На правах рукописи

АГЛЯМЗЯНОВА ГУЛЬШАТ НАКИПОВНА

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, НЕОГРАНИЧЕННЫХ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ

специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2006

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Казанского государственного архитектурно-строительного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Хайруллин Равиль Сагитович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Мухлисов Фоат Габдуллович

кандидат физико-математических наук,
доцент Плещинская Ирина Евгеньевна

Ведущая организация: Самарский государственный университет

Защита состоится 23 ноября 2006 г. в 16.00 ч. на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, д. 17, ауд. 324.

С диссертацией можно познакомиться в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан _____________________ 2006 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат.наук Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория краевых задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа является одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Начало этому направлению было положено в 20-х годах прошлого столетия в работах Ф.Трикоми и С.Геллерстедта, в которых были впервые поставлены и исследованы краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Они изучали задачи для уравнения смешанного типа с одной линией параболического вырождения, теперь известные как “задача Трикоми” и “задача Геллерстедта”.

Позднее Ф.И.Франклем были обнаружены важные приложения задач Трикоми и родственных ей к газовой динамике. Вскоре И.Н.Векуа, А.В.Бицадзе, В.С.Виноградовым, А.А.Дезиным, В.А.Ильиным, И.А.Наместниковым были найдены и другие применения: теория бесконечно малых изгибаний поверхностей, безмоментная теория оболочек с кривизной переменного знака, магнитная гидродинамика. Все это явилось причиной для возникновения широкого фронта исследований подобных задач. В нашей стране возник целый ряд научных групп, которые успешно вели работу в этом направлении. Наиболее существенное влияние на эту работу оказали результаты А.М.Лаврентьева, А.В.Бицадзе, К.И.Бабенко, Л.В.Овсянникова. В дальнейшем эти задачи изучались многими авторами, как в нашей стране, так и за рубежом. Достаточно полный обзор проводившихся исследований и библиография содержатся в монографиях А.В.Бицадзе, Т.Д.Джураева, Ю.М.Крикунова, М.М.Смирнова.

В зависимости от того, является ли линия изменения типа огибающей характеристик, или нет, уравнения смешанного типа подразделяются на уравнения второго и первого родов соответственно. По аналогии с работой

С.М.Никольского и П.И.Лизоркина, будем также различать уравнения со слабым и с сильным вырождением. К первой группе отнесем те уравнения, для которых оказывается корректно поставленной классическая или весовая задача Коши с данными на особой линии. В противном случае уравнение отнесем ко второй группе.

В указанных выше монографиях, а также в книгах Е.И.Моисеева, М.М.Смирнова и Ф.Трикоми подробно изложены методы исследования основных краевых задач, главным образом для уравнений со слабым вырождением. Из всех названных книг уравнениям с сильным вырождением посвящена только одна глава в монографии Ю.М.Крикунова.

Такое положение, по-видимому, явилось следствием недостаточной изученности уравнений эллиптического и гиперболического типов особенно при их сильном вырождении. В частности, при постановке и исследовании задачи Трикоми для уравнений со слабым вырождением существенно используется решение задачи Коши, в то время как для уравнений с сильным вырождением она не корректна. А других задач, заменяющих ее, не было. Таким образом, возникли трудности даже с постановкой задачи Трикоми. Поэтому для уравнений с сильным вырождением в первую очередь начали рассматривать задачи, в которых на особой линии задается только условие непрерывности искомой функции, и это, как правило, позволяло в отличие от задачи Трикоми последовательно строить искомую функцию сначала в одной из подобластей, а затем в другой.

Краевыми задачами для уравнений смешанного типа с сильным вырождением занимались С.С.Исамухамедов, И.Л.Кароль, Ю.М.Крикунов, М.С.Салахитдинов, Н.М.Салтыкова, М.М.Смирнов, Р.С.Хайруллин, Хе Кан Чер.

