению краевых задач для уравнения (2) в области $H$, ограниченной при $y > 0$ простой спрямляемой кривой $\Gamma$, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, а при $y < 0$ – отрезками прямых $y = -x$ и $y = x - 1$. При этом $x = x(s)$, $y = y(s)$ – параметрические уравнения кривой $\Gamma$, где $s$ – длина кривой $\Gamma$, отсчитывамая от точки $B$ против часовой стрелки, $l$ – длина кривой $\Gamma$. Пусть $H^+ = H \cap \{y > 0\}$, $H_1 = H \cap \{x < {}^1/_2,\, y < 0\}$, $H_2 = H \cap \{x > {}^1/_2,\, y < 0\}$, $H^- = H_1 \cup H_2$.

В § **1.1** для уравнения (2) в области $H_1$ и $H_2$ в явном виде построены решения задач Дарбу.

В § **1.2** доказаны единственность и существование решения задачи Дирихле в следующей постановке.

**Задача Дирихле (Задача $D$).** Найти в области $H$ функцию $u(x,\,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,\,y)\in C\left(\overline{H}\right)\cap C^2\left(H^+\right)\cap C^1\left(H^-\right),\quad u_{xy}\in C\left(H^-\right); \tag{4}$$

$$Lu\equiv 0,\quad (x,\,y)\in H^+\cup H^-; \tag{5}$$

$$u|_\Gamma=\varphi(s),\; s\in[0,\,l]; \tag{6}$$

$$u(x,\,-x)=f_1(x),\; x\in[0,\,{}^1/_2], \tag{7}$$

$$u(x,\,x-1)=f_2(x),\; x\in[{}^1/_2,\,1], \tag{8}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi(s)$ – заданные достаточно гладкие функции, $f_1({}^1/_2)=f_2({}^1/_2)$, $f_1(0)=\varphi(l)$, $f_2(1)=\varphi(0)$;

$$\nu^+(x)=v_1^-(x),\quad x\in(0,\,{}^1/_2), \tag{9}$$

$$\nu^+(x)=v_2^-(x),\quad x\in({}^1/_2,\,1). \tag{10}$$

Здесь $\nu^+(x)=\lim\limits_{y\to+0}u_y(x,\,y)$, $x\in(0,\,1)$,

$$v_1^-(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_0^x(x-t)^{-r_1}u_1(t,\,0)\,dt+$$

$$+\int\limits_0^x(x-t)^{-r_1}u_2(x,\,-t)\,dt,\; 0<r_1<1, \tag{11}$$

где при условии $f_1(0)=\tau_1(0)=0$

$$u_1(x,\,y)=\tau_1(x)-[a(x)]^{-q}[a(-y)]^q\,\tau_1(-y)$$

является решением задачи Дарбу для уравнения (2) в области $H_1$ с краевыми условиями $u_1(x,\,0)=\tau_1(x)$, $u_1(x,\,-x)\equiv 0$, а

$$u_2(x,y)=[a(x)]^{-q}[a(-y)]^q f_1(-y)$$

есть решение задачи Дарбу для уравнения (2) в области $H_1$ с краевыми условиями $u_2(x,\,0)\equiv 0$, $u_2(x,\,-x)=f_1(x)$;

$$v_2^-(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_{{}^1/_2}^x(x-t)^{-r_2}u_1(t,\,0)\,dt+$$

$$+\int\limits_{1/2}^{x}(x-t)^{-r_2}\,u_2\left(x,\ {}^1/_2-t\right)dt,\quad 0<r_2<1, \tag{12}$$

где при условии $f_2(1)=\tau_2(1)=0$

$$u_1(x,y)=\tau_2(x)-[a(x)]^{-q}\,[a(1+y)]^{q}\,\tau_2(1+y)$$

есть решение задачи Дарбу для уравнения (2) в области $H_2$ с данными $u_1(x,0)=\tau_2(x)$, $u_1(x,x-1)\equiv 0$, а

$$u_2(x,y)=[a(x)]^{-q}\,[a(1+y)]^{q}\,f_2(1+y)$$

является решением задачи Дарбу для уравнения (2) в области $H_2$ с данными $u_2(x,0)\equiv 0$, $u_2(x,x-1)=f_2(x)$.

Исходя из представлений функций $v_1^-(x)$ и $v_2^-(x)$ доказаны следующие принципы локального экстремума.

