На правах рукописи

ЭНБОМ Екатерина Александровна

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 -дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань - 2003

Работа выполнена на кафедре математического анализа
Самарского государственного педагогического университета.

Научный руководитель: заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор **Волкодавов Виктор Филиппович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Репин Олег Александрович,**

доктор физико-математических наук, профессор **Хайруллин Равиль Сагитович**

Ведущая организация: Орловский государственный университет

Защита состоится 10 декабря 2003 года в 17^{00} часов на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, 17, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «*30*» *(№/И&бк*Х/* 2003 года.

Ученый секретарь
Диссертационного совета
к.ф.-м.н.,доцент ^ ^ ^ - < 3 ..-г__ Е.К.Липачев

U "" *I О О С* -^Цщдд ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений третьего порядка в ограниченных и неограниченных трехмерных областях специального вида.

Актуальность темы. В современной теории дифференциальных уравнений с частными производными важное место занимают исследования вырождающихся гиперболических и эллиптических уравнений, а так же уравнений смешанного типа. Повышенный интерес к этому классу уравнений объясняется как большой теоретической значимостью полученных результатов, так и их многочисленными приложениями в газовой динамике, гидродинамике, в теории бесконечно малых изгибаний поверхности, в безмоментной теории оболочек, в различных разделах механики сплошных сред, акустике, в теории электронного рассеяния и многих других областях знаний. Развитие современной науки показало, что вырождающиеся уравнения являются хорошей моделью реальных физических и биологических процессов. А это обусловило актуальность постановки и решения для них различных краевых задач, которые в настоящее время являются предметом фундаментальных исследований многих математиков.

Значительные результаты исследований дифференциальных уравнений рассматриваемого вида изложены в известных работах Ф.Трикоми, Ф.И.Франкля, С.Геллерстедта, К.И.Бабенко, А.В.Бицадзе, М.М.Смирнова, О.А.Олейник, В.А.Ильина, В.П.Михайлова, которые можно считать основополагающими в развитии теории этих уравнений.

Благодаря усилиям отечественных и зарубежных математиков теория гиперболических и эллиптических уравнений, вырождающихся либо на некотором множестве точек внутри рассматриваемой области, либо на ее границе, особенно интенсивно развивалась в последние сорок лет. В их работах рассматривались проблемы разрешимости известных классических краевых задач, а так же ставились и исследовались новые краевые задачи для таких уравнений.

Существенный вклад в развитие данной теории внесли болгарские математики Г.Д.Карактопраклиев, П.Р.Попиванов и другие; представители математических школ Ближнего Зарубежья: Т.Ш.Кальменов, С.Л.Алдашев, Н.Р.Раджабов, Ар.Базарбеков, С.С.Харибегашвили, Т.Д.Джураев, О.М.Джохадзе и другие. Большая заслуга в развитии теории краевых задач для вырождающихся уравнений принадлежит отечественным математикам: СППулькину, А.М.Нахушеву, В.И.Жегалову, В.Ф.Волкодавову, В.Н.Врагову, Е.И.Моисееву, Ф.Г.Мухлисову, Л.И.Чибриковой, Р.С.Хайрулину, Н.Б.Плещинскому, , К.Б.Сабитову, О.А.Репину, А.Н.Зарубину, В.В.Азовскому, А.М.Ежову, А.А.Андрееву и др.

Если до недавнего времени в основном изучались краевые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка, то затем выяснилось, что важную роль в изучении различных процессов и явлений действительного мира играют уравнения третьего и более высоких порядков. За последние полтора десятилетия внимание многих ученых привлекли исследования гиперболических уравнений третьего порядка, ими были разработаны некоторые методы решения таких задач: метод Римана, метод Римана-Адамара, метод общих и специальных решений и другие. В частности, значительная роль в разработке этих методов принадлежит математикам Казанской и Самарской школ.

Несмотря на значительное количество серьезных результатов, полученных математиками по данной тематике, теория краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений третьего порядка в трехмерном пространстве требует дальнейшей разработки. Поэтому рассмотрение частных случаев таких уравнений является так же важным элементом построения теории и представляет определенный интерес.

