

На правах рукописи  
УДК 517

Пузанкова Евгения Александровна

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

010101 — математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ.**

Диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители: д.ф.-м.н., проф. В.В. Дубровский  
к.ф.-м.н., проф. М.В. Бушманова

Екатеринбург — 2003

Работа выполнена на кафедре математики Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И.Носова

Научные руководители:

--- доктор физико-математических наук,  
профессор В.В. Дубровский;

— кандидат физико-математических наук,  
профессор М.В. Бушманова.

Официальные оппоненты:

— доктор физико-математических наук,  
профессор И.В. Мельникова;

— доктор физико-математических наук,  
профессор Г.В. Хромова.

Ведущая организация:

— Институт математики и механики  
Уральского отделения РАН

Защита диссертации состоится «11» февр./Е&февр. 2003г. в 14 ч. 10 мин.  
на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой  
степени кандидата физико-математических наук при Уральском  
государственном университете им. А.М. Горького по адресу: 620083,  
г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского  
государственного университета им. А.М.Горького

Автореферат разослан «10» февр./10 2003г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор



В.Г. Пименов

# Общая характеристика работы

**Актуальность проблемы.** Диссертация посвящена решению прямых и обратных задач спектральной теории дифференциальных операторов в частных производных. Многие вопросы математической физики приводят к проблеме спектрального анализа дифференциальных операторов. Характерным подходом в исследовании спектра дифференциальных операторов является изучение *асимптотики спектральной функции* и вычисление *регуляризованных следов*. Поскольку для неограниченных операторов спектральный и матричный следы не существуют, возникает понятие так называемых "регуляризованных следов". Проблема вычисления регуляризованных следов восходит к работе И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [5], опубликованной в 1953 г. Они рассмотрели оператор Штурма-Лиувилля, порожденный краевой задачей:

$$\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x) &= \mu y(x), \\ y(0) = y(\pi) &= 0, \quad x \in [0, \pi], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $q(x)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке  $[0, \pi]$ . Асимптотика упорядоченных по возрастанию собственных чисел этого оператора выражается формулой

$$\mu_n = n^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (2)$$

В силу этого ряд (*первый регуляризованный след оператора*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - n^2 - c_0), \quad \text{где } c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx$$

сходится. И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном в [5] была установлена следующая формула:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - n^2 - c_0) = \frac{1}{2} c_0 - \frac{q(0) + q(\pi)}{4}. \quad (3)$$

В работе [7] Л.А. Диким было показано, что формула (3) эквивалентна абстрактному равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - n^2 - (qv_n, v_n)) = 0, \quad (4)$$

где скалярное произведение рассматривается в пространстве  $L_2[0, \pi]$ ,  $v_n$  — собственные ортонормированные функции оператора, порожденного краевой задачей

$$-v''(x) = \lambda v(x),$$

$$v(0) = v(\pi) = 0, \quad x \in [0, \pi].$$

В 60-е годы теория регуляризованных следов регулярных обыкновенных дифференциальных операторов была практически завершена работами В.Б. Лидского и В.А. Садовнического [14], [17]. Им удалось вычислить регуляризованные следы произвольных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений любых порядков со сложным вхождением параметра.

Значительно менее исследованными являются классы операторов, содержащие дифференцирование по нескольким переменным. Различные результаты в этом направлении были получены в работах А.Г. Костюченко [12], М.Г. Гасымова [3], В. Гийемина [22] и др. Трудность задачи состоит в том, что для уравнений с частными производными резольвента имеет сложное строение и неизвестна точная асимптотика всех собственных чисел. В работе В.В. Дубровского [8] предложен подход к проблеме следов через поправки теории возмущений.

Проблеме вычисления асимптотики спектральной функции дифференциальных и псевдодифференциальных самосопряженных операторов посвящены работы многих математиков (см., например, [11], [20]). С помощью методики, предложенной М.Г. Гасымовым в работе [3], можно вычислять регуляризованные следы дискретных самосопряженных операторов, используя их спектральную функцию. В работе В.А. Садовнического, В.В. Дубровского, А.В. Нагорного [19] изучено асимптотическое поведение спектральной функции самосопряженного оператора с дискретным спектром с применением методов теории возмущений. Пусть на области  $M$  задан полуограниченный снизу самосопряженный дискретный оператор  $T$ , действующий в  $H = L_2(M)$ . Обозначим через  $\lambda_j$  его собственные значения, занумерованные в порядке возрастания (с учетом кратности), а через  $v_j(x)$  — соответствующие собственные функции, образующие ортонормированную систему. *Спектральной функцией* оператора назовем функцию

$$\Theta(x, y, \lambda) = \sum_{A, -\infty < A} v_j(x) \overline{v_j(y)}.$$

Пусть  $P$  — самосопряженный ограниченный оператор в  $H$ . В [19] определены условия, при которых верно следующее равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\Theta_{T+P}(x, y, \lambda) - \Theta_T(x, y, \lambda)\|_2 = 0, \quad (5)$$

