На правах рукописи

ГОЛУБЕВА ЕКАТЕРИНА АЛЕКСАНДРОВНА

ГЕОМЕТРИЯ ОСНАЩЁННЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

01.01.04 – геометрия и топология

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

К а з а н ь – 2 0 0 6

Работа выполнена на кафедре геометрии ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет имени И. Я. Яковлева»

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Столяров Алексей Васильевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Игошин Владимир Александрович
кандидат физико-математических наук, доцент
Подковырин Алексей Семёнович

Ведущая организация:
Российский государственный университет имени И. Канта

Защита состоится « 21 » декабря 2006 года в 13 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д. 212.081.10 при Казанском государственном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18, КГУ, конференц-зал Научной библиотеки)

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета (г. Казань, ул. Кремлёвская, 18)

Автореферат разослан « __ » __________ 2006 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент М. А. Малахальцев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Постановка вопроса и актуальность темы. В дифференциальной геометрии важное место занимает теория связностей в различных расслоенных пространствах, а также её применение при исследовании оснащённых подмногообразий, погружённых в однородные и обобщённые пространства.

История теории связностей начинается с работы Т. Леви-Чивита[1)] о параллельном перенесении вектора в римановой геометрии. Эта идея была обобщена в различных направлениях, например, в общей теории относительности. В середине XX века В. В. Вагнер[2)] и Ш. Эресман[3)] независимо друг от друга ввели общее понятие связности в расслоенном пространстве. Г. Ф. Лаптев[4)] отождествил понятие связности с понятием геометрического объекта специального вида.

Первые применения понятия проективной связности к геометрии подмногообразий в проективном пространстве дал Э. Картан[5)]. Метод нормализации, разработанный А. П. Норденом[6)], позволил в касательных расслоениях подмногообразий проективного пространства индуцировать аффинные связности без кручения.

В работах Г. Ф. Лаптева и Н. М. Остиану[7) – 9)] получила широкое развитие теория распределений m-мерных линейных и гиперплоскостных элементов в проективном пространстве P_n и пространстве проективной связности $P_{n,n}$. В случае распределения гиперплоскостных элементов в пространствах со связностью без кручения эта теория нашла своё отражение в ра-

---

1. *Levi-Civita T.* Nozioni di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvature Riemanniana / T. Levi-Civita // Rend. circ. Matem. – Palermo, 1917. – P. 173-205.

2. *Вагнер В. В.* Теория составного многообразия / В. В. Вагнер // Труды семинара по векторному и тензорному анализу / МГУ. – Москва, 1950. – Вып. 8. – С. 11-72.

3. *Ehresmann C.* Les connexions infinitésimales dans un éspace fibré differentiable / C. Ehresmann // Collque de Topologie (Bruxelles, 1950). – Paris, 1951. – P. 29-55.

4. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погружённых многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований / Г. Ф. Лаптев // Тр. Моск. матем. об-ва. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275-382.

5. *Cartan E.* Les éspaces á connexion projective / E. Cartan // Труды семинара по векторному и тензорному анализу / МГУ. – Москва, 1937. – Вып. 4. – С. 147-159.

6. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности / А. П. Норден. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

7. *Лаптев Г. Ф.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I / Г. Ф. Лаптев, Н. М. Остиану // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1971. – Т. 3. – С. 49-94.

8. *Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II / Н. М. Остиану // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1971. – Т. 3. – С. 96-114.

9. *Остиану Н. М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве / Н. М. Остиану // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1973. – Т. 4. – С. 71-120.

ботах В. И. Близникаса[10), 11)].

В. Т. Базылевым[12), 13)] получена обширная теория плоских многомерных сетей $\sum_n$, погружённых в n-мерное проективное пространство P_n.

А. В. Столяровым[14)] построены основы двойственных теорий различных оснащённых многообразий, погружённых в пространство проективной связности $P_{n,n}$.

Понятие пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ было введено Г. Ф. Лаптевым[4)] как обобщение понятия проективно-метрического пространства K_n [6)]. А. В. Столяровым[15)] найдено инвариантное аналитическое условие, при выполнении которого пространство проективной связности $P_{n,n}$ становится пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$; им изучены некоторые вопросы дифференциальной геометрии полярной[15)] нормализации пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$.

Отметим, что проективно-метрическое пространство K_n с невырожденным абсолютом овального типа имеет особое значение в геометрии, так как оно представляет собой проективную интерпретацию геометрии Лобачевского, с помощью которой Ф. Клейн дал строгое доказательство её непротиворечивости.

Объектом исследования настоящей работы являются оснащённые многообразия, погружённые в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$ с n-мерной базой и n-мерными слоями. В качестве подмногообразий пространства $K_{n,n}$ рассматриваются само пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$ (глава I) и регулярное распределение гиперплоскостных элементов (регулярная неголономная гиперповерхность) $\Re$, погружённое в пространство $K_{n,n}$ (главы II и III); в качестве оснащений – нормализации указанных подмногообразий пространства $K_{n,n}$.