***Лемма* 1.** *Пусть функция* $u(x,y)$ *из пространства* $C\left(\overline{H_1}\right)$ *является решением уравнения* (2) *в области* $H_1$ *и* $u(x,-x)=0$, $x\in[0,\ {}^1/_2]$. *Тогда если* $u(x,0)=\tau_1(x)$ *из класса* $C[0,\ {}^1/_2]\cap C^1(0,\ {}^1/_2)$, *при этом* $\tau_1'(x)\in L_1[0,\ {}^1/_2]$, *достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения по сегменту* $[0,\ {}^1/_2]$ *в точке* $x_0\in(0,\ {}^1/_2)$, *то* $v_1^-(x_0)>0$ ($v_1^-(x_0)<0$).

***Лемма* 2.** *Пусть функция* $u(x,y)$ *из пространства* $C\left(\overline{H_2}\right)$ *является решением уравнения* (2) *в области* $H_2$ *и* $u(x,\,x-1)=0$, $x\in[{}^1/_2,\,1]$. *Тогда если* $u(x,0)=\tau_2(x)$ *из класса* $C[{}^1/_2,\,1]\cap C^1({}^1/_2,\,1)$, *при этом* $\tau_2'(x)\in L_1[{}^1/_2,\,1]$, *достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения по сегменту* $[{}^1/_2,\,1]$ *в точке* $x_0\in({}^1/_2,\,1)$, *то* $v_2^-(x_0)>0$ ($v_2^-(x_0)<0$).

На основании лемм 1 и 2 установлен принцип экстремума для уравнения (2) в смешанной области $H$.

***Лемма* 3.** *Пусть функция* $u(x,\,y)$, *удовлетворяет условиям* (4), (5) *и* $u(x,\,-x)\equiv 0$, $u(x,\,x-1)\equiv 0$. *Тогда* $\max\limits_{\overline{H^+}}u(x,\,y)$ ($\min\limits_{\overline{H^+}}u(x,\,y)$) *достигается на кривой* $\Gamma$.

***Теорема* 1.** *Если существует решение задачи* (4) – (10), *то оно единственно.*

Доказательство существования решения задачи Дирихле для простоты вычислений проводится при условии: $\Gamma\equiv\Gamma_0$: $x^2-x+y^2=0$, $y\geqslant 0$, $u|_{\Gamma_0}=0$. В этом случае имеет место соотношение между функциями $\tau(x)=u(x,\,0+0)$ и $\nu^+(x)=u_y(x,\,0+0)$, привнесённое из области эллиптичности:

$$\pi\tau(x)=\int\limits_0^1 \nu^+(t)\left[\ln|x-t|-\ln(x+t-2xt)\right]dt. \tag{13}$$

Применив к равенству (13) условия сопряжения (9), (10) и подставив значения функций $v_1^-(x)$ и $v_2^-(x)$, определяемых соответственно равенствами (11) и (12), доказательство существования решения задачи $D$ эквивалентно редуцируется к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$\pi\tau_2'(y)-\int\limits_{1/2}^1 \tau_2'(s)\,K(y,\,s)\,ds=F(y)\,,\ {}^1/_2<y<1. \tag{14}$$

***Теорема 2.*** *Функция* $K(y,\,s)$ *непрерывна на квадрате* $[{}^1/_2,\,1;\ {}^1/_2,\,1]$, *кроме линий* $s=y$, $y={}^1/_2$, *где для неё справедлива оценка*:

$$|K(y,\,s)|\leqslant\frac{C_1\,|\ln|y-s|\,|}{|y-s|^{r_1}}+\frac{C_2}{|y-s|^{r_2}}+\frac{C_3\,|\ln(y-{}^1/_2)\,|}{|y-s|^{r_1}}.$$

***Теорема 3.*** *Если* $f_1(t)\in C[0,\,{}^1/_2]\cap C^1(0,\,{}^1/_2)$, $f_2(t)\in C[{}^1/_2,\,1]\cap C^1({}^1/_2,\,1)$, *то* $F(y)\in C({}^1/_2,\,1]$, *а при* $y\to{}^1/_2$ *имеет особенность логарифмического порядка.*

Разрешимость интегрального уравнения (14) в классе функций $C({}^1/_2,\,1)\cap L_1[{}^1/_2,\,1]$ следует из единственности решения задачи $D$.

***Теорема 4.*** *Если* $\Gamma\equiv\Gamma_0$, $u|_{\Gamma_0}=0$, $f_1(t)\in C[0,\,{}^1/_2]\cap C^1(0,\,{}^1/_2)$, $f_2(t)\in C[{}^1/_2,\,1]\cap C^1({}^1/_2,\,1)$, *то существует единственное решение задачи* (4) – (10).