В работах Р.С.Хайруллина исследована задача Трикоми для уравнения

$$\operatorname{sgn} y\, u_{xx} + u_{yy} + \frac{2q}{y} u_x + \frac{2p}{y} u_y = 0, \qquad (1)$$

при нецелых $2p<1$. Уравнение (1) в каждой из подобластей совпадает с уравнением Эйлера-Пуассона-Дарбу. При $y<0$ оно в характеристических координатах принимает вид

$$u_{\xi\eta}-\frac{\alpha}{\xi-\eta}u_{\xi}+\frac{\beta}{\xi-\eta}u_{\eta}=0. \qquad (2)$$

Автором доказана единственная разрешимость задачи Трикоми, причем, в случае $\alpha>0,\ \beta\le 0$ возникли $n+1$ или $n+2$ условия разрешимости в зависимости от значения некоторого параметра c.

Большое число работ посвящено исследованию задачи Δ_2 для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (2), к которому заменой переменных сводятся многие вырождающиеся модельные уравнения гиперболического типа. Сюда можно отнести статьи А.А.Андреева, В.Ф.Волкодавова, И.А.Наместникова, Н.Я.Николаева.

Во всех работах на параметры α и β накладываются условия, которые можно объединить так: $|\alpha|+|\beta|<1$. Только в работе Н.А.Андриянова исследуется случай $-2<\beta<-1$. Таким образом, не было исследований задачи Δ_2 для гиперболических уравнений с сильным вырождением. Этот недостаток был частично восполнен в работах Р.С.Хайруллина, в которых построено единственное решение задачи Δ_2 для уравнения (2) при $\alpha=\beta\ (-1<\alpha+n<0,\ \alpha+n\ne-\frac{1}{2})$ и $-1<\alpha+n<0,\ \beta=-k$, где n,k - целые неотрицательные числа. Здесь при $\alpha\ne\beta$ возникли $|k-n|$ условий разрешимости.

Из приведенного обзора видно, что в рассмотренных задачах Трикоми, Δ_2 для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с неравными параметрами в ряде случаев не удается получить безусловную разрешимость. Естественной является попытка снять эти условия разрешимости за счет дальнейшего ослабления на функции, входящие в постановку задач.

Основными целями работы являются: исследование краевых задач для уравнений с сильным вырождением в классе функций, неограниченных на характеристике; построение безусловного решения задач Трикоми для уравнения (1) и Δ_2 для уравнения (2).

Методы исследования. При построения решения краевых задач используется метод интегральных уравнений. В работе также развиваются идеи и методы теории функций действительной переменной, специальных функций, дифференциальных уравнений.

Научная новизна. 1. Постановка задач Трикоми и Δ_2 для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу смешанного типа.

2. Решение задачи Трикоми для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу при отрицательных значениях параметров в классе функций, неограниченных на характеристике.

3. Решение задачи Δ_2 для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу при отрицательных значениях параметров в случае нецелого первого параметра в классе неограниченных функций.

4. Доказательство некорректности задачи Δ_2 для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу при отрицательных значениях параметров в случае целого первого параметра.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер, заполняя определенный пробел в исследованиях по уравнениям с частными производными.

Апробация работы. Результаты диссертации по мере их получения докладывались на ежегодных научно-технических конференциях Казанского государственного архитектурно-строительного университета (2001-2002 гг.), на Итоговой научной конференции Казанского университета (2001 г.), на

Международной научной конференции “Актуальные проблемы математики и механики” (г. Казань, 2000 г.), на XI научной межвузовской конференции “Математическое моделирование и краевые задачи” (г. Самара, 2001г.), на Международной молодежной научной школе-конференции (г. Казань, 2002 г.) и на Международной научной конференции “Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы” (г. Стерлитамак, 2003 г.).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в работах [1] - [9], список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на 9 параграфов, списка литературы. Объем диссертации составляет 88 страниц, включая список литературы, состоящей из 67 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, излагается краткое содержание работы, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

В **главе 1** рассмотрена задача Δ_2 для уравнения (2) в области Ω, ограниченной характеристиками $AD:\xi=0$, $CD:\eta=1$, $AB:\eta=0$, $BC:\xi=1$.

В **§ 1** исследована задача Δ_2 для уравнения (2) при $0<\alpha+n<1$ и $0<\beta+k<1$, $k>n$.