---

10. *Близникас В. И.* О неголономной поверхности трёхмерного пространства проективной связности / В. И. Близникас // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – 1971. – Т. 3. – С. 115-124.

11. *Близникас В. И.* Дифференциальная геометрия неголономной гиперповерхности риманова пространства / В. И. Близникас // Liet. mat. rinkinys: Лит. мат. сб. – Вильнюс, 1971. – Т. 11. – № 1. – С. 63-74.

12. *Базылев В. Т.* К геометрии плоских многомерных сетей / В. Т. Базылев // Уч. зап. Московского гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. – 1965. – № 243. – С. 29-37.

13. *Базылев В. Т.* О многомерных сетях и их преобразованиях / В. Т. Базылев // Итоги науки и техники. Геометрия (1963) / ВИНИТИ АН СССР. – М., 1965. – С. 138-164.

14. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащённых многообразий: Монография. 2-е изд., доп. / А. В. Столяров. – Чебоксары: Чувашский госпедун-т, 1994. – 290 с.

15. *Столяров А. В.* Пространство проективно-метрической связности / А. В. Столяров // Известия вузов. Матем. – 2003. – № 11. – С. 70-76.

Эти исследования являются актуальными и представляют большой научный интерес, ибо: 1) изучение геометрии нормализованного пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ до настоящего времени находилось лишь в начальной стадии; 2) геометрия неголономной гиперповерхности, погружённой в пространство $K_{n,n}$, отличное от плоского, до настоящего времени в математической литературе вообще не изучалась; 3) представляет научный интерес приложение геометрии проективно-метрического пространства K_n и аффинных связностей, индуцируемых его нормализацией, к изучению некоторых классов плоских сетей $\sum_n \subset K_n$.

Цель работы. Целью настоящего диссертационного исследования является инвариантное построение основ двойственной геометрии некоторых оснащённых многообразий, погружённых в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$. Достижение поставленной цели включает в себя решение следующих ключевых задач:

1) внутренним инвариантным образом построить и изучить двойственную геометрию линейных связностей (проективных, проективно-метрических и аффинных), индуцируемых нормализацией пространства $K_{n,n}$, а также найти пути приложения геометрии проективно-метрического пространства K_n и полученных аффинных связностей к изучению некоторых классов плоских сетей $\sum_n \subset K_n$;

2) построить основы инвариантной двойственной геометрии регулярной неголономной гиперповерхности $\mathfrak{R}$, погружённой в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$;

3) исследовать дифференциально-геометрические структуры, внутренним инвариантным образом определяемые нормализацией распределения гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$ в $K_{n,n}$;

4) для распределения $\mathfrak{R}$ построить полярное (относительно локальных абсолютов Q_{n-1} пространства $K_{n,n}$) распределение гиперплоскостных элементов $\widetilde{\mathfrak{R}}$ и изучить геометрию подмногообразий $\mathfrak{R}$, $\widetilde{\mathfrak{R}}$ и их нормализаций во взаимосвязи.

Методы исследования. В диссертации используются инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований, а именно, метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева[4], метод внешних дифференциальных форм Э. Картана[16] и метод нормализации А. П. Нордена[6]. Использование указанных методов позволило изучить дифференциально-геометрические факты, связанные с дифференциальными окрестностями образующих элементов исследуемых подмногообразий до третьего порядка включительно.

---

16. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии / С. П. Фиников. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

Все исследования в работе проводятся в минимально специализированных системах отнесения, что позволило получить результаты в инвариантной форме. Все рассмотрения проводятся с локальной точки зрения. Встречающиеся функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми, то есть изучаемые подмногообразия достаточно гладкие, а при доказательстве теорем существования – аналитическими. Следует заметить, что результаты по геометрии линейных связностей получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г. Ф. Лаптевым [4), 17)].

Научная новизна. Все результаты диссертационного исследования являются новыми и получены автором самостоятельно; научная новизна обусловлена тем, что до настоящего времени в математической литературе геометрия оснащённых многообразий, погружённых в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$, оставалась практически не изученной.

В диссертации приведены доказательства всех основных предложений, которые сформулированы в виде теорем.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретическое значение. Полученные в ней результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении различных подмногообразий (как голономных, так и неголономных) пространства $K_{n,n}$ в Казанском, Калининградском, Тверском государственных университетах, Нижегородском и Чувашском государственных педагогических университетах.