Цель работы. Основной целью диссертации является доказательство корректности постановки граничных задач и задач с интегральными условиями для гиперболических уравнений третьего порядка, вырождающихся в одной граничной точке области. В частности, исследование поведения решения в точке вырождения уравнения.

Методы исследования. Для исследования граничных задач, которые можно считать аналогом задачи Коши, используется метод Римана-Адамара. Функцию Римана-Адамара удалось записать в явном виде благодаря симметрии рассматриваемого уравнения. При исследовании решения в точке вырождения уравнения применяется аппарат гипергеометрических функций.

Для доказательства разрешимости задач с интегральными условиями строится решение уравнения, зависящее от трех произвольных функций, которые определяются затем, исходя из данных задачи. При этом используется метод интегральных уравнений и аппарат специальных функций.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1) Доказана однозначная разрешимость двух задач в бесконечной области специального вида для уравнения, вырождающегося в одной граничной точке области. Эти задачи представляют собой аналог задачи Коши. Их новизна состоит в том, что на некоторой части нехарактеристической границы области задаются оба условия Коши, а на другой части нехарактеристической границы области искомая функция подчинена только одному из условий Коши.
2) Построена функция Римана-Адамара и доказана корректность этих задач методом Римана-Адамара. Метод Римана-Адамара, обычно применяемый для решения задач, в которых одно из граничных условий задается на характеристической поверхности, в данной работе впервые применен для решения видоизмененной задачи Коши.
3) Поставлены и исследованы две смешанные задачи, в которых решение уравнения ищется в ограниченной области и искомая функция подчинена как граничным, так и интегральным условиям.
4) Получены формулы обращения интегральных уравнений Вольтерра первого рода, которые возникают в процессе решения этих задач и получены явные представления искомых функций при различных значениях параметра уравнения.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Она является продолжением развития теории краевых задач и задач с интегральными условиями для вырождающихся уравнений гиперболического типа. Методы исследования рассмотренных задач могут быть применены для изучения более сложных уравнений третьего порядка.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались:

- на третьей международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Саранск, 1998г.),
- на межвузовских конференциях «Математическое моделирование и краевые задачи» в Самарском государственном техническом университете (Самара, 1998,2001,2003г.),
- на 52-ой, 54-ой, 55-ой научных конференциях Самарского государственного педагогического университета (Самара, 1998,2000, 2001г.),
- на международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами» (Душанбе, 2003г.);

содержание диссертации обсуждалось так же:

- на научном семинаре по дифференциальным уравнениям в Самарском государственном педагогическом университете в 1997-2002 г.г. (руководитель д.ф.-м.н., профессор В.Ф.Волкодавов),
- на научном семинаре кафедры уравнений математической физики Самарского государственного университета в 2001 г. (руководитель д.ф.-м.н., профессор О.П.Филатов),
- на научном семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления в Удмуртском государственном университете в Ижевске в 2001 г. (руководитель д.ф.-м.н., профессор Е.Л.Тонков),
- на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета в 2003 г. (руководитель д.ф.-м.н., профессор В.И.Жегалов).

Публикации. Одиннадцать работ, опубликованных автором по теме диссертации, полностью отражают ее содержание. Список статей приведен в конце автореферата. Результаты, полученные в совместных с научным руководителем работах [4] и [10], принадлежат авторам в равной мере.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа изложена на 121 странице и состоит из введения, двух глав и библиографии, включающей 101 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении отмечается актуальность темы диссертации, приводится обзор результатов исследований по ее тематике, кратко излагается содержание работы.

В первой главе исследованы две задачи, каждую из которых можно считать аналогом задачи Коши. В отличие от классической постановки задачи Коши, в этих задачах значение искомой функции и ее нормальной производной задаются не на всей нехарактеристической поверхности, а лишь на ее частях.