где  $\Theta_{T+P}$  и  $\Theta_T$  — спектральные функции операторов  $T$  и  $T + P$ , соответственно.

Особый интерес представляют операторы, полученные из оператора Лапласа в результате "малого" возмущения, поэтому требуется получить асимптотику спектральной функции, а также регуляризованный след для данного оператора. Однако полученный результат (5) переносится только на степень оператора Лапласа  $\beta \geq 3/2$ . Естественным образом встает задача о нахождении асимптотики спектральной функции и регуляризованного следа для степени оператора Лапласа как можно более близкой к единице.

Наряду с "прямыми" задачами, важную роль играют *обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов*. Под обратными задачами спектрального анализа понимают задачи восстановления оператора по тем или иным его спектральным характеристикам: спектрам (при различных граничных условиях), спектральной функции распределения, и другие. Что касается проблемы существования, то до настоящего времени нет критериев глобального решения этого вопроса, что связано со значительными трудностями в исследовании уравнений, как правило нелинейных, к которым сводятся обратные задачи. Следует заметить, что вообще говоря, многие обратные задачи имеют неединственное решение. Поэтому одним из основных моментов в исследовании проблемы единственности некорректных обратных задач является выявление дополнительных условий, накладываемых на решения, обеспечивающих их единственность.

Наиболее полные результаты в теории обратных задач получены для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \\ y'(a) - hy(a) = 0, y'(b) + Hy(b) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

в случае, когда функция  $q(x)$  непрерывна на конечном отрезке  $[a, b]$ . Первый результат в этом направлении принадлежит В.А. Амбарцумяну [21]. Им доказано, что если собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y \quad (q(x) \in C[0, \pi]), \\ y'(0) = y'(\pi) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

суть  $\lambda_n = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то  $q(x) = 0$ . Однако, в общем случае один спектр оператора Штурма-Лиувилля функцию  $q$  (то есть оператор) не определяет. В работе [4] И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана был указан метод восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральной функции распределения  $\rho(\lambda)$  и указаны достаточные условия для того, чтобы заданная монотонная функция являлась спектральной функцией распределения оператора Штурма-Лиувилля (на прямой или на конечном промежутке). В дальнейшем работа И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана [4] послужила образцом для эффективного решения других обратных задач.

Обратным задачам для уравнений с частными производными и их приложениям посвящено достаточно много работ. В многомерном случае обратные задачи исследовались А.М.Бухгеймом, М.М.Лаврентьевым, В.Г.Романовым и др. (см. [1], [13], [15]). В работе В.А. Садовниченко и В.В. Дубровского [18] доказана теорема единственности решения обратной задачи для абстрактных операторов только по одному спектру и при условии "малости" возмущающего оператора. Результаты применяются к степени оператора Лапласа, заданного на прямоугольнике  $\Pi$  с потенциалом из  $L_2(\Pi)$ . К этой работе по своей тематике и методам примыкают работы [9], [10]. Рассмотрим в  $L_2(\Pi)$  оператор  $T$ , порожденный краевой задачей Дирихле:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \\ u|_{\partial\Pi} = 0, \end{cases}$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\partial\Pi$  — граница прямоугольника  $\Pi = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ ,  $(\frac{a^2}{b^2} - \text{иррационально})$ . Введем

оператор  $T_\beta = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$ . Пусть  $P$  — оператор умножения на неко-

торую функцию  $p$  (назовем ее *потенциалом*): В [9] разработан метод восстановления потенциала из  $C(\Pi)$  и доказана его единственность для оператора  $T_\beta + P$ . В [10] аналогичная задача решена в классе потенциалов из  $L_2(\Pi)$ . Однако данные результаты получены в лучшем случае для степени оператора Лапласа  $\beta > 5/2$ . Таким образом, как и в "прямых" задачах, важным является решение обратной задачи для степени оператора Лапласа как можно более близкой к единице. В силу сказанного, тема исследования данной диссертации является актуальной.