Задача Δ_2**.** В области Ω найти функцию $u(\xi,\eta)$ со свойствами:

1) $u(\xi,\eta)\in C(\Omega\cup AD\cup BC)$;

2) $u(\xi,\eta)$ имеет непрерывные производные u_ξ, u_η и $u_{\xi\eta}$ и удовлетворяет уравнению (2) в $\Omega_1\cup\Omega_2$;

3) существуют пределы из областей Ω_i, $i=1,2$,

$$\nu_i = \lim_{\eta\to\xi} |\eta-\xi|^{\alpha+\beta} \left[u_\xi - u_\eta - H(\xi,\eta;\alpha,\beta;\,\tau) \right], \; 0<\eta<1,$$

и на линии вырождения AC выполняется условие склеивания

$$\nu_1(\eta) = (-1)^{n+k} \nu_2(\eta), \; 0<\eta<1;$$

4) $u(\xi,\eta)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,\eta) = \varphi(\eta), \; 0 \le \eta < 1,$$

$$u(1,\eta) = \psi(\eta), \; 0 < \eta \le 1.$$

Здесь $\Omega_1 = \Omega \cap \{\xi < \eta\}$; $\Omega_2 = \Omega \cap \{\xi > \eta\}$, $\tau(\eta) = u(\eta,\eta)$, $0 \le \eta \le 1$ — обозначения, а $\varphi(\eta), \psi(\eta)$ — заданные функции, удовлетворяющие следующему условию.

__Условие 1.__ 1) В случае $1 < \alpha_0 + \beta_0 < 2$ функция $\varphi(\eta) \in C^{n-1}[0;1) \cap C^n(0;1)$ и может иметь особенности при $\eta = 1$ порядка ниже $\alpha - \beta$, а производная $\varphi^{(n)}(\eta)$ при $\eta = 0$ может иметь особенности порядка ниже α_0; функция $\psi(\eta) \in C^{n-1}(0;1] \cap C^n(0;1)$ и имеет особенности при $\eta = 0$ порядка ниже $\alpha - \beta$, а производная $\psi^{(n)}(\eta)$ может иметь особенности при $\eta = 1$ порядка ниже α_0;

2) в случае $0 < \alpha_0 + \beta_0 < 1$ функция $\varphi(\eta) \in C^{n-1}[0;1) \cap C^n(0;1)$ и может иметь особенности при $\eta = 1$ порядка ниже $\alpha + k$, а производная $\varphi^{(n)}(\eta)$ при $\eta = 0$ может иметь особенности порядка ниже $\alpha_0 + \beta_0$; функция $\psi(\eta) \in C^{n-1}(0;1] \cap C^n(0;1)$ и имеет особенности при $\eta = 0$ порядка ниже $\alpha + k$, а производная $\psi^{(n)}(\eta)$ может иметь особенности при $\eta = 1$ порядка ниже $\alpha_0 + \beta_0$.

Здесь $\alpha_0 = \alpha + n$, $\beta_0 = \beta + k$. Функционал $H(\xi,\eta;\alpha,\beta;\tau)$ имеет специальный известный вид.

Решение строится в классе функций $\tau(\eta), \nu_i(\eta)$, удовлетворяющих условию 2.

__Условие 2.__ 1) В случае $1 < \alpha_0 + \beta_0 < 2$ функция $\tau(\eta) \in C^{n-1}[0;1] \cap C^n(0;1)$, производная $\tau^{(n)}(\eta)$ может иметь особенности при $\eta = 0$ и $\eta = 1$ порядка ниже

α_0; функции $\nu_i(\eta)\in C(0;1)$ и могут иметь особенности при $\eta=0$ и $\eta=1$ порядка ниже $1-\beta$;

2) в случае $0<\alpha_0+\beta_0<1$ функция $\tau(\eta)\in C^{n-1}[0;1]\cap C^n(0;1)$, производная $\tau^{(n)}(\eta)$ может иметь особенности при $\eta=0$ и $\eta=1$ порядка ниже $\alpha_0+\beta_0$; функции $\nu_i(\eta)\in C(0;1)$ и могут иметь особенности при $\eta=0$ и $\eta=1$ порядка ниже $1+k$.

Методом интегральных уравнений задача сводится к эквивалентной двуточечной задаче для интегро-дифференциального уравнения относительно функции $\tau(x)$. Показано, что она всегда разрешима и зависит от некоторого количества произвольных постоянных. В результате доказана

Теорема 1. Если заданные функции $\varphi(\eta),\psi(\eta)$ удовлетворяют условию 1, то задача Δ_2 имеет решение в классе функций, удовлетворяющих условию 2, причем оно будет содержать $k-n-1$ произвольное постоянное.