Уравнение

$$L(u) \equiv u_{xyz} + \frac{\alpha}{x+y+z}(u_{xz} + u_{yz}) = 0, \quad 0 < 2\alpha < 1 \tag{1.1}$$

будем рассматривать в области $\Omega=\{(x,y,z):0<y<x<z<+\infty\}$ трехмерного евклидова пространства. Область Ω представляет собой трехгранный угол с вершиной в начале координат, образованный частями плоскостей $y=0, y=x$ и $z=x$. Введем обозначения:

$$D_1=\{(x,y):\ \ 0<y<x<+\infty\},\ D_2=\{(x,z):\ \ 0<x<z<+\infty\}.$$

В первом параграфе доказывается однозначная разрешимость следующей задачи.

В области Ω требуется найти функцию *u(x,y,z)* со следующими свойствами:

1) $u(x,y,z)\in C(\overline{\Omega})$; 2) $u_x(x,y,z)$ и $u_z(x,y,z)\in C(\Omega\cup D_1)$, $u_{xyz}\in C(\Omega)$ и $L(u)\equiv 0$ в Ω;

3)
$$u(x,y,x)=\tau_1(x,y),\ \ (x,y)\in\overline{D}_1, \tag{1.2}$$
$$\lim_{z\to x+0}(u_z-u_x)=\nu(x,y),\ (x,y)\in D_1, \tag{1.3}$$
$$u(x,x,z)=\tau_2(x,z),\ (x,z)\in\overline{D}_2. \tag{1.4}$$

Из требования непрерывности искомой функции в $\overline{\Omega}$ следует наличие условия $\tau_1(x,x)=\tau_2(x,x)$.

Во втором параграфе исследована задача.

В области Ω требуется найти функцию *u(x,y,z)* со следующими свойствами:

1) $u(x,y,z)\in C(\overline{\Omega})$; 2) $u_x(x,y,z)$ и $u_z(x,y,z)\in C(\Omega\cup D_1)$, $u_x(x,y,z)$ и $u_y(x,y,z)\in C(\Omega\cup D_2)$, $u_{xyz}\in C(\Omega)$ и $L(u)\equiv 0$ в Ω;

3)
$$u(x,y,x)=\tau(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_1, \tag{1.5}$$
$$\lim_{z\to x+0}(u_z-u_x)=\nu_1(x,y),\ (x,y)\in D_1, \tag{1.6}$$
$$\lim_{z\to x-0}(u_x-u_y)=\nu_2(x,z),\ (x,z)\in D_2. \tag{1.7}$$

Таким образом, в первой задаче на одной нехарактеристической части границы области задаются значения искомой функции и ее нормальной производной, а на другой нехарактеристической части границы - значения искомой функции. Во второй задаче на одной нехарактеристической части границы области так же задаются значения искомой функции и ее нормальной производной, а на другой части - значения нормальной производной.

Для решения обеих задач применен метод Римана-Адамара. Функция Римана для уравнения (1.1) известна[1] и имеет следующий вид:

$$R(M,M_0)=R(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=$$
$$=(x+y+z)^{2\alpha}(x+y_0+z)^{-\alpha}(x_0+y+z)^{-\alpha}F(\alpha,\alpha,1;\sigma),$$

[1] Волкодавов В.Ф., Захаров В.Н. Таблицы Функций Римана и Римана-Адамара для некорых дифференциальных уравнений в n-мерных евклидовых пространствах. -Самара, 1994. -31с.

$$\sigma=\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x+y_0+z)(x_0+y+z)}.$$

Симметрия уравнения (1.1) относительно плоскости $x=y$ позволила построить функцию Римана-Адамара, которая и сыграла основную роль при доказательстве существования и единственности решения поставленных задач. Идея построения функции Римана-Адамара заимствована из работы СП. Пулькина[2].

Возьмем в области Ω произвольную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и проведем через неё характеристические плоскости $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Они вместе с плоскостями $y=x$ и $z=x$ образуют две ограниченные области; мы возьмем ту, в которой $x>x_0$, и обозначим ее через G. Плоскость $y=x_0$ делит область G на две области: G_1 при $y<x_0$ и G_2 при $y>x_0$.

Так как уравнение (1.1) симметрично относительно *x* и *y*, то функция $R(y,x,z;x_0,y_0,z_0)$ так же является его решением.