Цель работы:

1. Исследовать асимптотику спектральной функции и вычислить первый регуляризованный след оператора  $T_\beta + P$ , для  $\beta$ , возможно более близкой к единице.
2. Решить обратную задачу для степени  $\beta$  оператора Лапласа, возможно более близкой к единице, заданного либо на прямоугольнике, либо на  $N$ - мерном параллелепипеде, с потенциалом из  $L_\infty$ .

**Методы исследования.** В работе используются методы теории возмущений, спектральной теории операторов, различные методы функционального анализа, теории функций комплексного переменного.

**Научная новизна.** Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Для возмущенной степени оператора Лапласа  $T_\beta + P$ , заданного на квадрате или на равнобедренном прямоугольном треугольнике, при  $\beta$ , задана теорема об оценке разности спектральных функций операторов  $T_\beta + P$  и  $T_\beta$ .
2. Получена формула первого регуляризованного следа для оператора  $T_\beta + P$  при  $\beta > 1 \frac{13}{80}$ .
3. При  $\beta > 1$  решена обратная задача спектрального анализа о восстановлении потенциала для возмущенной степени оператора Лапласа, заданного на прямоугольнике.
4. При  $\beta > N/2$  решена задача восстановления потенциала для возмущенной степени оператора Лапласа на  $N$ - мерном параллелепипеде.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в квантовой механике, в нелинейных уравнениях математической физики, в спектральной теории операторов, в вычислительной математике.

**Апробация работы и публикации.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались на Всероссийских научно-практических конференциях вузов Уральского зоны (г. Магнитогорск, 1999 г.,

г. Челябинск, 2001 г.), на конференции по математическому моделированию и краевым задачам в СГТУ (г. Самара, 2000 г.), на научно-исследовательском семинаре под руководством доктора физико-математических наук, профессора Дубровского В.В., в Магнитогорском государственном университете (г. Магнитогорск, 1996—2000 г.), на 62-й научно-технической конференции в МГТУ (г. Магнитогорск, 2003 г.), а также на семинаре по дифференциально - операторным уравнениям под руководством доктора физико-математических наук, профессора Мельниковой И.В. в Уральском государственном университете.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [23] — [29]. Выступление автора на конференциях отражено в тезисах докладов [30] — [33]. Из работ, опубликованных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты автора.

**Структура диссертации** Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы из 98 наименований. Общий объем диссертации — 92 страницы.

## Краткое содержание диссертации

Во введении дается обзор работ, связанных с темой диссертации, и формулируются основные результаты диссертации.

**Первая глава** состоит из трех параграфов и посвящена изучению асимптотики спектральной функции возмущенной степени оператора Лапласа, заданной на квадрате или на равнобедренном прямоугольном треугольнике  $\Pi$ , с краевыми условиями Дирихле и действующей в пространстве  $L_2(\Pi)$ . Пусть  $\Pi$  — равнобедренный прямоугольный треугольник или квадрат из  $R^2$ . Рассмотрим в  $L_2(\Pi)$  оператор  $T$ , порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad u|_{\partial\Pi} = 0,$$

где  $\partial\Pi$  — граница  $\Pi$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа. Введем оператор  $T_\beta = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$ , где  $E(\lambda)$  — спектральное разложение единицы оператора  $T$ ,  $\beta > 0$ . Пусть  $P$  — самосопряженный ограниченный оператор, действующий в  $L_2(\Pi)$ . Обозначим через  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  собственные числа операторов  $T_\beta$  и  $T_\beta + P$  соответственно, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности; через  $v_n$  и  $u_n$

— ортонормированные собственные функции операторов  $T_\beta$  и  $T_\beta + P$  соответственно, отвечающие  $n$ — $m$  собственным числам.

Первый параграф главы I носит реферативный характер. В нем, согласно [16], [6], приведены различные спектральные свойства самосопряженных дискретных операторов. Во втором параграфе, используя два члена асимптотики собственных чисел оператора Лапласа, а также результаты о числе целых точек в круге, доказаны свойства собственных чисел оператора  $T_\beta$ .

