КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. И. УЛЬЯНОВА – ЛЕНИНА

На правах рукописи

Опокина Надежда Анатольевна

ТЕНЗОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ ТИПА (2, 0) НАД ГРУППАМИ ЛИ

01.01.04 — геометрия и топология

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2007

Работа выполнена на кафедре геометрии Казанского государственного университета им. В.И.Ульянова - Ленина

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Шапуков Борис Никитович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Степанов Сергей Евгеньевич
(Владимирский государственный педагогический университет);
кандидат физико-математических наук,
доцент Беляев Павел Леонидович
(Бирская социальная педагогическая академия)

Ведущая организация:
Московский государственный областной университет

Защита состоится 29 марта 2007 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета по математике Д. 212.081.10 Казанского государственного университета по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлёвская, 18, корпус 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке университета / Казань, ул. Кремлёвская, 18 /.

Автореферат разослан 25 февраля 2007 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент /М.А.Малахальцев/

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Теория групп Ли была развита Софусом Ли в связи с проблемой разрешимости дифференциальных уравнений. Теория "конечных непрерывных" групп, понимаемая как теория групп преобразований, была развита Софусом Ли в многочисленных мемуарах, начиная с 1874 г. и систематически изложена в трактате "Theorie der Transformation gruppen"(1888 — 1893 гг.), написанном в сотрудничестве с Ф. Энгелем [13]. Ключем к их изучению послужило рассмотрение соответствующих инфинитезимальных преобразований. Ли вводит понятия подгрупп, нормальных подгрупп, гомоморфизмов, присоединенных преобразований и т.д.

В 1904 г. Э.Картан вводит уравнения, названные позднее структурными уравнениям Картана [11] и показывает, что теория конечных непрерывных групп может быть развита на основе форм и устанавливает эквивалентность этого подхода и подхода Ли.

В результате исследований Э.Картана теория групп Ли принимает более отчётливый алгебраический характер, и основное внимание концентрируется на углублённом изучении алгебр Ли . Период с 1988 по 1894 г., отмеченный работами Ф.Энгеля, В.Киллинга и Э.Картана, привело к ряду ярких результатов о структуре алгебр Ли. Первые шаги в определении и изучении глобальных групп Ли были сделаны Г.Вейлем (1924). После работ Г.Вейля Э.Картан определённо становится на глобальную точку зрения в своих исследованиях по симметрическим пространствам и группам Ли [11].

Детальное изложение теории групп Ли в книге по топологическим группам было дано Л.С. Понтрягиным (1954) [7]. Вслед за книгой Л.С. Понтрягина последовала монография К.Шевалле (1946, 1951, 1955) [12]. "Инфинитизимальные преобразования" Ли принимают здесь вид векторных полей, а алгебра Ли группы Ли отождествляется с пространством левоинвариантных векторных полей на G.

Понятие расслоения, возникшее в 30-х годах в связи с задачами топологии и геометрии многообразий, оказалось чрезвычайно плодотворным и до сих пор является одной из наиболее быстро развивающихся областей в современной математике. С развитием теории расслоенных пространств связана коренная перестройка всей структуры дифференциально-геометрических понятий, начавшаяся с 50-х годов прошлого века, новое понимание классических результатов, значительное расширение области исследований (Н.Стинрод, 1953). Теория расслоенных многообразий оказала значительно влияние и на развитие самой теории групп Ли. Методы расслоенных пространств систематически используют гамильтонова механика и теоретическая физика [1].

Первые результаты по теории касательных расслоений принадлежат японским математикам Ш.Сасаки, Ш.Ишихара, К.Яно . Наряду с касательными расслоениями с конца 60-х годов прошлого века началось изучение двойственных им кокасательных расслоений (К.Яно, К.-П.Мок). В работе К.Яно и Ш.Ишихара были подведены итоги развития геометрии касательных и кокасательных расслоений до 1973 года [15]. В их работах для заданной связности на многообразии M посторoены её полный и горизонтальный лифты в TM. Получены формулы для тензоров кривизны и кручения, найдены геодезические линии построенных связностей.