Для первой задачи функция Римана-Адамара $\upsilon_1(M,M_0)$ определяется следующим образом:

$$\upsilon_1(M,M_0)=\begin{cases}R(M,M_0), & M\in G_1,\\ R(x,y,z;M_0)-R(y,x,z;M_0), & M\in G_2.\end{cases}$$

Очевидно, что $\upsilon(x,x,z;M_0)\equiv 0$.

А для второй задачи функцию Римана-Адамара $\upsilon_2(M,M_0)$ определим так:

$$\upsilon_2(M,M_0)=\begin{cases}R(M,M_0), & M\in G_1,\\ R(x,y,z;M_0)+R(y,x,z;M_0), & M\in G_2.\end{cases}$$

Рассмотрим реализацию метода Римана-Адамара, например, для первой задачи.

Для оператора $L(u)$ и сопряженного с ним оператора $L^*(\upsilon)\equiv-\upsilon_{xyz}+(a\upsilon)_{xz}+(a\upsilon)_{yz}$, где $a=\dfrac{\alpha}{x+y+z}$, имеет место тождество:

$$\upsilon L(u)-uL^*(\upsilon)=\tfrac{1}{6}(P_x+Q_y+H_z), \tag{1.8}$$

где

$$P=2u\upsilon_{yz}+2\upsilon u_{yz}-\upsilon_y u_z-\upsilon_z u_y+3a\upsilon u_z-3u(a\upsilon)_z,$$

$$Q=2u\upsilon_{xz}+2\upsilon u_{xz}-\upsilon_x u_z-\upsilon_z u_x+3a\upsilon u_z-3u(a\upsilon)_z,$$

$$H=2u\upsilon_{xy}+2\upsilon u_{xy}-\upsilon_x u_y-\upsilon_y u_x+3a\upsilon u_x-3u(a\upsilon)_x+3a\upsilon u_y-3u(a\upsilon)_y.$$

На плоскости $y=x_0$, то есть на границе областей G_1 и G_2, функция Римана-Адамара терпит разрыв. Поэтому, для того, чтобы иметь возможность ири-

---

[2] Пулышн СП. Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx}+u_{yy}+\frac{p}{x}u_x=0$ / Уч.зап. Куйбышевского пед.ин-та, 1958. Вып. 21. С.3-54.

менить формулу Остроградского-Гаусса, построим вспомогательную двусвязную область $G^{\varepsilon}=G_1^{\varepsilon}\cup G_2^{\varepsilon}$, где мы отступаем на достаточно малую величину $\varepsilon>0$ от плоскостей $y=x_0$, $z=x$ и $y=x$.

Если u - решение поставленной задачи, а υ - функция Римана-Адамара, то из (1.8) следует тождество $P_x+Q_y+H_z=0$. Интегрируя его по двусвязной области G^{ε} и применяя теорему Остроградского-Гаусса, связывающую тройной интеграл с поверхностным, будем иметь:

$$\iint\limits_{S^{\varepsilon}}(Pn_x+Qn_y+Hn_z)ds=0, \tag{1.9}$$

где S^{ε} - граница области G^{ε}; n_x, n_y, n_z - направляющие косинусы внутренней нормали к S^{ε}. Так как S^{ε} состоит из девяти плоских фигур, то тождество (1.9) перепишем в виде:

$$\sum_{k=1}^{9}J_{k_{\varepsilon}}=0, \tag{1.10}$$

где $J_{k_{\varepsilon}}=\iint\limits_{S_k^{\varepsilon}}(Pn_x+Qn_y+Hn_z)ds$.

После вычисления и преобразования этих интегралов и после перехода к пределу при $\varepsilon\to 0$ получаем тождество, из которого находим явное представление искомой функции $u(M_0)$.

Доказательство разрешимости второй задачи отличается от первой лишь преобразованием некоторых интегралов в тождестве (1.10). Для нее так же получено представление решения в явном виде.

Из формул, дающих решение задач, видно, что искомая функция непрерывна всюду в области Ω, за исключением, быть может, точки вырождения уравнения, то есть начала координат. В связи с этим, проведено детальное исследование поведения решения в окрестности этой точки. В результате оценки интегралов, фигурирующих в записи решения, выявлены условия, кторые нужно предъявить к граничным функциям, обеспечивающие непрерывность искомой функции в точке вырождения уравнения.