Для собственных чисел оператора  $T_\beta$  верна следующая асимптотика:

$$\lambda_n = C_1 n^\beta + C_2 n^{\beta-1/2} + O(n^{\beta-27/40}), \quad (8)$$

где  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$  — некоторые константы.

**Теорема 1.** Пусть  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  — собственные числа оператора  $T_\beta$ . Если  $|k - n| \geq C_3 n^{13/40+\delta}$ , где  $C_3 > 0$ ,  $0 < \delta \leq 27/40$ , тогда

$$|\lambda_k - \lambda_n| \geq \text{const} \cdot \max\{k^{\beta-27/40+\delta}, n^{\beta-27/40+\delta}\}, \text{const} > 0 \quad (9)$$

В третьем параграфе сформулирована и доказана основная теорема данной главы — об оценке разности спектральных функций операторов  $T_\beta$  и  $T_\beta + P$ . Пусть  $\{\lambda_{n_m}\}_{m=1}^\infty$  — такая подпоследовательность собственных чисел оператора  $T_\beta$ , что

$$\lambda_{n_{m+1}} - \lambda_{n_m} \geq C_1 n_m^{\beta-1}, \quad (10)$$

где  $C_1$  — некоторая положительная постоянная (см.[8]).

**Теорема 2.** Пусть  $T_\beta$  — степень оператора Лапласа, заданного на  $\Pi$ ,  $P$  — самосопряженный ограниченный оператор. Если  $(\beta - 1)(k + 1) > 13/80$ ,  $1 \leq q \leq 2$ , тогда имеет место равенство:

$$\sum_{j=1}^{n_m} u_j(x) \overline{u_j(y)} = \sum_{j=1}^{n_m} v_j(x) \overline{v_j(y)} + \sum_{i=1}^k \alpha_i(x, y, n_m) + \varphi_{k+1}(x, y, n_m), \quad (И)$$

причем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_{k+1}(x, y, n_m)\|_q = 0.$$

Здесь  $\alpha_i(x, y, n_m)$  и  $\varphi_{k+1}(x, y, n_m)$  — поправки теории возмущений.

**Следствие 1.** Пусть  $\Theta_{T_\beta+P}(x, y, \lambda) = \sum_{\mu_k \leq \lambda} u_k(x) \overline{u_k(y)}$ ,  $\Theta_{T_\beta}(x, y, \lambda) =$

$\sum_{\lambda_k \leq \lambda} v_k(x) \overline{v_k(y)}$  — спектральные функции операторов  $T_\beta + P$  и  $T_\beta$  со-

ответственно. Если  $\beta > 1\frac{13}{80}$ ,  $1 \leq q \leq 2$  и  $\lambda \in (\lambda_{n_m} + \|P\|, \lambda_{n_{m+1}} -$

$\|P\|$ ), то имеет место соотношение:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\Theta_{T_\beta + P}(x, y, \lambda) - \Theta_{T_\beta}(x, y, \lambda)\|_q = 0.$$

Используя полученный результат и методику, предложенную М.Г. Гасымовым (см. [3]), удалось вычислить первый регуляризованный след для этих операторов. Задача решена для степени  $\beta > 1\frac{13}{80}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\beta > 1\frac{13}{80}$ ,  $P$  — оператор умножения на вещественную функцию  $p \in L_\infty(\Pi)$ . Тогда

$$\lim_{n_m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j - (Pv_j, v_j)) = 0.$$

Вторая глава состоит из пяти параграфов и посвящена решению обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом из  $L_\infty$ , заданного на прямоугольнике либо на  $N$ - мерном параллелепипеде. Для решения задачи используется принцип сжимающих отображений. В первом параграфе вводятся необходимые операторы и на потенциалы накладываются дополнительные условия: симметричности и равенства нулю некоторых коэффициентов Фурье. Обозначим  $\Pi = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  — прямоугольник, где  $a > 0$ ,  $b > 0$ ;  $\frac{a^2}{b^2}$  — иррационально;  $\Pi_4 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, 0 \leq y \leq \frac{b}{2}\}$  — вспомогательный прямоугольник. Пусть оператор  $T_\beta$  — степень оператора Лапласа, заданного на прямоугольнике  $\Pi$ , с краевыми условиями Дирихле. Пусть  $P$  — оператор умножения на, вообще говоря, комплекснозначную, измеримую по Лебегу, существенно ограниченную по модулю функцию  $p(x, y)$  с областью определения  $\Pi$  (эту функцию мы будем называть *потенциалом*). Допустим, что потенциал удовлетворяет еще двум дополнительным условиям:

$$p(a - x, y) = p(x, y) = p(x, b - y) \quad \text{для почти всех } (x, y) \in \Pi, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} p(x, y) \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) dx dy = \\ = \iint_{\Pi} p(x, y) \cos\left(\frac{2\pi ny}{b}\right) dx dy = 0, \quad m, n = 0, 1, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим через  $\mu_k$  собственные числа оператора  $T_\beta + P$ , занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ ;  $u_k$  — соответствующие ортонормированные собственные функции этого оператора. В первом параграфе также сформулирована теорема Л. Карлесона об интерполяции [2, с.285], используемая в дальнейшем.

Во втором параграфе получена важная оценка ядерной нормы оператора  $(T_\beta - \lambda E)^{-1}$ , которая будет использована при дальнейшем решении обратной задачи. Пусть  $\{\lambda_{k_i}\}_{i=1}^\infty$  — такая подпоследовательность собственных чисел оператора  $T_\beta$ , что выполняется (10).

**Теорема 4 (Оценка ядерной нормы оператора  $(T_\beta - \lambda E)^{-1}$ ).** Пусть  $0 < \delta < 1$ ;  $(1 - \delta)(\beta - 1/2) < 1$ , тогда на вертикальных прямых  $\Gamma_{k_i} = \left\{ \lambda \mid \lambda = \frac{\lambda_{k_i} + \lambda_{k_i+1}}{2} + i\rho \right\}$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|(T_\beta - \lambda E)^{-1}\|_1 &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda - \lambda_k|^{-1} \leq (|\rho| + C_5 k_i^{\beta-1})^{-\delta} O(k_i^{1/2 - (1-\delta)(\beta-1)}) + \\ &+ (|\rho| + C_5 k_i^{\beta-1/2})^{-\delta} O(k_i^{1 - (1-\delta)(\beta-1/2)}), \quad C_5 > 0. \quad (14) \end{aligned}$$

В третьем параграфе сформулирована и доказана локальная теорема существования в обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа  $\beta > 3/2$ , заданного на прямоугольнике. При доказательстве используется оценка ядерной нормы оператора  $(T_\beta - \lambda E)^{-1}$  и теорема Л. Карлесона об интерполяционной последовательности, сформулированная в первом параграфе. Пусть  $\{\lambda_{k_s}\}_{s=1}^\infty$  — интерполяционная последовательность в смысле Л. Карлесона спектра  $\sigma(T_\beta)$  оператора  $T_p$  в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , то есть существует такое число  $\tau = \tau(\{\lambda_{k_s}\}) > 0$ , что

$$\prod_{j=1, j \neq s}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{k_s} - \lambda_{k_j}}{\lambda_{k_s} + \lambda_{k_j}} \right| \geq \tau, \text{ для любого } s = \overline{1, \infty}.$$

Тогда по теореме Л. Карлесона существуют такие аналитические, ограниченные в совокупности в правой полуплоскости функции, что

$$f_{k_s}(\lambda_{k_j}) = \delta_{js},$$

$$\|f_{k_s}\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} |f_{k_s}(\lambda)| \leq \frac{c}{\tau} (1 - \ln \tau),$$

где  $\delta_{js}$  - символ Кронекера. Положим  $\varphi_{k_s}(\lambda) = \int_0^\lambda f_{k_s}(z) dz$ .

Обозначим

$$\psi_{k(m,n)}(x,y) = \frac{4}{\sqrt{ab}} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi ny}{b}\right), \quad m, n = \overline{1, \infty}, \quad (15)$$

где функции занумерованы в соответствии с собственными числами  $\lambda_{k(m,n)} = \left(\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}\right)^\beta$  оператора  $T_\beta$ .