Теория, разработанная в диссертации, может быть применена в качестве материала специальных и факультативных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а также при написании ими курсовых, дипломных и научных работ.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах по современным проблемам геометрии: на заседаниях научно-исследовательского семинара молодых исследователей при кафедре геометрии Чувашского государственного педагогического университета (Чебоксары, 2004 – 2006 гг.); на научных конференциях аспирантов, докторантов и научных сотрудников Чувашского государственного педагогического университета (Чебоксары, 2004 – 2006 гг.); на IX нижегородской сессии молодых учёных «Математические науки» (Саров, 2004 г.); на Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 2004 г.); на Четвёртой молодёжной научной школе-конференции «Лобачевские чтения-2005» (Казань, 2005 г.); на заседаниях Казанского городского научно-исследовательского геометрического семинара (Казань, КГУ, 2006 г.).

---

17. *Евтушик Л. Е.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л. Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. – М., 1979. – Т. 9. – 246 с.

Публикации. Основные научные результаты, включённые в диссертационную работу, опубликованы в 17 печатных работах автора (см. [1] – [17]).

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные научные работы по теме исследования, кроме одной (см. [1]), выполнены без соавторов.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика и содержание диссертации), трёх глав и списка литературы, включающего 110 наименований. Полный объём диссертации составляет 127 страниц машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе изучается двойственная геометрия нормализованного[6)] пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$[4)] и плоских многомерных сетей[12)] $\sum_n \subset K_n$.

В начале главы (§ 1, пп. 1, 2) приводится материал, носящий реферативный характер. В пункте 3 § 1 найдена квадратичная форма $ds^2 \cong -\dfrac{f^2}{c} a_{IJ}\omega_0^I\omega_0^J$, определяющая *метрику* пространства $K_{n,n}$.

Пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$ по аналогии с определением, введённым А. П. Норденом[6)] для проективного пространства P_n, называется *нормализованным* (оснащённым по А. П. Нордену), если в нём задано поле ковектора $\nu_{\bar{I}}$, $\nu_0 \neq 0$. Методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева[4)] в первых трёх дифференциальных окрестностях нормализованного пространства $K_{n,n}$ построены (§ 2, п. 1) поля тензоров c_I, b_{IJ}, Λ_I, A_{IJK}, B_{IJK}; при этом тензор b_{IJ} предполагается невырожденным, то есть рассматривается *невырожденная*[14)] нормализация пространства $K_{n,n}$. По аналогии с нормализованным проективным пространством P_n[6)] нормализация пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ с полем симметричного тензора b_{IJ} называется *гармонической.*

С использованием теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г. Ф. Лаптевым[4), 17)], получен (§ 2, пп. 2, 3) один из центральных результатов первой главы: *в третьей дифференциальной окрестности невырожденная нормализация пространства проективно-метрической связности* $K_{n,n}$ *индуцирует три нормализованных невырожденным образом пространства проективной связности* $\overset{2}{P}_{n,n}$, $\overset{3}{P}_{n,n}$, $\overset{4}{P}_{n,n}$; *индуцированные пространства* $\overset{2}{P}_{n,n}$, $\overset{3}{P}_{n,n}$, $\overset{4}{P}_{n,n}$ *являются двойственными*[14)] *относительно соответствующих инволютивных преобразований* I_p

$(p=1,2,3)$ *форм проективной связности как между собой, так и по отношению к исходному пространству* $K_{n,n}$ (теоремы I.2, I.3).

Пункт 4 § 2 главы I посвящён нахождению критерия того, что каждое из пространств проективной связности $\overset{2}{P}_{n,n}$, $\overset{3}{P}_{n,n}$, $\overset{4}{P}_{n,n}$ (по отдельности) является пространством проективно-метрической связности. Доказано, что, если пространство $\overset{3}{P}_{n,n}$ или $\overset{4}{P}_{n,n}$, индуцируемое невырожденной нормализацией пространства $\overset{0}{K}_{n,n}$ без кручения, также имеет нулевое кручение, то вопрос о нахождении критерия быть пространством проективно-метрической связности нужно ставить лишь по отношению к пространству $\overset{2}{P}_{n,n}$. В случае пространств $K_{n,n}$ и $\overset{2}{P}_{n,n}$ без кручения найдено инвариантное аналитическое условие, при выполнении которого $\overset{2}{P}_{n,n}$ есть пространство проективно-метрической связности; этим условием является обращение в ноль тензора третьего порядка C_{IJK} (теорема I.7); рассмотрены три возможных частных случая, при которых равен нулю тензор C_{IJK}, а именно, доказаны следующие утверждения (теоремы I.8 – I.10):

– *невырожденная нормализация проективно-метрического пространства* K_n *индуцирует двойственное нормализованное (невырожденным образом) проективно-метрическое пространство* $\overset{2}{K}_n$;

– *при невырожденной полярной*[15)] *нормализации пространства проективно-метрической связности* $\overset{0}{K}_{n,n}$ *без кручения индуцируется двойственное пространство проективно-метрической связности без кручения, изоморфное исходному*;