Теорема 1.1.

Пусть для граничных функций выполняются требования:

1) $\tau_1(x,y)\in C(\overline{D}_1)$ и удовлетворяет условию:

$$\tau_1(x,y)=x^{\gamma_1}\bar{\tau}_1(x,y),$$

где $\gamma_1\geq\alpha$, $\bar{\tau}_1(x,y)$ - непрерывная функция в $\overline{D}_1$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка и непрерывные смешанные производные второго порядка в D_1;

2) $\tau_{1_x}(x,y)$ и $\tau_{1_y}(x,y)\in C(D_1)\cap L(\overline{D}_1)$; $\tau_{1_{xy}}\in C(D_1)$;

3) $\tau_2(x,z)\in C(\overline{D}_2)$ и удовлетворяет условию:

$$\tau_2(x,z) = z^{\gamma_2}\bar{\tau}_2(x,z),$$

где $\gamma_2 \ge \alpha$, $\bar{\tau}_2(x,z)$ - непрерывная функция в $\overline{D}_2$,имеющая непрерывные частные производные первого порядка и непрерывные смешанные производные второго порядка в D_2;

4) $\tau_{2_x}(x,z)$ и $\tau_{2_z}(x,z) \in C(D_2) \cap L(\overline{D}_2)$; $\tau_{2_{xz}} \in C(D_2)$;

5) $\nu(x,y)$ и $\nu_y(x,y) \in C(D_1) \cap L(\overline{D}_1)$ и $\nu(x,y)$ либо ограничена в окрестности точки $(0,0)$, либо может обращаться в этой точке в бесконечность порядка меньше единицы;

6) $\tau_{2_z}(x,x) - \tau_{2_x}(x,x) + \tau_{1_y}(x,x) = \nu(x,x)$, $0 < x < +\infty$.

Тогда функция $u(x_0, y_0, z_0)$ дает единственное решение поставленной задачи (1.1)-(1.4).

Непрерывная зависимость решения от начальных данных доказывается обычными методами классической теории уравнений с частными производными математической физики. Основную роль при этом играет оценка интегралов, фигурирующих в записи решения, которая проводится так же, как и при исследовании поведения решения в окрестности начала координат.

Теорема 1.2.

Пусть граничные функции удовлетворяют условиям:

1) $\tau(x,y) \in C(\overline{D}_1)$ и представима в виде:

$$\tau(x,y) = x^{\gamma}\bar{\tau}(x,y),$$

где $\gamma \ge \alpha$, $\bar{\tau}(x,y)$ - непрерывная функция в $\overline{D}_1$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка и непрерывные смешанные производные второго порядка в D_1;

2) $\tau_x(x,y)$ и $\tau_y(x,y) \in C(D_1) \cap L(\overline{D}_1)$; $\tau_{xy} \in C(D_1)$;

3) $\nu_1(x,y)$ и $\nu_{1_y}(x,y) \in C(D_1) \cap L(\overline{D}_1)$;

4) $\nu_2(x,z)$ и $\nu_{2_z}(x,z) \in C(D_2) \cap L(\overline{D}_2)$,

5) $\nu_1(x,y)$ и $\nu_2(x,z)$ либо ограничены в окрестности точки $(0,0)$, либо могут обращаться в этой точке в бесконечность порядка меньше единицы;

6) $\nu_1(x,x) + 2\nu_2(x,x) - \tau_x(x,x) + 2\tau_y(x,x) \equiv 0$, $0 < x < +\infty$.

Тогда функция $u(x_0, y_0, z_0)$ дает единственное решение задачи (1.1), (1.5)-(1.7), которое непрерывно зависит от начальных данных.

Таким образом, симметрия уравнения (1.1) относительно x и y и метод Римана-Адамара позволили доказать корректность поставленных в этой главе двух задач.