В § **1.3** для уравнения (2) поставлены задачи со смешанными условиями на всей границе области и доказаны существование и единственность их решения.

**Задача** $DN_1$**.** На множестве $H$ найти функцию $u(x,\,y)$, удовлетворяющую условиям (4) – (6) и

$$u(x,\,-x)=f_1(x)\,,\ x\in[0,\,{}^1/_2]\,,$$

$$(u_x-u_y)|_{y=x-1}=\omega_2(x)\,,\ x\in({}^1/_2,\,1)\,,$$

где $f_1(x)$, $\omega_2(x)$, $\varphi(s)$ – заданные достаточно гладкие функции и $f_1(0)=\varphi(l)$;

$$\nu^+(x)=v_1^-(x)\,,\quad x\in(0,\,{}^1/_2)\,,$$

$$\nu^{+}(x) = \mu_2^{-}(x)\,, \quad x \in ({}^1/_2\,,\,1)\,,$$

где $\nu^{+}(x) = \lim\limits_{y \to +0} u_y(x,\,y)\,,\ x \in (0,\,1)\,,\ v_1^{-}(x)$ определено по формуле (11), а функция $\mu_2^{-}(x)$ задаётся равенством:

$$\mu_2^{-}(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_{{}^1/_2}^{x} (x-t)^{-r_2}\, u_1(t,\,0)\, dt +$$

$$+ \int\limits_{{}^1/_2}^{x} (x-t)^{-r_2}\, u_2(x,\ {}^1/_2 - t)\, dt, \tag{15}$$

где

$$u_1(x,y) = \tau_2(x) - [a(x)\, a(1+y)]^{-q} \int\limits_{y+1}^{1} \tau_2'(t)\, [a(t)]^{2q}\, dt$$

является решением 2-й задачи Дарбу в области $H_2$ для уравнения (2) с граничными условиями $u_1(x,0) = \tau_2(x)\,,\ \left(u_{1x} - u_{1y}\right)\big|_{y=x-1} \equiv 0\,,$ а

$$u_2(x,y) = [a(x)\, a(1+y)]^{-q} \int\limits_{y+1}^{1} \omega_2(t)\, [a(t)]^{2q}\, dt$$

есть решение 2-й задачи Дарбу в области $H_2$ для уравнения (2) с граничными условиями $u_2(x,0) \equiv 0,\ \left(u_{2x} - u_{2y}\right)\big|_{y=x-1} = \omega_2(x)\,.$

***Теорема* 5.** *Если решение задачи $DN_1$ существует, то оно единственно.*

Доказательство данной теоремы проводится на основании принципов экстремума.

Доказательство существования решения задачи $DN_1$ проводится при тех же условиях относительно кривой $\Gamma$, что и доказательство существования решения задачи Дирихле. Используя равенство (13) и условия сопряжения существование решения задачи $DN_1$ эквивалентно сводится к интегральному уравнению вида (14) с интегрируемым ядром и правой частью, непрерывной на $({}^1/_2,\,1]$, а при $y \to {}^1/_2$ имеeющей особенность логарифмического порядка. Разрешимость полученного уравнения следует из единственности решения задачи $DN_1$. Доказана следующая

***Теорема* 6.** *Если* $\Gamma \equiv \Gamma_0,\ u|_{\Gamma_0} = 0,\ f_1(t) \in C[0,\ {}^1/_2] \cap C^1(0,\ {}^1/_2)\,,\ \omega_2(t) \in C({}^1/_2\,,\,1) \cap L_1[{}^1/_2\,,\,1]$, *то существует единственное решение задачи* $DN_1$.

**Задача** $DN_2$**.** На множестве $H$ найти функцию $u\,(x,\,y)$, удовлетворяющую условиям (4) – (6) и

$$(u_x + u_y)\big|_{y=-x} = \omega_1\,(x)\,,\; x \in (0,\; {}^1/_2)\,,$$

$$(u_x - u_y)\big|_{y=x-1} = \omega_2\,(x)\,,\; x \in ({}^1/_2,\, 1)\,,$$

где $\omega_1\,(x)$, $\omega_2\,(x)$, $\varphi\,(s)$ – заданные достаточно гладкие функции;

$$\nu^+\,(x) = \mu_1^-\,(x)\,,\; x \in (0,\; {}^1/_2)\,,$$

$$\nu^+\,(x) = \mu_2^-\,(x)\,,\; x \in ({}^1/_2,\, 1)\,,$$

здесь $\nu^+\,(x) = \lim\limits_{y\to+0} u_y\,(x,\,y)$, $x \in (0,\,1)$, $\mu_2^-\,(x)$ определено по формуле (15), функция