Общая теория тензорных расслоений под названием пространств тензорных опорных элементов была развита Б.Л.Лаптевым (1949-1956). На тотальном пространстве этих пространств им были построены операции (внешнего) ковариантного дифференцирования и дифференцирования Ли. Развивая эти результаты и существенно используя методы теории расслоенных многообразий, вопросами построения и изучения внешних и внутренних связностей как горизонтальных распределений на векторных и тензорных расслоениях занимался Б.Н.Шапуков (1976-1982) [10], [9]. В частности, им показано, что если на векторном расслоении задана внешняя связность, то при некоторых условиях в расслоении определяется некоторая внутренння связность, в общем случае нелинейная. Им были найдены также условия, при при которых внешняя линейная связность может быть редуцирована к специальной связности, введенной Б.Л.Лаптевым. Ученик Б.Н.Шапукова, П.Л.Беляев иследовал аффинорные расслоения как присоединённые расслоения к расслоению линейных реперов [2]. Также он изучал подрасслоение орбит этого расслоения.

Касательные расслоения над группами Ли впервые рассматривались А.Моримото (1968) [14]. В работе Е.В.Назаровой (1979) [6], ученицы А.П. Широкова, касательное расслоение групп Ли рассматривалось, как естественное продолжение группы Ли G в алгебру дуальных чисел. Вместе с тем, большой интерес представляют тензорные расслоения произвольной валентности над группами Ли, поскольку, как выясняется в этой диссертации, они образуют особую, новую категорию групп Ли, ранее не изученную.

Целью настоящей работы является изучение тензорных расслоений типа (2,0) над группами Ли, сочетающих в себе как структуру расслоенного пространства, так и структуру группы Ли.

Научная новизна. В диссертации: доказана групповая структура тензорных расслоений T_0^2G типа (2,0) над группами Ли; построена левая внешняя связность на этих расслоениях и найдена ее связь с левой связностью на базе расслоения; найдены горизонтальный и вертикальный лифты векторных полей; построена левоинвариантная метрика на тензорном расслоении T_0^2G из левоинвариантной метрики на базе; найдено необходимое условие, при которых риманово пространство T_0^2G относительно построенной левоинвариантной метрики является пространством постоянной кривизны.

Методика исследования. В работе используется классический аппарат тензорного анализа, теория групп Ли, теория расслоенных пространств.

Практическая и теоретическая значимость. Работа имеет теоретическое значение, а ее результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях в этом направлении, в учебном процессе.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на геометрическом семинаре Казанского государственного университета (научный руководитель проф. Шапуков Б.Н.). Они были также доложены на четвёртой всероссийской молодежной научной школе–конференции "Лобачевские чтения — 2005" (г. Казань, 2005 г.), на итоговых научных конференциях КГУ (2005 – 2006 гг.), на 18 международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физике "Волга - 2006", на международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2006).

Публикации. По теме диссертации опубликовано шесть работ [1]-[6] без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы. Формулы обозначаются двумя числами, где первое означает номер главы, а второе – номер формулы. Параграфы обозначаются двумя числами. Объем работы – 102 страницы машинописного текста, библиография содержит 42 наименования.

Краткое содержание диссертации.

Пусть G — группа Ли размерности n. **Первая глава** посвящена изучению основных свойств тензорных расслоений над группами Ли на примере расслоения T^2_0G. В §1.1 дано определение тензорного расслоения типа (2,0) как расслоения, присоединённого к расслоению линейных реперов $L(M)$. В дальнейшем индексы $i, j, k, \ldots$ являются базисными, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — слоевыми, $A, B, C, \ldots$ — тотальными. Также использовался следующий способ индексации компонент тензоров: $T^\alpha = J^\alpha_{ij}T^{ij}$, где J^α_{ij} — некоторые константы, образующие невырожденную n^2-матрицу, где α означает номер строки, а совокупность индексов ij, занумерованных в некотором порядке, — номер столбца. Предварительно, в §1.2 рассмотрены касательные расслоения TG над группами Ли . Дано доказательство того, что они также являются группами Ли. Найдены левоинвариантные векторные поля на TG, которые является проектируемыми в левоинвариантные векторные поля на G. Показано, что эти расслоения является тривиальным. Найдены базис и структурные уравнения алгебры Ли g^1_0 группы TG. В §1.3 – §1.4 вводится операция умножения на расслоении T^2_0G:

$$(x, T_x) \circ (y, T_y) = (xy, L_*(x)T_y + R_*(y)T_x),$$

где L_*, R_* — дифференциалы левого и правого сдвига, соответственно. Доказано, что T^2_0G относительно этой операции является груп-