– *если при невырожденной нормализации пространства* $\overset{0}{K}_{n,n}$ *без кручения индуцируемое пространство проективной связности* $\overset{2}{P}_{n,n}$ *также имеет нулевое кручение и обращается в ноль тензор* $c_I+\dfrac{1}{n+1}\Lambda_I$, *то пространство* $\overset{2}{P}_{n,n}$ *представляет собой полярно нормализованное пространство проективно-метрической связности без кручения.*

В пункте 5 § 2 исследуется случай *полярной*[15)] нормализации пространства $K_{n,n}$. Показано, что в этом случае индуцированные двойственные пространства проективной связности $\overset{2}{P}_{n,n}$, $\overset{3}{P}_{n,n}$, $\overset{4}{P}_{n,n}$ совпадают и представляют собой пространство проективно-метрической связности, изоморфное исходному пространству $K_{n,n}$ (теорема I.11).

Определение. Невырожденным образом нормализованное пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$ с полем нулевого тензора третьего порядка A_{IJK} назовём $A-$*пространством* проективно-метрической связности, а с полем нулевого тензора третьего порядка B_{IJK} – $B-$*пространством* проективно-метрической связности.

Доказано, что на $A-$пространстве $K_{n,n}$ индуцируемые двойственные пространства проективной связности $\overset{2}{P}_{n,n}$, $\overset{3}{P}_{n,n}$, $\overset{4}{P}_{n,n}$ совпадают, причём пространство $\overset{2}{P}_{n,n}$ представляет собой гармонически нормализованное тангенциальное $A-$пространство проективно-метрической связности с теми же формами связности и тензором кривизны-кручения, что и исходное пространство $K_{n,n}$ (теорема I.12).

В § 3 изучаются аффинные связности, индуцируемые невырожденной нормализацией пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$.

Доказано (§ 3, п. 1), что *невырожденная нормализация пространства* $K_{n,n}$ *индуцирует два пространства аффинной связности* $A_{n,n}$ *и* $\overline{A}_{n,n}$ *с кривизной и кручением*, *двойственные относительно инволютивного преобразования* I_1 (теорема I.14). Найден критерий совпадения связностей ∇ и $\overline{\nabla}$; в этом случае $K_{n,n}$ есть $A-$пространство (теорема I.15).

Получен (§ 3, п. 2) ряд результатов по изучению внутренних геометрий пространств $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$; доказаны следующие предложения:

1) пространство аффинной связности без кручения $\overset{0}{A}_{n,n}$ является эквиаффинным тогда и только тогда, когда нормализации исходного пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ гармоническая; критерием эквиаффинности пространства $\overset{0}{\overline{A}}_{n,n}$ без кручения является обращение в ноль чебышевского вектора Λ_K (теоремы I.16, I.16*);

2) на $A-$пространстве $\overset{0}{K}_{n,n}$ без кручения аффинная связность $\nabla\equiv\overline{\nabla}$ риманова с полем метрического тензора b_{IJ}; на $B-$пространстве $K_{n,n}$ геометрия аффинной связности ∇ ($\overline{\nabla}$) является метрической с полем метрического тензора $M_{IJ}\overset{def}{=}\frac{1}{2}\left(b_{IJ}+b_{JI}\right)$, и при её нулевом кручении в предположении $\left|M_{IJ}\right|\neq 0$ она будет вейлевой с полем метрического тензора M_{IJ} (теоремы I.17, I.18);

3) условие *симметричности*[18)] любого из пространств $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$, ин-

18. *Рашевский П. К.* Симметрические пространства аффинной связности с кручением. I / П. К. Рашевский // Труды семинара по векторному и тензорному анализу / МГУ. – Москва, 1950. – Вып. 8. – С. 82-92.

дуцируемых нормализацией проективно-метрического пространства K_n, равносильно совпадению связностей ∇ и $\overline{\nabla}$ (теорема I.19).

Выяснен (§ 3, п. 3) характер геометрии средней по отношению к связностям ∇ и $\overline{\nabla}$ аффинной связности $\overset{0}{\nabla}$. Доказано, что если в случае гармонической нормализации пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ средняя связность $\overset{0}{\nabla}$ имеет нулевое кручение (что выполняется, например, при $K_{n,n} \equiv K_n$), то соответствующая ей геометрия является римановой с полем основного метрического тензора b_{IJ} (теорема I.20).