$$\mu_1^-\,(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x (x-t)^{-r_1}\,u_1\,(t,\,0)\,dt +$$

$$+\int\limits_0^x (x-t)^{-r_1}\,u_2\,(x,\,-t)\,dt, \tag{16}$$

где

$$u_1\,(x,\,y) = \tau_1\,(x) + [a\,(x)\,a\,(-y)\,]^{-q}\int\limits_0^{-y} \tau_1'\,(t)\,[a\,(t)\,]^{2q}\,dt$$

является решением 2-й задачи Дарбу для уравнения (2) с граничными данными $u_1\,(x,\,0) = \tau_1\,(x)$, $\left(u_{1x} + u_{1y}\right)\big|_{y=-x} \equiv 0$, а

$$u_2\,(x,y) = -\,[a\,(x)]^{-q}\,[a\,(-y)]^{-q}\int\limits_0^{-y} \omega_1\,(t)\,[a\,(t)]^{2q}\,dt$$

есть решение 2-й задачи Дарбу для уравнения (2) с данными $u_2\,(x,\,0) \equiv 0$, $\left(u_{2x} + u_{2y}\right)\big|_{y=-x} = \omega_1\,(x)$.

Единственность решения задачи $DN_2$ доказывается с применением принципов экстремума. Вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцируется к вопросу однозначной разрешимости уравнения Фредгольма II рода относительно функции $\tau_1'\,(y)$, $y \in (0,\; {}^1/_2)$, с ядром, имеющим особенность интегрируемого порядка, и свободным членом, непрерывным в $(0,\; {}^1/_2]$, а при $y \to {}^1/_2$ имеющим особенность логарифмического порядка. Разрешимость полученного уравнения следует из единственности решения задачи $DN_2$.

***Теорема 7.*** *Если* $\Gamma \equiv \Gamma_0$, $u|_{\Gamma_0} = 0$, $\omega_1(s) \in C(0, {}^1/_2) \cap L_1[0, {}^1/_2]$, $\omega_2(s) \in C({}^1/_2, 1) \cap L_1[{}^1/_2, 1]$, *то существует единственное решение задачи* $DN_2$.

**Вторая глава** посвящена решению краевых задач типа Трикоми с условием сопряжения на характеристической линии уравнения (3) на множестве $G = G^- \cup G^+$, где $G^- = \{(x, y) : 0 < -y < x < 1\}$, $G^+$ – область, ограниченная простой спрямляемой кривой $\Gamma$, лежащей в первой четверти с концами в точках $A(1, 0)$ и $B(0, b)$, $b > 0$, и отрезками $OA$ и $OB$, $O(0, 0)$. Пусть $x = x(s)$, $y = y(s)$ – параметрические уравнения кривой $\Gamma$, $s$ – длина дуги кривой, отсчитываемой от точки $(1, 0)$, $l$ – длина кривой $\Gamma$.

**Задача** $V_1$**.** На множестве $G$ найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C\left(\overline{G}\right) \cap C^2(G); \tag{17}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x, y) \in G; \tag{18}$$

$$u(0, y) = g(y), \, y \in [0, b], \, u|_{\Gamma} = \varphi(s), \, s \in [0, l]; \tag{19}$$

$$u(x, -x) = f(x), \, x \in [0, 1], \tag{20}$$

где $f(x)$, $\varphi(s)$, $g(y)$ – заданные достаточно гладкие функции и $f(0) = g(0)$, $g(b) = \varphi(l)$;

$$\nu^+(x) = M_-(x), \, x \in (0, 1), \tag{21}$$

здесь $\nu^+(x) = \lim\limits_{y \to +0} u_y(x, y)$, $x \in (0, 1)$, а функция

$$M_-(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x - t)^{-\lambda} u_1(t, 0)\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^x (x - t)^{-\lambda} u_2(x, -t)\, dt, \; 0 < \lambda < 1, \tag{22}$$

где при условии $f(0) = \tau(0) = 0$ функция $u_1(x, y)$ является решением 1-й задачи Дарбу для уравнения (3) с краевыми условиями $u_1(x, 0) = \tau(x)$, $u_1(x, -x) \equiv 0$, а функция $u_2(x, y)$ есть решение 1-й задачи Дарбу для уравнения (3) с краевыми условиями $u_2(x, 0) \equiv 0$, $u_2(x, -x) = f(x)$.