пой Ли. Доказаны следующие теоремы:
Теорема. *Если H — подгруппа Ли в G, то T_0^2H — подгруппа Ли в T_0^2G.*
Теорема. *Пусть $\pi : T_0^2G \to G$ — каноническая проекция. Тогда верны следующие утверждения:*
a) Если H – подгруппа Ли в T_0^2G, то ее проекция $\pi(H)$ есть подгруппа Ли в G;
b) Если N — нормальный делитель в T_0^2G, то $\pi(N)$ есть нормальный делитель в G;
c) Если Z — центр групы T_0^2G, то $\pi(Z)$ есть центр группы G.

Найдены полный лифт левоинвариантных векторных полей и левоинвариантные векторные поля на T_0^2G, которые являются проектируемыми в левоинвариантные векторные поля на группе Ли G.

Далее рассматривается алгебра Ли g_0^2 группы Ли T_0^2G. Из теорем, доказанных ранее, следует, что подалгебра, идеал и центр алгебры Ли g_0^2 группы Ли T_0^2G являются проектируемыми в подалгебру, идеал, центр алгебры Ли g группы Ли G, соответственно. Найдены базис $E_A = (E_i, E_\alpha)$ и структурные уравнения этой алгебры Ли. Доказаны следующие теоремы:
Теорема. *Подпространство $\eta = \{V \mid V = V^iE_i\}$ пространства g_0^2 является подалгеброй Ли.*
Теорема. *Решение системы*

$$U^i c_{ij}^k = 0, \quad U^\alpha c_{i\alpha}^\gamma = 0,$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли g, $c_{i\alpha}^\gamma = J_{km}^\gamma J_\alpha^{ps}(c_{ip}^k\delta_s^m + c_{is}^m\delta_p^k)$, определяет центр алгебры Ли g_0^2.

Параграфы §1.5 – §1.6 посвящены построению гомоморфизмов тензорных расслоений типа (2, 0) и их изучению. Доказывается, что T_0^2G с точностью до изоморфизма расслоений является прямым произведением группы Ли G и T_0^2 , то есть T_0^2G является тривиальным расслоением. Рассматривается послойный гомоморфизм тензорных расслоений над группами Ли. Показано, что он имеет следующую структуру: $\mathbf{F} = (f, \mathcal{F})$, где f — гомоморфизм группы Ли G на группу G', $\mathcal{F}$ — линейное отображение слоёв, перестановочное с дифференциалами левого и правого действия. Построено отображение

$\Phi = (\varphi, \varphi_*) : T^2_0G \to T^2_0G'$, где φ — гомоморфизм группы Ли G на группу G'. Доказано, что оно является гомоморфизмом. Доказана теорема, что множество гомоморфизмов $\{\mathbf{F}\}$ содержит гомоморфизмы вида $\{\Phi\}$.

Доказано, что каноническая проекция $\pi : T^2_0G \to G$ является гомоморфизмом групп Ли. Показано, что $T^2_0G(G, H, \pi)$ является тривиальным главным расслоением, где $H = \ker \pi$. Построен гомоморфизм главных расслоений.

В §1.7 построены подрасслоения орбит левого действия структурной группы в расслоении T^2_0M. При $\dim M = 2$ в §1.8 – §1.9 в явном виде найдены стационарные подгруппы тензоров $T \in T^2_0$ и уравнения орбит в тензорном расслоении T^2_0M . А также доказано, что при отображении, порождённого левым действием на G, $\mathbf{L} = (L, L_*) : T^2_0G \to T^2_0G$ орбита определённого типа переходит в орбиту этого же типа . Это верно и для отображения, порождённого правым действием на группе Ли G: $\mathbf{R} = (R, R_*) : T^2_0G \to T^2_0G$.