Здесь также исследовано поведение решения $u(\xi,\eta)$ на характеристиках CD и AB.

Теорема 2. Решение $u(\xi,\eta)$ при $\eta\to 1$ или при $\eta\to 0$ имеет особенность порядка ниже $\alpha-\beta$, если $1<\alpha_0+\beta_0<2$, и ниже $\alpha+k$, если $0<\alpha_0+\beta_0<1$.

В **§ 2** исследована задача Δ_2 для уравнения (2) при $0<\alpha+n<1$ и $\beta=-k+1$. Функции $\varphi(\eta),\psi(\eta)$ заданы в классе функций, удовлетворяющих условию, аналогичному условию 1.

Решение построено в классе функций $\tau(\eta),\nu_i(\eta)$, удовлетворяющих условию, аналогичному условию 2.

В результате доказаны теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2.

В **§ 3** рассмотрена задача Δ_2 для уравнения (2) при $\alpha=-n+1$ и $0<\beta+k<1$. Функции $\varphi(\eta),\psi(\eta)$ заданы в классе функций, удовлетворяющих

Условию 3. Функция $\varphi(\eta)\in C^{n-1}[0;1)\cap C^n(0;1)$ и может иметь особенности при $\eta=1$ порядка ниже $\alpha-\beta$, а производная $\varphi^{(n)}(\eta)$ при $\eta=0$ может иметь особенности порядка ниже 1; функция $\psi(\eta) \in C^{n-1}(0;1] \cap C^{n}(0;1)$ и имеет особенности при $\eta = 0$ порядка ниже $\alpha - \beta$, а производная $\psi^{(n)}(\eta)$ может иметь особенности при $\eta = 1$ порядка ниже 1.

Решение строилось в классе функций $\tau(\eta), \nu_i(\eta)$, удовлетворяющих условию 4.

Условие 4. Функция $\tau(\eta) \in C^{n-1}[0;1] \cap C^{n}(0;1)$, производная $\tau^{(n)}(\eta)$ может иметь особенности при $\eta = 0$ и $\eta = 1$ порядка ниже 1; функции $\nu_i(\eta) \in C(0;1)$ и могут иметь особенности при $\eta = 0$ и $\eta = 1$ порядка ниже $1 - \beta$.

Теорема 3. Если $\alpha = -n + 1$, $0 < \beta + k < 1$, то задача Δ_2 разрешима при выполнении условия разрешимости

$$\eta^{\beta}\varphi^{(n)}(\eta) + (-1)^{k}(1-\eta)^{\beta}\psi^{(n)}(\eta) = 0$$

и решение определяется с точностью до одной произвольной функции.

В **§ 4** исследована задача Δ_2 для уравнения (2) при $\alpha = -n$ и $\beta = -k$. Функции $\varphi(\eta), \psi(\eta)$ заданы в классе функций, удовлетворяющих условию, аналогичному условию 3.

Решение строилось в классе функций $\tau(\eta), \nu_i(\eta)$, удовлетворяющих условию, аналогичному условию 4.

В этом случае, как и в предыдущем, получено условие разрешимости.

Таким образом, в случае целых α задача Δ_2, вообще говоря, некорректна, так как она разрешима только при наличии зависимости между заданными функциями и решение при этом содержит произвольную функцию.

В **главе 2** исследована задача Трикоми для уравнения (1), где p, q - вещественные параметры, в смешанной области D, эллиптическая подобласть которой D_1 совпадает со всей верхней полуплоскостью, а гиперболическая подобласть D_2 представляет собой треугольник, ограниченный характеристиками $AB: x + y = 0$, $BC: x - y = 1$ и отрезком AC оси абсцисс.

Здесь рассмотрен случай нецелых $2p<1$, где $2p=\alpha+\beta$. Введены также обозначения $2q=\alpha-\beta$, m,n,k - такие неотрицательные числа, что выполняются неравенства $0<\alpha-n\le 1$, $\alpha_0=\alpha-n$, $0<\beta+k\le 1$, $\beta_0=\beta+k$, $0<2p+m<1$, $\delta=2p+m$.

В **§ 1** приведена постановка задачи.