Во второй главе рассмотрены две задачи, в которых искомая функция, наряду с обычными граничными условиями, удовлетворяет и интегральному условию. Задачи с интегральными условиями являются новым направлением в современной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Возникновение интегральных условий объясняется тем, что на практике часто бывает возможным измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины. Так, задачи с интегральными условиями могут служить математическими моделями физических явлений, связанных, например, с задачами, возникающими при изучении физики плазмы. А.А. Самарский приводит постановку задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности как пример одной из таких задач[3]. А.М.Нахушев[4] указал примеры практического применения результатов исследования краевых задач с интегральными условиями при изучении процессов влагопереноса в пористых средах и в задачах математической биологии.

Пусть H - область в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченная частями плоскостей:

1) $z=0,\ 0<x<a,\ a>0,\ 0<y<x$;
2) $z=a,\ 0<x<a,\ 0<y<x$;
3) $y=0,\ 0<x<a,\ 0<z<a$;
4) $x=a,\ 0<y<a,\ 0<z<a$;
5) $y=x;\ 0<x<a,\ 0<z<a$.

Плоскость $z=x-y$ делит область H на две области: H^- при $z<x-y$ и H^+ при $z>x-y$.

В областях H^- и H^+ будем рассматривать уравнение:

$$L(u)\equiv u_{xyz}-\frac{\beta}{x+y+z}\cdot u_{yz}=0,\quad \beta>0. \tag{2.1}$$

Задача А.

В области H^- требуется найти функцию $u(x,y,z)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y,z)\in C(\overline{H}^-)$; 2) $u_y(x,y,z)\in C(H^-\cup G_{xy})$,

$u_{xyz}\in C(H^-)$ и $L(u)\equiv 0$ в H^-;

3) $u(x,y,z)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$u(x,0,z)=\varphi(x,z),(x,z)\in\overline{G}_{xz}, \tag{2.2}$$

$$\lim_{z\to x-y} u_y(x,y,z)=\omega(x,y),(x,y)\in G_{xy} \tag{2.3}$$

и интегральному условию:

$$\int_0^{x-z} u_z(x,y,z)(x-z-y)^{\beta-1}dy=\psi(x,z),\ (x,z)\in\overline{G}_{xz}, \tag{2.4}$$

[3] Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения, 1980. Т. 16,-Минск, №11. С. 1925-1935.

[4] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995. -301 с.

где $G_{\xi\eta}=\{(\xi,\eta):\quad 0<\xi<a,\ 0<\eta<\xi\}$.

Задача В.

В области H^+ требуется найти функцию $u(x,y,z)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y,z)\in C(\overline{\overline{H}}^+)$; 2) $u_{xyz}\in C(H^+)$ и $L(u)\equiv 0$ в H^+;

3) $u(x,y,z)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u(x,y,a)=f(x,y),\ (x,y)\in\overline{P_1},$$
$$u(x,x,z)=g(x,z),\ (x,z)\in\overline{P_2}$$

и и

$$\int_{x-y}^{a}u_y(x,y,z)[z-(x-y)]^{\beta-1}dz=h(x,y),\ (x,y)\in\overline{P_1},$$

где $P_1=\{(x,y):0<x<a,0<y<x\}$, $P_2=\{(x,z):0<x<a,0<z<a\}$.

Таким образом, в задаче А задаются значения искомой функции на характеристической части границы области и значения ее производной $\frac{\partial u}{\partial y}$ на нехарактеристической части границы. Кроме того, искомая функция удовлетворяет интегральному условию, которое представляет собой усреднение с весом производной $\frac{\partial u}{\partial z}$.

В задаче В на характеристической и нехарактеристической частях границы области задаются значения искомой функции, а интегральное условие представляет собой усреднение с весом производной $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Для доказательства разрешимости первой задачи строится решение уравнения (2.1), зависящее от трех произвольных функций:

$$u(x,y,z)=c_3(x,z)+\int_{y}^{x-z}c_2(x,s)ds+\int_{y}^{x-z}ds\int_{z}^{x-s}c_1(s,t)(x+s+t)^{\beta}dt, \qquad \textbf{(2.5)}$$

Функции $c_2(x,y)$ и $c_3(x,z)$ непосредственно определяются, исходя из граничных условий. А функция $c_1(x,z)$ определяется как решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода:

$$\int_{0}^{x-z}c_1(s,z)[x^2-(s+z)^2]^{\beta}ds=p(x,z), \qquad (2.6)$$

где

$$p(x,z)=\beta\psi(x,z)-\varphi_z(x,z)(x-z)^{\beta}.$$

При доказательстве его разрешимости рассмотрены три случая: $0<\beta<1$; $\beta=n,\ n\in N$; $\beta=n+\alpha$, $n=[\beta]$, $0<\alpha<1$.