**Теорема 5.** Пусть  $\frac{a^2}{b^2}$  — иррациональное число, степень оператора Лапласа  $\beta > 3/2$ ,  $\{\lambda_{k_s}\}_{s=1}^\infty$  — интерполяционная последовательность. Тогда существует  $\varepsilon > 0$ , зависящее от  $\tau = \tau(\{\lambda_{k_s}\}) > 0$ , такое, что если для произвольной последовательности  $\{\xi_s\}$  выполняется неравенство

$$\sqrt{ab} \left\| \sum_{s=1}^\infty \xi_s \psi_{k_s} \right\|_\infty < \varepsilon, \quad (16)$$

то в замкнутом шаре  $U(0, \varepsilon) \subset L_\infty(\Pi)$ , существует один и только один потенциал  $p(x, y)$ , удовлетворяющий условиям (12), (13) и

$$\iint_{\Pi_a} p(x, y) \psi_k(x, y) dx dy = 0 \quad \text{при } k \neq k_s, \quad * = 1, 2, \dots, \infty,$$

такой, что собственные числа  $\xi_s$  оператора  $Tr + P$  удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j=1}^{k_{l_q}} \varphi_{k_s}(\mu_j) - \sum_{j=1}^{k_{l_q}} \varphi_{k_s}(\lambda_j) = \xi_s, \quad s = 1, 2, \dots, \infty, \quad k_{l_q-1} < k_s \leq k_{l_q}.$$

Здесь  $\{k_{l_q}\}$  — подпоследовательность натуральных чисел, выбираемая специальным образом.

В четвертом параграфе доказана теорема о восстановлении потенциала для степени оператора Лапласа  $\beta > 1$ . Кроме того, удалось ослабить ограничения, накладываемые на потенциал: на него наложены только условия симметрии. Таким образом, удалось существенно усилить ранее полученные результаты ([9], [10]).

Пусть оператор  $T_\beta$  — степень оператора Лапласа, заданного на прямоугольнике  $\Pi$  граничными условиями Дирихле,  $P$  — оператор умножения на вещественную, измеримую по Лебегу, существенно ограниченную функцию  $p(x,y)$  с областью определения  $\Pi$ . Допустим, что функция  $p(x,y)$  удовлетворяет еще двум ограничениям:

$$p(a-x, y) = p(x, y) = p(x, b-y) \quad (17)$$

для почти всех  $(x, y) \in \Pi$  и

$$\iint_{\Pi} p(x, y) dx dy = 0. \quad (18)$$

Введем целые, ограниченные по модулю (но не в совокупности) в правой полуплоскости  $Re \lambda > 0$  функции  $f_k(\lambda)$ , такие, что

$$f_k(\lambda_j) = \delta_{jk}, \quad s_k = \sup_{Re \lambda > 0} (|f_k(\lambda)| \cdot |\lambda|^2) < \infty,$$

где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера,  $j, k = 1, 2, \dots, \infty$ . Положим

$$\varphi_k(\lambda) = \int_0^\lambda f_k(z) dz.$$

Последовательность  $\xi_k = \sum_{\mu_j \leq b_{n_l}} \varphi_k(\mu_j) - \sum_{\lambda_j \leq b_{n_l}} \varphi_k(\lambda_j)$  может быть представлена в виде

$$\xi_k = \alpha_m + \tau_n + \gamma_{m,n}, \quad (19)$$

где

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\tau_n|^2 < \infty, \quad \sum_{m,n=1}^{\infty} |\gamma_{m,n}|^2 < \infty.$$

Здесь  $b_{n_l}$  — некоторая подпоследовательность положительных чисел, выбираемая специальным образом по спектру оператора  $T_\beta$ ,  $b_{n_l} \rightarrow \infty$  при  $l \rightarrow \infty$ .

**Теорема 6.** Пусть  $\beta > 1$ ,  $a^2/b^2$  — иррациональное число,  $\{\xi_k\}$  — последовательность вида (19), для которой выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \alpha_m - \tau_n) \psi_k \right\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Тогда в шаре

$$U(0, \varepsilon) = \{p(x, y) \mid \|p\|_\infty \leq \varepsilon\}$$

существует один и только один потенциал  $p$ , удовлетворяющий условиям (П), (18) такой, что собственные числа  $\mu_j$  оператора  $T_{\beta^+}$ -Рудовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\mu_j \leq b_{n_1}} \varphi_k(\mu_j) - \sum_{\lambda_j \leq b_{n_1}} \varphi_k(\lambda_j) = \xi_k,$$

при  $\lambda_k \leq b_{n_{(l-1)}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ .

В пятом параграфе задача о восстановлении потенциала для степени оператора Лапласа рассмотрена на  $N$ - мерном параллелепипеде и теорема доказана для степени оператора Лапласа  $\beta > N/2$ .