Глава 2 посвящена теории связностей на тензорном расслоении T^2_0M. В §2.1 – §2.3 рассмотрены связности на группах Ли G и T^2_0G. Здесь вводится понятия внешних и внутренних связностей на расслоении T^2_0M. Учитывая, что тензорное расслоение T^2_0G является присоединённым к расслоению реперов, найдена внутренняя связность как горизонтальное распределение на T^2_0G с помощью левой и правой связностей на базе расслоения. Показано, что внутренняя связность на T^2_0G, построенная из правой связности на базе G является взаимной к внутренней связности, построенной из левой связности на G. Найдены коэффициенты левой внешней связности на T^2_0G и их выражение через коэффициенты левой связности на базе. Вычислены компоненты тензора кручения этой связности, которые выражаются через компоненты тензора кручения левой связности на G. Рассмотрены свойства левой внешней связности на тензорном расслоении T^2_0G. Показано, что она является приводимой, проектируемой в левую связность на базе и регулярной. Доказано, что она однозначно определяет линейную внутреннюю связность этого расслоения, которая совпадает с внутренней связностью, построенной в §2.1.

В §2.4 доказано, что вертикальное распределение на T_0^2G является левоинвариантным. Найдено необходимое и достаточное условие, при котором горизонтальный лифт левоинвариантных векторных полей является левоинвариантным. Доказано, что горизонтальное распределение $H(T_0^2G)$, определяемое связностью, построенная из правой связности на базе G, является левоинвариантным. Построен вертикальный лифт левоинвариантных векторных полей и доказано, что он является левоинвариантным. Таким образом, построено левоинвариантное адаптированное поле реперов на T_0^2G. Найдены структурные уравнения. Доказано, что горизонтальное распределение в этом случае является вполне интегрируемым.

Глава 3 посвящена построению метрик на тензорных расслоениях типа (2,0) над группами Ли. Сначала в §3.1−§3.2 найдены формы Киллинга на TG и T_0^2G. Они являются вырожденными. Доказано, что алгебра Ли g_0^1 группы Ли TG разрешима (нильпотентна) тогда и только тогда, когда алгебра Ли g группы Ли G разрешима (нильпотентна). А также доказана следующая

Теорема. *Пусть* $c_{ik}^k = 0$. *Тогда:*

1) Алгебра Ли g_0^2 *разрешима тогда и только тогда, когда алгебра Ли* g *разрешима;*

2) Алгебра Ли g_0^2 *нильпотентна тогда и только тогда, когда алгебра Ли* g *нильпотентна.*

В §3.3 рассматривается риманово пространство G с левоинвариантной метрикой $\widehat{g}$. Построены горизонтальный и вертикальный лифты этой метрики на T_0^2G. Построена левоинвариантная метрика g на T_0^2G из левоинвариантной метрики на базе. Она записана в натуральном и в левоинвариантном адаптированном полях реперов. Далее в §3.4 рассматривается риманово пространство (T_0^2G, g). Найдены коэффициенты римановой связности и компоненты тензора кривизны. Доказаны следующие теоремы:

Теорема. *Если* T_0^2G *— пространство постоянной кривизны* K *и* $\dim G \geqslant 3$, *то* G *— пространство постоянной кривизны* K. *В случае* $\dim G = 2$, G *является пространством постоянной кривизны* K.

Теорема. *Для того, чтобы* T_0^2G *являлось пространством посто-*

янной кривизны K необходимо, чтобы выполнялось условие

$$R_{i\alpha j\beta} = R_{i\beta j\alpha}.$$

Теорема. *Пусть G — абелева группа. Тогда (T_0^2G, g) является плоским римановым пространством.*

В §3.5 рассмотрены примеры левоинвариантных метрик на тензорном расслоении типа (2, 0) над группой Ли ориентированных афинных преобразований прямой.

Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Введена операция на тензорном расслоении типа (2, 0) над группами Ли. Доказано, что относительно этой операции это тензорное расслоение является группой Ли.

2. Найдены коэффициенты левой внешней связности на T_0^2G, которые выражаются через коэффициенты левой связности на базе. Найдены свойства этой связности. Доказано, что она однозначно определяет линейную внутреннюю связность этого расслоения, которая совпадает с внутренней связностью, построенной из левой связности на базе.

3. Построены вертикальный и горизонтальный лифты левоинвариантных векторных полей. Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы горизонтальный лифт левоинвариантных векторных полей был левоинвариантным. Построены левоинвариантные вертикальное и горизонтальное распределения.

4. Построена левоинвариантная метрика на T_0^2G из левоинвариантной метрики на базе. Найдено необходимое условие, при котором риманово пространство T_0^2G относительно построенной левоинвариантной метрики является пространством постоянной кривизны.