Пункт 4 § 3 первой главы посвящён изучению внутренних геометрий аффинных связностей ∇ и $\overline{\nabla}$ в случае полярной[15] нормализации пространства $K_{n,n}$. Показано, что внутренняя геометрия пространства аффинной связности $A_{n,n} \equiv \overline{A}_{n,n}$, индуцируемого полярной нормализацией пространства $K_{n,n}$, является метрической с полем метрического тензора a_{IJ}; если при этом пространство $K_{n,n}$ (а, следовательно, и $A_{n,n}$) без кручения, то связность пространства $\overset{0}{A}_{n,n}$ эквиаффинная (теорема I.21). При полярной нормализации пространства проективно-метрической связности $\overset{0}{K}_{n,n}$ без кручения с невырожденной метрикой $\left(|a_{IJ}| \neq 0\right)$ пространство аффинной связности без кручения $\overset{0}{A}_{n,n}$ является римановым с полем основного метрического тензора a_{IJ}; при этом, если тензор R^I_{STI} пространства $\overset{0}{K}_{n,n}$ нулевой, то пространство $\overset{0}{A}_{n,n}$ эйнштейново[19] (теорема I.22).

В § 4 первой главы найдены пути приложения теории проективно-метрического пространства K_n и аффинных связностей ∇ и $\overline{\nabla}$ пространств $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$ к изучению геометрии некоторых классов плоских сетей[12] $\sum_n \subset K_n$, а именно, сопряжённых относительно поля конусов направлений $a_{KL}\omega_0^K \omega_0^L = 0$ n-сопряжённых систем в смысле Р. В. Смирнова[20], сопряжённых относительно поля конусов направлений $a_{KL}\omega_0^K \omega_0^L = 0$ чебышевских n-сопряжённых систем первого и второго родов, сопряжённых геодезических n-сопряжённых систем первого рода. Основные результаты этого параграфа приведены в теоремах I.24, I.26, I.27 и замечаниях к ним. Доказаны теоремы существования основных классов рассматриваемых плоских сетей $\sum_n \subset K_n$.

19. *Кобаяси Ш.* Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 344 с; Т. 2. – 414 с.
20. *Смирнов Р. В.* Преобразования Лапласа p-сопряжённых систем / Р. В. Смирнов // Доклады АН СССР. – 1950. – Т. 71. – №3. – С. 437-439.

В главе II диссертации изучается двойственная геометрия регулярного распределения первого рода гиперплоскостных элементов[7), 9)] $\mathfrak{R}$, погружённого в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$.

В § 1, п. 1 записаны дифференциальные уравнения подмногообразия $\mathfrak{R}$, приведены поля его фундаментальных и некоторых охваченных геометрических объектов. Центральным результатом § 1 является теорема II.1: *регулярное распределение гиперплоскостных элементов* $\mathfrak{R}$, *погружённое в пространство проективно-метрической связности* $K_{n,n}$, *индуцирует*:

1) *во второй дифференциальной окрестности пространство проективной связности* $\overline{P}_{n,n}$, *двойственное пространству* $K_{n,n}$;

2) *в первой дифференциальной окрестности многообразие* $\overline{\mathfrak{R}}$ *в* $\overline{P}_{n,n}$, *двойственное исходному распределению* $\mathfrak{R}$.

В случае пространств $K_{n,n}$ и $\overline{P}_{n,n}$ без кручения найдено условие того, что пространство проективной связности $\overset{0}{\overline{P}}_{n,n}$ есть пространство проективно-метрической связности $\overset{0}{\overline{K}}_{n,n}$ (теорема II.2).

Доказано (§ 2, пп. 1, 2), что распределение гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$ в $K_{n,n}$ внутренним образом порождает два поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик[4), 7), 14)] Q^2_{n-1} и $\widetilde{Q}^2_{n-1}$, определённых во второй и третьей дифференциальных окрестностях текущего элемента распределения соответственно. Построены образы $\overline{Q}^2_{n-1}$, $\overline{\widetilde{Q}}^2_{n-1}$, двойственные гиперквадрикам Q^2_{n-1}, $\widetilde{Q}^2_{n-1}$ и определённые на подмногообразии $\overline{\mathfrak{R}}$ в $\overline{P}_{n,n}$. В случае распределения $\mathfrak{R}$ с полем симметричного тензора Λ^n_{ij} найдены условия касания третьего порядка[14)] гиперквадрик полей Q^2_{n-1} и $\widetilde{Q}^2_{n-1}$ ($\overline{Q}^2_{n-1}$ и $\overline{\widetilde{Q}}^2_{n-1}$) с подмногообразием $\mathfrak{R}$ в $K_{n,n}$ ($\overline{\mathfrak{R}}$ в $\overline{P}_{n,n}$) (теоремы II.4, II.4*, II.5).