В случае $0<\beta<1$ непосредственным дифференцированием уравнение (2.6) сводится к уравнению типа Абеля. Доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1.

Пусть функции $\psi(x,z)$ и $\varphi(x,z)$ удовлетворяют условиям;

1) $\psi(x,z)$, $\psi_x(x,z)$ и $\psi_{xx}(x,z)\in C(\overline{G}_{xz})$,
причем $\psi(z,z)\equiv 0$ и $\psi_x(z,z)\equiv 0$;

2) $\varphi(x,z)$, $\varphi_z(x,z)$, $\varphi_{xz}(x,z)$ и $\varphi_{xxz}(x,z)\in C(\overline{G}_{xz})$;
$\varphi_z(x,z)$ и $\varphi_{xz}(x,z)$ удовлетворяют условиям:

$$\varphi_z(\xi,z)=(\xi-z)^{2-\beta}\varphi_1(\xi,z),$$

$$\varphi_{\xi z}(\xi,z)=(\xi-z)^{1-\beta}\varphi_2(\xi,z),$$

где $\varphi_1(\xi,z)$ и $\varphi_2(\xi,z)$ - непрерывные функции.

Тогда функция *C\(x,z),* определяемая формулой

$$c_1(x,z)=\gamma\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_z^{x+z}\left[(x+z)^2-\xi^2\right]^{-\beta}p_\xi(\xi,z)d\xi$$

является непрерывным решением уравнения (2.6) и это решение единственно.

Таким образом, выразив $c_1(x,z)$, $c_2(x,y)$ и $c_3(x,z)$ через известные функции, получаем явное представление решения задачи. Итак, справедлива теорема.

Теорема 2.2.

Пусть для функций $\varphi(x,z)$, $\omega(x,y)$ и $\psi(x,y)$ выполняются требования:

1) для функций $\varphi(x,z)$ и $\psi(x,y)$ выполняются условия теоремы 2.1.;

2) $\omega(x,y)$ и $\omega_x(x,y)$ непрерывны в G_{xy} и интегрируемы по y при любом $x\in(0;a)$.

Тогда существует единственное решение задачи А.

В случае $\beta=n$ имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.3.

Пусть функции $\psi(x,z)$ и $\varphi(x,z)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\psi(x,z)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по первому аргументу до $(n+1)$-го порядка включительно в $\overline{G}_{xz}$, причем сама функция $\psi(x,z)$ и ее производные по первому аргументу до n -го порядка включительно равны нулю при $x=z$, то есть $\frac{\partial^k}{\partial x^k}\psi(x,z)\equiv 0$, $k=0,1,2,\dots,n$;

2) $\varphi(x,z)$ и $\varphi_z(x,z)$ непрерывны в $\overline{G}_{xz}$, $\varphi_z(z,z)\equiv 0$, $\varphi_z(x,z)$ имеет непрерывные производные по первому аргументу до $(n+1)$-го порядка

включительно в $\overline{G}_{xz}$.

Тогда функция $c_1(x,z)$, определяемая формулой

$$c_1(x,z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{A}^n p(x+z,z)\right], \tag{2.7}$$

является непрерывным решением интегрального уравнения

$$\int_0^{x-z} c_1(s,z)\left[x^2-(s+z)^2\right]^n ds = p(x,z)$$

и это решение единственно.

Единственность решения интегрального уравнения следует из однозначности всех преобразований, выполненных при получении формулы (2.7).

Теорема 2.4.