Обозначим

$$\Pi_N = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \mid 0 \leq x_j \leq a_j, j = \overline{1, N}\}$$

—  $N$ -мерный параллелепипед. Пусть оператор  $T_{\beta}$  — степень оператора Лапласа, заданного на прямоугольнике  $\Pi_N$  граничными условиями Дирихле;  $P$  — оператор умножения на вещественную, измеримую по Лебегу, существенно ограниченную функцию  $p$  с областью определения  $\Pi_N$ . Допустим, что потенциал удовлетворяет еще двум ограничениям:

$$\begin{aligned} p(a_1 - x_1, x_2, \dots, x_N) &= p(x_1, a_2 - x_2, \dots, x_N) = \\ &= p(x_1, x_2, \dots, a_N - x_N) = p(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (20)$$

для почти всех  $(x_1, \dots, x_N) \in \Pi_N$  и

$$\begin{aligned} &\int_{\Pi_N} \dots \int p(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = \\ &= \int_{\Pi_N} \dots \int p(x_1, \dots, x_N) \cos\left(\frac{2\pi m_{j_k} x_{j_k}}{a_{j_k}}\right) dx_1 \dots dx_N = \dots \quad (21) \\ &= \int_{\Pi_N} \dots \int p(x_1, \dots, x_N) \prod_{k=1}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi m_{j_k} x_{j_k}}{a_{j_k}}\right) dx_1 \dots dx_N = 0, \end{aligned}$$

где  $j_k \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $j_k \neq j_p$  при  $k \neq p$ ,  $m_{j_k} \in \mathbb{N}$ . Обозначим

$$\psi_{k(m)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{2^N}{\sqrt{a_1 a_2 \dots a_N}} \prod_{j=1}^N \cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right) \quad (22)$$

где  $m = (m_1, m_2, \dots, m_N)$  — мультииндекс,  $m_j \in \mathbb{N}$  ( $j = 1, N$ ) функции  $\{\psi_{k(m)}\}$  занумерованы одним индексом  $k$  в соответствии с собственными числами оператора  $T_\beta$

$$\lambda_k = \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{\pi^2 m_i^2}{a_i^2} \right) \right)^\beta$$

**Теорема 7.** Пусть  $\beta > N/2$ ,  $a_j^{-2}$  ( $j=1, \dots, N$ ) линейно независимы над полем рациональных чисел,  $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$  — последовательность чисел, удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{A} \left\| \sum_{k=1}^\infty \xi_k \psi_k \right\|_\infty \leq \varepsilon (1 - \sqrt{A} \delta \varepsilon), \quad (23)$$

где число  $\delta = \delta(\varepsilon)$  удовлетворяет неравенству  $\sqrt{A} \delta \varepsilon < 1$  ( $A = \prod_{j=1}^N a_j$ ). Тогда в шаре  $U(\varepsilon) = \{p(x_1, \dots, x_N) \mid \|p\|_\infty \leq \varepsilon\}$  существует один и только один потенциал  $p$ , удовлетворяющий условиям (20), (21) такой, что собственные числа  $\mu_j$  оператора  $T_\beta + P$  удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\mu_j \leq b_{n_l}} \varphi_k(\mu_j) - \sum_{\lambda_j \leq b_{n_l}} \varphi_k(\lambda_j) = \xi_k, \quad (24)$$

при  $\lambda_k \leq b_{n_{(l-1)}}$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ).

## СПИСОК литературы

- [1] Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.
- [2] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

- [3] Гасымов М.Г. О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов // ДАН СССР. 1963. Т.150, N 6. С.1202-1205.
- [4] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.// Изв.АН СССР, сер. мат. 1951. Т.15. С.309-360.
- [5] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка //ДАН СССР. 1953. Т. 88, N 4. С. 593-596.
- [6] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
- [7] Дикий Л.А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма - Лиувилля //УМН. 1958. Т.13, N 3. С. 111-143.
- [8] Дубровский В.В. О формулах регуляризованных следов самосопряженных эллиптических дифференциальных операторов второго порядка //Дифференц. уравнения. 1984. Т.20, N 11. С. 1995-1998.
- [9] Дубровский В.В., Нагорный А.В. К обратной задаче для оператора Лапласа с непрерывным потенциалом //Дифференц. уравнения. 1990. Т.26, N9. С.1563-1567.
- [10] Дубровский В.В., Нагорный А.В. Обратная задача для степени оператора Лапласа с потенциалом из  $L_2$  //Дифференц. уравнения. 1992. Т.28, N9. С.1552-1561.
- [11] Костюченко А.Г. Асимптотика спектральной функции сингулярного дифференциального оператора порядка  $2m$  //ДАН СССР. 1966. Т.168. N2. С 276-279.
- [12] Костюченко А.Г. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов //Матем. заметки. 1967. Т.1, N 3. С. 365-378.
- [13] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969.