В § 3 второй главы для распределения $\mathfrak{R}$ в $K_{n,n}$ построено полярное (относительно локальных абсолютов Q_{n-1} пространства $K_{n,n}$) распределение гиперплоскостных элементов $\widetilde{\mathfrak{R}}$ (теорема II.6). В случае, когда исходное пространство проективно-метрической связности плоское ($K_{n,n} \equiv K_n$), найдены дифференциальные уравнения подмногообразия $\widetilde{\mathfrak{R}}$, доказано, что: 1) регулярность одного из взаимно-полярных распределений $\mathfrak{R}$ и $\widetilde{\mathfrak{R}}$ в проективно-метрическом пространстве K_n влечёт регулярность другого (теорема II.7); 2) подмногообразия $\mathfrak{R}$ и $\widetilde{\mathfrak{R}}$ в K_n могут быть голономными[12)] лишь одновременно (теорема II.8).

<u>Г л а в а III</u> диссертации посвящена изучению двойственной геометрии нормализованного[6)] распределения гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$, погружённого в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$.

В § 1 доказано, что нормализация одного из регулярных распределений гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$ в $K_{n,n}$ и $\overline{\mathfrak{R}}$ в $\overline{P}_{n,n}$ *равносильна* нормализации другого; найдена взаимосвязь между компонентами полей оснащающих объектов $\{q^i_n, q_i\}$ и $\{\overline{q}^i_n, \overline{q}_i\}$ подмногообразий $\mathfrak{R}$ и $\overline{\mathfrak{R}}$ (теорема III.1). Приведены примеры применения двойственной геометрии распределения гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$ в $K_{n,n}$ к построению его взаимно-полярной и двойственных[14)] инвариантных нормализаций.

Центральным результатом § 2 третьей главы является теорема III.2: *оснащение в смысле А. П. Нордена регулярного распределения гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$, погружённого в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$, индуцирует два двойственных пространства аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,n-1}$ и $\overset{2}{A}_{n,n-1}$ в общем случае с кривизной и кручением.* Доказано (п. 1 § 2), что аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ пространств $\overset{1}{A}_{n,n-1}$ и $\overset{2}{A}_{n,n-1}$ *обобщённо сопряжены*[6)] относительно поля тензора Λ^n_{ij} вдоль любой кривой, принадлежащей распределению $\mathfrak{R}$. Для случая $K_{n,n} \equiv K_n$ найдены геометрические характеристики параллельного перенесения[6)] допустимого[6)] направления в аффинных связностях $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ вдоль кривой, принадлежащей подмногообразию $\mathfrak{R}$. В случае пространств $K_{n,n}$ и $\overline{P}_{n,n}$ без кручения для распределения $\mathfrak{R}$ в $K_{n,n}$ с полем симметричного тензора Λ^n_{ij} получено геометрическое условие совпадения связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ (теорема III.3).

В пункте 2 § 2 доказано, что нормализация регулярного распределения гиперплоскостных элементов $\mathfrak{R}$, погружённого в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$, внутренним образом определяет *оснащения в смысле Э. Картана*[5)] *распределений $\mathfrak{R}$ в $K_{n,n}$ и $\overline{\mathfrak{R}}$ в $\overline{P}_{n,n}$*, а также *нормализации*[6)] *пространств $K_{n,n}$ и $\overline{P}_{n,n}$* (теоремы III.4, III.5).

Найдены (§ 2, п. 3) строения форм $\left\{\overset{1}{\Omega}{}^{\bar{I}}_{\bar{J}}\right\}$ и $\left\{\overset{2}{\Omega}{}^{\bar{I}}_{\bar{J}}\right\}$, определяющих пространства аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,n}$ и $\overset{2}{A}_{n,n}$ соответственно (теорема III.6).

Показано, что система форм $\left\{\overset{1}{\Omega}{}^{\bar{I}}_{\bar{J}}\right\}$ $\left(\left\{\overset{2}{\Omega}{}^{\bar{I}}_{\bar{J}}\right\}\right)$ содержит подсистему $\left\{\overset{1}{\Omega}{}^{i}_{\bar{j}}\right\}$ $\left(\left\{\overset{2}{\Omega}{}^{i}_{\bar{j}}\right\}\right)$, являющуюся системой слоевых форм линейной связности $\overset{3}{\nabla}$ ($\overset{4}{\nabla}$) аффинного типа. Доказаны следующие предложения:

1) аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{3}{\nabla}$ совпадают тогда и только тогда, когда направление нормали первого рода Π_1 в аффинной связности пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$ переносится параллельно вдоль любой кривой, принадлежащей распределению гиперплоскостных элементов $\Re$ в $K_{n,n}$ (теорема III.7);

2) направление нормали первого рода Π_1 оснащённого в смысле А. П. Нордена распределения $\Re$ в K_n $(n \geq 3)$ обладает свойством абсолютного параллелелизма относительно аффинной связности пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$ тогда и только тогда, когда точка Кенигса[9)] этой нормали неподвижна (теорема III.8).

Имеют место теоремы, двойственные приведённым выше предложениям.