***Лемма 4.*** *Пусть функция* $u(x,y)$ *из пространства* $C\left(\overline{G^-}\right)$ *является решением уравнения* (3) *в области* $G^-$ *и* $u(x,-x)=0$, $x\in[0,\,1]$. *Тогда если* $u(x,0)=\tau(x)$, *из класса* $C[0,\,1]\cap C^1(0,\,1)$, *при этом* $\tau'(x)\in L_1[0,\,1]$ *достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке* $x_0\in(0,\,1)$, *то* $M_-(x_0)>0$ ($M_-(x_0)<0$).

***Теорема 8.*** *Если существует решение задачи* $V_1$, *то оно единственно.*

Справедливость данного утверждения устанавливается с помощью граничного принципа Зарембо-Жиро и леммы 4.

Доказательство существования решения задачи $V_1$ проводится при условиях, когда область $G^+$ – четверть единичного круга с центром в начале координат и $\Gamma\equiv\Gamma_0$, $u|_{\Gamma_0}=0$. Доказательство существования решения эквивалентно редуцируется к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$\tau'(x)=k\int\limits_0^1\tau'(s)\,K(x,s)\,ds+P(x),\quad 0<x<1. \tag{23}$$

***Теорема 9.*** *Функция* $K(x,\,s)$ *непрерывна на квадрате* $[0,\,1;\,0,\,1]$, *кроме линий* $s=x$, $x=0$, $x=1$, *где для неё справедлива оценка*:

$$|K(x,\,s)|\leqslant\frac{C_1\,|\ln(1-x)\,|}{|x-s|^\lambda}+\frac{C_2\,|\ln|x-s|\,|}{|x-s|^\lambda}+\frac{C_3}{x^{2q}}+\frac{C_4}{(1-s)^\lambda}.$$

***Теорема 10.*** *Если* $f(x)\in C[0,\,1]\cap C^1(0,\,1)$, *то функция* $P(x)\in C[0,\,1)$, *а при* $x\to1$ *имеет особенность логарифмического порядка.*

В силу единственности решения задачи $V_1$ и альтернативы Фредгольма интегральное уравнение (23) разрешимо в классе функций $\tau'(x)\in C(0,\,1)\cap L_1[0,\,1]$ и притом единственным образом.

***Теорема 11.*** *Если* $f(x)\in C[0,\,1]\cap C^1(0,\,1)$, $u(0,\,y)=u|_{\Gamma_0}=0$, *то существует единственное решение задачи* (17) – (21).

В § **2.3** приводится постановка задачи $V_2$ и доказательство единственности и существования её решения.

**Задача** $V_2$**.** На множестве $G$ найти функцию $u(x,\,y)$, удовлетворяющую условиям (17) – (19) и

$$(x+y)^{2q}\,(u_x+u_y)\Big|_{y=-x}=\mu(x),\ x\in(0,\,1), \tag{24}$$

где $\mu(x)$, $\varphi(s)$, $g(y)$ – заданные достаточно гладкие функции;

$$\nu^{+}(x) = N_{-}(x), \ x \in (0,1), \tag{25}$$

здесь $\nu^{+}(x) = \lim\limits_{y \to +0} u_y(x, y), \ x \in (0, 1),$

$$N_{-}(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_{0}^{x} (x-t)^{-\lambda} u_1(t, 0)\, dt +$$

$$+ \int\limits_{0}^{x} (x-t)^{-\lambda} u_2(x, -t)\, dt, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{26}$$

при этом

$$u_1(x, y) = (x+y)^{-q} \int\limits_{-y}^{x} \left(\tau'(t) + \frac{q}{t}\tau(t)\right) t^q \times$$

$$\times F\left(q, \, 1-q; \, 1; \, \frac{(x-t)(-y)}{t(x+y)}\right) dt \, + k_2 \left(\frac{-x(y+t)}{x-t}\right)^{-q} \times$$

$$\times \int\limits_{-y}^{x} \left(\tau'(t) + \frac{q}{t}\tau(t)\right) t^{2q} F\left(q, \, q; \, 2q; \, \frac{t(x+y)}{x(y+t)}\right) dt$$

есть решение 2-й задачи Дарбу для уравнения (3) с данными $u_1(x, 0) = \tau(x)$, $(x+y)^{2q}\left(u_{1x} + u_{1y}\right)\Big|_{y=-x} \equiv 0$, а функция

$$u_2(x, y) = -\frac{k_2}{2(1-q)} \int\limits_{0}^{-y} \mu'(t)(x-t)^{-q}(-y-t)^{1-q} \times$$

$$\times F\left(1, \, q; \, 2-q; \, \frac{-y-t}{x-t}\right) dt -$$

является решением 2-й задачи Дарбу для уравнения (3) с данными $u_2(x, 0) \equiv 0$, $(x+y)^{2q}\left(u_{2x} + u_{2y}\right)\Big|_{y=-x} = \mu(x)$.