- [14] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций //ДАН СССР. 1967. Т.176, N 2. С.259-262.
- [15] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
- [16] Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
- [17] Садовничий В.А. Дзета-функция и собственные числа дифференциальных операторов //Дифференц. уравнения. 1974. Т.10, N4. С.1276-1285.
- [18] Садовничий В.А., Дубровский В.В. О некоторых свойствах операторов с дискретным спектром //Дифференц. уравнения. 1979. Т.15, N7. С.1206-1211.
- [19] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Нагорный А.В. Асимптотика спектральной функции оператора с дискретным спектром в  $L^p$ .//Труды семинара им.И.Г.Петровского. 1991. Вып.16. С.182-185.
- [20] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.3(Псевдодифференциальные операторы).М.:Мир, 1987.
- [21] Ambarcumian V.A. Ueber eine Frage der Eigengwerttheorie // Zeits.f. Physik. 1929. iV53. S. 690-695.
- [22] Guillemin V. Some spectral results for the Laplace operator with potential on the n-sphere //Adv. math. 1978. V.27, N 3. P. 273-286.

## Список работ автора по теме диссертации

- [23] Дубровский В.В., Пузанкова Е.А. Оценка разности спектральных функций степени оператора Лапласа, заданного на треугольнике, в  $L_p$  при  $1 \leq p \leq 2$ // ДАН. 1999. Т.365, N 3. С.311-313.

- [24] Дубровский В.В., Пузанкова Е.А. Оценка разности спектральных функций и формулы регуляризованных следов степени оператора Лапласа, заданного на треугольнике или квадрате, в  $L_p$ ,  $1 \leq V \leq 2$ // Дифференц. уравнения. 1999. Т.35, N4. С.1-4
- [25] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Пузанкова Е.А. Об обратной задаче спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом.// ДАН. 1999. Т.367, N3. С.307-309.
- [26] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Пузанкова Е.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на прямоугольнике.// Дифференц. уравнения. 2000. Т.36, N12. С. 1695-1698.
- [27] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Дубровский В.В.-мл., Пузанкова Е.А. О восстановлении потенциала в обратной задаче спектрального анализа.// ДАН. 2001. Т.380, iV4. С.462-464.
- [28] Пузанкова Е.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа с потенциалом в пространстве  $R^N$ .// Деп. в НИИ ВО 27.02.02 N18-2002. 8с.
- [29] Пузанкова Е.А. Обратная задача спектрального анализа для возмущенного оператора Лапласа.// Математика. Приложение математики в экономических, технических и педагогических исследованиях. Сб. науч. трудов под ред. М.В. Бушмановой. Магнитогорск: МГТУ, 2003. С.16-22.
- [30] Пузанкова Е.А. Оценка разности спектральных функций и формулы регуляризованных следов степени оператора Лапласа, заданного на прямоугольном равнобедренном треугольнике или на квадрате// Матер. Всерос. науч.-практич. конф. 16-18 марта 1999г. Проблемы физико-математического образования в педагогических вузах страны на современном этапе. Магнитогорск.: МГПИ., 1999. С.26-27.
- [31] Дубровский В.В., Пузанкова Е.А. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на прямоугольнике.// Труды десятой межвузовской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи", 29-31 марта 2000 г. Самара, 2000: Часть 3. С.51-53.

- [32] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Дубровский В.В.-мл., Пузанкова Е.А. О восстановлении потенциала по спектру для степени оператора Лапласа на прямоугольнике. // Тезисы докладов научно-практической конференции вузов Уральской зоны, 26 - 29 марта 2001 г. Челябинск: ЧГПУ, 2001. С.29-30.
- [33] Пузанкова Е.А. Восстановление потенциала по спектру для возмущенного оператора Лапласа. // Материалы 62-й научно-технической конференции по итогам научно-исследовательской работы за 2002-2003 гг.: Сб. докл. под ред. Г.С. Гуна. Магнитогорск: МГТУ, 2003. С.219-221.