Литература

[1] Арнольд, В.И. *Математические методы классической механики*/ В.И. Арнольд — М.: "Наука", 1974

[2] Беляев, П.Л. *Аффинорные расслоения*: Дис. ... кандидата физико-математических наук: 01.01.04./ П.Л. Беляев — Казанский университет, 1993

[3] Бурбаки, Н. *Группы и алгебры Ли. Главы 1-3.*/Н. Бурбаки — М.: "Мир", 1976 — 496 с.

[4] Мантуров, О.В. *Элементы тензорного исчисления*/О.В. Мантуров — М.: "Просвещение", 1991 — 255 с.

[5] Мищенко, А.С. *Векторные расслоения и их применения*/А.С. Мищенко — М.: "Наука", 1984. — 208 с.

[6] Назарова, Е.В. *К геометрии касательных расслоений групп Ли*/ Е.В. Назарова // Тр. геометр. семин. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та. — 1979. — вып. 11. — С. 70 - 78.

[7] Понтрягин, Л.С. *Непрерывные группы*/ Л.С. Понтрягин — М.: "Наука", 1984. — 520 с.

[8] Шапуков, Б.Н. *Тензорные расслоения*/Б.Н. Шапуков // Сб. "Памяти Лобачевского посвящается". — Казань: изд-во Казанск. ун-та. — 1992. — С. 104 - 125.

[9] Шапуков, Б.Н.*Проектируемость тензорных полей и связностей в расслоении* / Б.Н. Шапуков // Тр. геом. семинара — Казань: Уч. зап. Казанск. ун-та. — 1985. — вып.17. — С. 84-100.

[10] Шапуков, Б.Н. *Связности на дифференцируемых расслоениях* /Б.Н. Шапуков // Итоги науки и техн. Современ. пробл. геометрии. — М.: ВИНИТИ. - 1983. - Т.15. - С. 61-63.

[11] Cartan, E. *Euvres completes*/E. Cartan — Paris,1954

[12] Chevalley, C. *Theory of Lie groups* /C. Chevalley — Princeton University Press, 1946

[13] Lie, S. *Theorie der Transformation gruppen*/S. Lie und F. Engel — Teubner, Leipzig, 1930

[14] Morimoto, A. *Prolongations of G-structures to tangent bundles*/A. Morimoto// Nagoya Math. J. — 1968 — 32 — P. 67-108.

[15] Yano, K. *Tangent and cotangent bundles. Differential geometry*/K. Yano, Sh. Ishihara — New York, 1973

Публикации автора по теме диссертации.

[1] Опокина, Н.А. *Касательные и тензорные расслоения типа (2,0) над группой Ли*/Н.А. Опокина // Уч. зап. Казанск. гос. ун-та. Серия физикоматематической науки. — 2005. — Том 147. Книга 1. — С. 138-147

[2] Опокина, Н.А. *Форма Киллинга на тензорных расслоениях групп Ли*/Н.А. Опокина // Т. 31: Материалы IV всероссийской молодежной науч. школы-конференции «Лобачевские чтения–2005», Казань, 16–18 декабря 2005 г. — Казань: Каз. мат. общ-во, 2005. – С. 118-120.

[3] Опокина, Н.А. *Орбиты на тензорном расслоение типа (2,0)*/ Н.А. Опокина // Казань, 2005. — 11 с. — Деп. в ВИНИТИ 29.12.2005, № 1759 – В2005

[4] Опокина, Н.А. *Левая связность на тензорном расслоении типа (2, 0) группы Ли*/Н.А. Опокина// Петровские чтения. Волга - 2006. XVIII Международная летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физике. Материалы школы-семинара. — Казань — 2006. — С. 72

[5] Опокина, Н.А. *Левоинвариантная метрика на тензорном расслоении группы Ли*/Н.А. Опокина // Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, база отдыха Ростовского госуниверситета "Лиманчик", 5-11 сентября 2006 года. — Ростов-на-Дону — 2006. — С. 67-70

[6] Опокина, Н.А. *Левая связность на тензорном расслоении типа (2,0) над группой Ли*/Н.А. Опокина // Известия вузов. Математика. — Казань: изд-во Казанск. ун-та. — 2006. — № 11 (534) — С. 77-82