<u>Задача T.</u> Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y)\in C\left(D_1\cup D_2\cup AB\cup\{(x;0)\}\right)$ и ограничена на бесконечности;

2) $u(x,y)\in C^2\left(D_1\cup D_2\right)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $D_1\cup D_2$;

3) существуют пределы

$$\nu_i(x)=\lim_{\substack{y\to 0\\(x,y)\in D_i}}|y|^{2p}\left[u(x,y)-A^i_{p,q}(x,y,\tau)\right]_y,\quad 0<x<1,$$

$i=1,2$ и на AC выполняется условие склеивания

$$\nu_1(x)=c\,\nu_2(x),\quad 0<x<1,$$

где

$$\tau(x)=u(x,0),\quad 0\le x<1, \tag{3}$$

$$A^i_{p,q}(x,y,\tau)=\sum_{l=1}^{m}\frac{a^i_l}{l!}\tau^{(l)}(x)y^l,$$

$$a^1_l=l_1(-1)^l\int_0^{\pi}e^{2q\xi}\cos^l\xi\ \sin^{-2p-l}\xi\ d\xi,$$

$$l_1=\frac{B(1-p-iq,1-p+iq)}{4^p\pi e^{\pi q}},$$

$$a^2_l=F(-l,\alpha,\alpha+\beta,2),\ c>0\ \text{- параметр};$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,0)=0,\ x\le 0\ \text{ или }\ x\ge 1, \tag{4}$$

$$u(x,y)\big|_{AB}=\psi(x),\ 0\le x\le\frac{1}{2}.$$

Здесь $\psi(x)$ - заданная функция, удовлетворяющая условию 5.

<u>Условие 5.</u> Функция $\psi\left(\frac{x}{2}\right)\in C[0;1)$, при $x=0$ имеет нуль порядка выше $1-\delta$, а при $x=1$ имеет особенность порядка ниже α.

Решение задачи Трикоми строилось в классе функций $\tau(x), \nu_i(x)$, удовлетворяющих условию 6.

<u>Условие 6.</u> Функция $\tau(x) \in C[0;1] \cap C^{m-1}(0;1] \cap C^{m,\lambda}(0;1) \cap C^k(0;1)$, $\tau^{(m)}(x)$ при $x=1$ имеет особенность порядка ниже δ, $\tau(x)$ при $x=0$ имеет нуль порядка выше $1-\delta$; функции $\nu_i(x) \in C^n(0;1)$ могут иметь особенности при $x=1$ порядка ниже 1, при $x=0$ - порядка ниже m. Здесь $\lambda > 1-\delta$.

В **§ 2** рассмотрена задача Дирихле (3), (4), которая использована для вывода основного соотношения из эллиптической подобласти. В итоге доказана

<u>Теорема 4.</u> Основное соотношение из эллиптической подобласти имеет вид

$$\nu_1(x) = -l_1 \Gamma(2p) D_{0x}^{1-2p}\tau(x) - l_1 \Gamma(2p) e^{2q\pi} D_{x1}^{1-2p}\tau(x).$$

В **§ 3** приведен вывод основного соотношения из гиперболической подобласти. При этом отдельно рассмотрены случаи

1) $0 < \alpha - n < 1, 0 < \beta + k < 1$; (5)

2) $0 < \alpha - n < 1,\ \beta = -k+1$; (6)

3) $\alpha = n > 0,\ 0 < \beta + k < 1$. (7)

Результатом этого параграфа является следующая

<u>Теорема 5.</u> Основное соотношение из гиперболической подобласти имеет вид

$$\nu_2(x) = l_2\, \Gamma(2p) D_{0x}^{1-2p}\tau(x) - \frac{\Gamma(1-\beta)\, 2^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(1-2p)} x^{\beta} D_{0x}^{1-\alpha}\psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

где $$l_2 = \frac{2\,\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-2p)}.$$

В **§ 4** приведен вывод и решение интегрального уравнения. С помощью условия склеивания, используя основные соотношения из эллиптической и гиперболической подобластей, получено уравнение

$$(l_1 + c\, l_2) D_{0x}^{1-2p}\tau(x) + l_1 e^{2\pi q} D_{x1}^{1-2p}\tau(x) = l_3 x^{\beta} D_{0x}^{1-\alpha}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \tag{8}$$

где $\quad l_3 = \dfrac{c\,2^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(2p)\Gamma(1-2p)}$.