В § 3 третьей главы в случае $K_{n,n} \equiv K_n$ изучаются геометрии нормализованных[6)] взаимно-полярных подмногообразий $\Re$ и $\tilde{\Re}$ (см. главу II, § 3). Центральным результатом § 3 является теорема III.9: *нормализация одного из распределений гиперплоскостных элементов* $\Re$ *и* $\tilde{\Re}$ *в* K_n *равносильна нормализации другого*; найдена взаимосвязь между оснащающими объектами $\{q^i_n, q_i\}$ и $\{q^i, q^n_i\}$ подмногообразий $\Re$ и $\tilde{\Re}$. Показано, что нормализация распределения $\Re$, погружённого в проективно-метрическое пространство K_n, индуцирует два полярных (относительно абсолюта Q_{n-1} пространства K_n) пространства аффинной связности $\overset{0}{A}_{n,n-1}$, $\overset{0}{\tilde{A}}_{n,n-1}$ без кручения; при этом пространство $\overset{0}{A}_{n,n-1}$ определяется на подмногообразии $\Re$ в K_n, а $\overset{0}{\tilde{A}}_{n,n-1}$ – на полярном распределении $\tilde{\Re}$ в K_n (теорема III.10).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Получены три попарно двойственных как между собой, так и по отношению к исходному пространству $K_{n,n}$ пространства проективной связ-

ности $\overset{2}{P}_{n,n}$, $\overset{3}{P}_{n,n}$, $\overset{4}{P}_{n,n}$ и два двойственных пространства аффинной связности $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$, индуцируемые невырожденной нормализацией пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$. Показано, что если в случае исходного пространства $K_{n,n}$ без кручения пространство $\overset{3}{P}_{n,n}$ или $\overset{4}{P}_{n,n}$ также имеет нулевое кручение, то вопрос о нахождении критерия быть пространством проективно-метрической связности нужно ставить лишь по отношению к пространству $\overset{2}{P}_{n,n}$. В случае пространств $K_{n,n}$ и $\overset{2}{P}_{n,n}$ без кручения найдено инвариантное аналитическое условие, при выполнении которого $\overset{2}{P}_{n,n}$ есть пространство проективно-метрической связности. Изучены свойства полученных пространств в общем случае, при полярной нормализации, на $A-$ и $B-$пространствах проективно-метрической связности, а также в случае, когда исходное пространство $K_{n,n}$ без кручения или плоское. Найдены пути приложения геометрии проективно-метрического пространства K_n и полученных аффинных связностей к изучению некоторых классов плоских многомерных сетей $\sum_n$ в K_n.

2. Показано, что регулярное распределение гиперплоскостных элементов $\Re$ в $K_{n,n}$ (неголономная гиперповерхность) внутренним инвариантным образом индуцирует пространство проективной связности $\overline{P}_{n,n}$, двойственное пространству $K_{n,n}$, и подмногообразие $\overline{\Re}$ в $\overline{P}_{n,n}$, двойственное исходному распределению $\Re$. В случае пространств $K_{n,n}$ и $\overline{P}_{n,n}$ без кручения найдено инвариантное аналитическое условие, при выполнении которого $\overset{0}{\overline{P}}_{n,n}$ является пространством проективно-метрической связности. Приведены примеры приложения двойственной геометрии распределения $\Re$ в $K_{n,n}$ к построению двойственных полей соприкасающихся гиперквадрик.

3. Доказано, что нормализация одного из регулярных распределений гиперплоскостных элементов $\Re$ в $K_{n,n}$ и $\overline{\Re}$ в $\overline{P}_{n,n}$ равносильна нормализации другого. В разных дифференциальных окрестностях внутренним инвариантным образом построен ряд двойственных нормализаций неголономной гиперповерхности $\Re$ пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$; получены двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые этими нормализациями. Найдены приложения двойственной геометрии нормализованного подмногообразия $\Re$ к построению оснащений в смысле Э. Картана распределений $\Re$ в $K_{n,n}$ и $\overline{\Re}$ в $\overline{P}_{n,n}$, нормализаций пространств $K_{n,n}$ и $\overline{P}_{n,n}$, а также изучены двойственные пространства аффинной связ-

ности $\overset{1}{A}_{n,n}$ и $\overset{2}{A}_{n,n}$, индуцируемые при этом.

4. Построено распределение гиперплоскостных элементов $\tilde{\Re}$, полярное подмногообразию $\Re$ (относительно локальных абсолютов Q_{n-1} пространства $K_{n,n}$). В случае $K_{n,n} \equiv K_n$ найдены дифференциальные уравнения подмногообразия $\tilde{\Re}$ и изучены свойства распределений $\Re$ и $\tilde{\Re}$ во взаимосвязи. Доказано, что нормализация одного из распределений гиперплоскостных элементов $\Re$ и $\tilde{\Re}$ в проективно-метрическом пространстве K_n равносильна нормализации другого; при этом на распределениях $\Re$ и $\tilde{\Re}$ индуцируются соответственно пространства аффинной связности $\overset{0}{A}_{n,n-1}$ и $\overset{0}{\tilde{A}}_{n,n-1}$ без кручения, являющиеся полярными относительно абсолюта Q_{n-1} пространства K_n.