***Лемма* 5.** *Пусть функция* $u(x,y)$ *из пространства* $C\left(\overline{G^{-}}\right)$ *является решением уравнения* (3) *в области* $G^{-}$ *и* $(x+y)^{2q}(u_x + u_y)\Big|_{y=-x} = 0$, $x \in [0, 1]$. *Тогда если* $u(x,0) = \tau(x)$, *из класса* $C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, *при этом* $\tau'(x) \in L_1[0, 1]$, $\tau(0) = 0$, *достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке* $x_0 \in (0,\,1)$, *то* $N_-(x_0) > 0$ ($N_-(x_0) < 0$).

На основании леммы 5 и граничного принципа для уравнения (3) в области эллиптичности доказана

***Теорема* 12.** *Если существует решение задачи* $V_2$, *то оно единственно.*

Доказательство существования решения задачи $V_2$ проводится аналогично задаче $V_1$.

***Теорема* 13.** *Если* $\mu(x) \in C\,[0,\,1] \cap C^1\,(0,\,1)$, $\mu'(x) \in L_1\,[0,\,1]$, $u\,(0,\,y) = u|_{\Gamma_0} = 0$, *то существует единственное решение задачи* $V_2$.

В заключении выражаю глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Виктору Филипповичу Волкодавову и научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору, чл.-корр. АН РБ Камилю Басировичу Сабитову за предложенную тему, ценные замечания, помощь и поддержку при выполнениии данной диссертации.

## Литература

1. *Барова, Е.А.* Задача $V_1$ для уравнения смешанного типа, вырождающегося в области гиперболичности в одной точке/ Е.А. Барова// Вестник СГТУ серия "Математика", вып. 22// Дифференциальные уравнения и их приложения. – Самара: 2003. – № 2. – С. 223 – 224.

2. *Волкодавов, В.Ф.* Существование и единственность решения задачи $V_1$ для уравнения смешанного типа/ В.Ф. Волкодавов, Е.А. Барова// Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы. Труды международной конференции, посвящённой юбилею акад. В.А. Ильина (Стерлитамакский филиал АН РБ). – Уфа: Гилем, 2003. – Т.2. – С. 34 – 40.

3. *Барова, Е.А.* Задача Гурса и характеристический принцип экстремума для уравнения $u_{xy} - \frac{q}{x-y}\,(u_x - u_y) = 0$ / Е.А. Барова// Научные доклады ежегодной межвузовской 58-й научной конференции СГПУ. – Самара: 2004. – С. 10 – 16.

4. *Барова, Е.А.* Существование и единственность решения задачи $D_3$ для уравнения смешанного типа с сопряжением на внутрен-

ней границе смешанного множества/ Е.А. Барова// Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Дні науки 2005". Математика. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2005. – Т. 18. – С. 4 – 8.

5. *Барова, Е.А.* Доказательство единственности решения задачи для уравнения смешанного типа с сопряжением на внутренней границе смешанного множества/ Е.А. Барова// Математическое моделирование и краевые задачи. Труды 2-й всероссийской научной конференции (1 – 3 июня 2005 г.). – Самара: Изд-во СГТУ, 2005. – Ч.3. – С. 33 – 36.

6. *Барова, Е.А.* Доказательство существования решения задачи для уравнения смешанного типа с сопряжениями на внутренней границе смешанного множества/ Е.А. Барова// Научные доклады ежегодной межвузовской 59-й научной конференции СГПУ. – Самара. – 2005. – С. 5 – 9.

7. *Барова, Е.А.* Задача для уравнения смешанного типа с заданием производной по нормали на нехарактеристической части границы области гиперболичности/ Е.А. Барова// Известия вузов. Математика. – Казань. – 2006. – № 9. – С. 83.

8. *Барова, Е.А.* Задача для уравнения смешанного типа с заданием производной по нормали на нехарактеристической части границы области гиперболичности/ Е.А. Барова// По решению редколлегии журнала "Изв. вузов. Математика"депонировано в ВИНИТИ № 889-В2006. – 10 с.