Обе части равенства (8) при $x = 0$ имеют особенности порядка ниже m. Это не позволяет использовать известные схемы его преобразования, построенные ранее. Поэтому для обращения полученного уравнения были использованы другие интегральные операторы. В результате было получено уравнение

$$\frac{d^m}{dx^m}[x^{\delta-1}\tau(x)]ctg\pi\varphi - \frac{1}{\pi}\frac{d^m}{dx^m}\int_0^1 \frac{\sigma^{\delta-1}\tau(\sigma)}{\sigma - x}d\sigma = f(x),$$

где $\quad f(x) = \dfrac{l_3\Gamma(1-\delta)\,x^{2p-1}}{l_1 e^{2\pi q}\sin\pi(1-\delta)} D_{0x}^{\delta-1} x^{m+\beta} D_{0x}^{1-\alpha}\psi\left(\dfrac{x}{2}\right)$,

$$\varphi = \frac{1}{\pi}arcctg\left(\frac{l_1 + c\,l_2}{l_1 e^{2\pi q}\sin\pi(1-\delta)} + ctg\pi(1-\delta)\right).$$

Далее сформулирована и доказана

<u>Теорема 6.</u> Если функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию 5, то в классе функций $\tau(x), \nu_i(x)$, удовлетворяющих условию 6, задача Трикоми имеет единственное решение.

В **§ 5** исследовано поведение решения $u(x, y)$ на характеристике BC отдельно для случаев (5) – (7). Результатом является

<u>Теорема 7.</u> Решение $u(x, y)$ при $t \to 1$ имеет особенность порядка ниже α. Здесь $t = x - y$.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Хайруллину Равилю Сагитовичу за постановку задач, постоянную помощь в работе и поддержку.

Литература

1. Аглямзянова Г. Н. Задача Трикоми в классе функций неограниченных на характеристике : материалы 54-й респуб. науч. конф. Сб. науч. тр. аспирантов / Г. Н. Аглямзянова. – Казань : Каз. гос. архитектурно-строительная академия, 2002. – 192 с.

2. Аглямзянова Г. Н. Задача Трикоми для одного уравнения в классе неограниченных функций : материалы междунар. молодежной науч. школы-конф. / Г. Н. Аглямзянова. – Труды / Матем. центр им. Н.И.Лобачевского. – Казань : Изд-во Казанского математического общества, 2002. – Т. 18 : Казанское математическое общество. Лобачевские чтения – 2002. – 112 с.

3. Аглямзянова Г. Н. К задаче Трикоми для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу : труды междунар. конф. «Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы», Стерлитамак, 24–28 июня 2003 г. / Г. Н. Аглямзянова. – Уфа : Гилем, 2003 – Т. 2. – 283 с.

4. Аглямзянова Г. Н. Задача Трикоми в классе функций неограниченных на характеристике / Г. Н. Аглямзянова, Р.С. Хайруллин // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 4. – С. 3 – 7.

5. Зайнуллина Г. Н. Задача Δ_2 для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу в классе функций, неограниченных на характеристике / Г. Н. Зайнуллина // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 3. – С. 15 – 19.

6. Зайнуллина Г. Н. Задача Δ_2 для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с сильным вырождением : материалы 53-й респуб. науч. конф. Сб. науч. тр. аспирантов / Г. Н. Зайнуллина. – Казань : Каз. гос. архитектурно-строительная академия, 2001. – 192 с.

7. Зайнуллина Г. Н. Задача Δ_2 для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с сильным вырождением : материалы междунар. науч. конф. / Г. Н. Зайнуллина. – Труды / Математический центр им. Н.И.Лобачевского. – Казань: УНИПРЕСС, 2000. – Т. 15 : Актуальные проблемы математики и механики. – 311 с.

8. Зайнуллина Г. Н. К задаче Δ_2 для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу: труды двенадцатой межвузовской конф. «Математическое моделирование и краевые задачи» / Г. Н. Зайнуллина. – Самара : Самарский гос. техн. ун-т., 2002. – 141 с.

9. Зайнуллина Г.Н. К задаче Δ_2 для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу: труды одиннадцатой межвузовской конф. «Математическое моделирование и краевые задачи» / Г. Н. Зайнуллина. – Самара : Самарский гос. техн. ун-т., 2001. – 142 с.