РАБОТЫ АВТОРА, ОПУБЛИКОВАННЫЕ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Голубева Е. А.* (*Мухина Е. А.*) A – пространство проективно-метрической связности / Е. А. Мухина, А. В. Столяров // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2004. – № 3(41). – С. 29-33.
2. *Голубева Е. А.* (*Мухина Е. А.*) Внутренняя геометрия оснащённого в смысле А. П. Нордена пространства проективно-метрической связности / Е. А. Мухина // IX нижегородская сессия молодых учёных. Математические науки: Тезисы докладов. – Нижний Новгород: Изд-во Гладкова О. В., 2004. – С. 51-52.
3. *Голубева Е. А.* (*Мухина Е. А.*) Нормализованное пространство проективно-метрической связности / Е. А. Мухина // ВИНИТИ РАН. – М., 2004. – № 615 – В2004. – 17 с.
4. *Голубева Е. А.* (*Мухина Е. А.*) Поля геометрических объектов нормализованного пространства проективно-метрической связности / Е. А. Мухина // Научно-информационный Вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2004. – № 1(3). – Т. 2. – С. 15-21.
5. *Голубева Е. А.* (*Мухина Е. А.*) Пространство проективно-метрической связности, оснащённое в смысле А. П. Нордена / Е. А. Мухина / Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Том 25 / Казанское мат. об-во. Актуальные проблемы математики и механики // Материалы междунар. науч. конференции. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2004. – С. 196-197.
6. *Голубева Е. А.* Двойственные аффинные связности, индуцируемые нормализацией пространства проективно-метрической связности / Е. А. Голубева // ВИНИТИ РАН. – М., 2005. – № 163 – В2005. – 19 с.

7. *Голубева Е. А.* Двойственные пространства проективно-метрической связности без кручения / Е. А. Голубева // ВИНИТИ РАН. – М., 2005. – № 1352 – В2005. – 19 с.

8. *Голубева Е. А.* Двойственные пространства проективно-метрической связности без кручения, ассоциированные с регулярной неголономной гиперповерхностью / Е. А. Голубева // ВИНИТИ РАН. – М., 2005. – № 1743 – В2005. – 17 с.

9. *Голубева Е. А.* Двойственные пространства проективно-метрической связности без кручения, индуцируемые нормализацией пространства проективно-метрической связности / Е. А. Голубева // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Том 31 / Казанское мат. об-во. Лобачевские чтения – 2005 / Материалы Четвёртой молодёжной научной школы-конференции. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2005. – С. 47-49.

10. *Голубева Е. А.* Линейные связности, индуцируемые нормализацией пространства проективно-метрической связности / Е. А. Голубева // Наука XXI века. Достижения и перспективы: сб. ст. / Чувашский гос. ин-т гум. наук. – Чебоксары, 2005. – С. 4-5.

11. *Голубева Е. А.* Метрика пространства проективно-метрической связности / Е. А. Голубева // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2005. – № 1(43). – С. 25-29.

12. *Голубева Е. А.* Регулярное распределение гиперплоскостных элементов и двойственные пространства проективно-метрической связности без кручения / Е. А. Голубева // Научно-информационный Вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2005. – № 2(6). – С. 3-8.

13. *Голубева Е. А.* Взаимно-полярные распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективно-метрической связности / Е. А. Голубева // ВИНИТИ РАН. – М., 2006. – №731 – В2006. – 14 с.

14. *Голубева Е. А.* Внутренняя геометрия нормализованного пространства проективно-метрической связности / Е. А. Голубева // Известия вузов. Матем. – 2006. – № 1. – С. 73-75.

15. *Голубева Е. А.* Двойственная геометрия нормализованного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективно-метрической связности / Е. А. Голубева // ВИНИТИ РАН. – М., 2006. – № 397 – В2006. – 28 с.

16. *Голубева Е. А.* Нормализации взаимно-полярных распределений гиперплоскостных элементов пространства проективно-метрической связности / Е. А. Голубева // Научно-информационный Вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2006. – №1(7). – Т. 1. – С. 7-12.

17. *Голубева Е. А.* Геометрия плоских сетей в проективно-метрическом пространстве / Е. А. Голубева // ВИНИТИ РАН. – М., 2006. – № 960 – В2006. – 11 с.

Подписано к печати __________. Формат $60 \times 84/_{16}$.
Бумага ксероксная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ _____.

Отдел оперативной полиграфии
Чувашского государственного педагогического университета.
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.