Пусть функции $\varphi(x,z)$, $\omega(x,y)$ и $\psi(x,z)$ удовлетворяют условиям:

1) $\omega(x,z)$ и $\omega_x(x,z)$ непрерывны в $\overline{G}_{xy}$ и интегрируемы по y при любом $x\in(0;a)$;

2) $\psi(x,z)$ и $\varphi(x,z)$ подчиняются требованиям теоремы 2.3.

Тогда существует единственное решение задачи А в случае, когда $\beta=n,\ n\in N$.

Случай $\beta=n+\alpha$, $n=[\beta]$, $0<\alpha<1$ является обобщением первых двух случаев. Результатом исследования этого случая являются две теоремы.

Для доказательства разрешимости задачи В воспользуемся решением уравнения (2.1) следующего вида:

$$u(x,y,z)=c_3(x,y)+\int_{x-y}^{z} c_2(x,s)ds+\int_{x-y}^{z} ds\int_{y}^{x} c_1(t,s)(x+t+s)^{\beta}dt.$$

Так же, как и в первой задаче, произвольные функции $c_2(x,z)$ и $c_3(x,y)$ определяются непосредственно, исходя из граничных условий, а функция $c_1(y,z)$ находится как решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода с параметром:

$$\int_{x-y}^{a} c_1(y,s)\left[(s+y)^2-x^2\right]^{\beta} ds = w(x,y),$$

где
$$w(x,y)=\beta\cdot h(x,y)-f_y(x,y)(a+y-x)^{\beta}.$$

При доказательстве его разрешимости опять рассматриваются три случая: $0<\beta<1$; $\beta=n,\ n\in N$ и $\beta=n+\alpha$, $n=[\beta]$, $0<\alpha<1$. Так же, как при решении задачи А, в каждом из трех случаев доказаны однозначная разрешимость интегрального уравнения и получены представления решения задачи в явном виде.

В заключение приношу глубокую благодарность научному руководителю, заслуженному деятелю науки РФ, доктору физико-математических наук, профессору Виктору Филипповичу Волкодавову за постоянное внимание к моей работе и помощь в ее выполнении.

По теме диссертации опубликованы следующие работы.

1. Энбом Е.А. Смешанная задача для одного дифференциального уравнения третьего порядка с вырождением в одной точке. // Труды третьей международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". - Саранск.: Изд-во «Красный октябрь», 1998. -С.241.
2. Энбом Е.А. Аналог задачи Гурса для одного вырождающегося уравнения третьего порядка. // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды восьмой межвузовской конференции. Самара, 29-31 мая, 1998. Ч.3. Секция «Дифференциальные уравнения и краевые задачи». - Самара.: Изд-во СамГТУ, 1998. -С.105-107.
3. Энбом Е.А. Смешанная задача для одного модельного уравнения третьего порядка и ее применения. // Доклады 52-ой научной конференции СамГПУ. Сборник трудов.- Самара, 1998. -С.133-136.
4. Энбом Е.А. Об одном интегральном уравнении Вольтерра первого рода и его применении к решению задачи с интегральным условием./ Е.А.Энбом, В.Ф.Волкодавов // Доклады 54-й научной конференции СГПУ. 4.1. - Самара.: СГПУ, 2000. -С.30-35.
5. Энбом Е.А. Формула обращения для одного интегрального уравнения Вольтерра первого рода и ее применение к решению задачи для вырождающегося уравнения третьего порядка. // Доклады 54-ой научной конференции СГПУ. 4.1. - Самара, 2000. -С.103-108.
6. Энбом Е.А. Об одной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка. // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды одиннадцатой межвузовской конференции. Самара, 29-31 мая, 2001. 4.3. Секция «Дифференциальные уравнения и краевые задачи». - Самара.: Изд-во СамГТУ, 2001. -С.136-140.
7. Энбом Е.А. Задача А2 для одного уравнения третьего порядка. // Научные доклады ежегодной межвузовской 55-ой научной конференции СамГПУ.- Самара, 2001. -С.74-80.
8. Энбом Е.А. Задача Коши для вырождающегося уравнения третьего порядка. // Научные доклады ежегодной межвузовской 55-ой научной конференции СамГПУ.- Самара, 2001. -С.80-87.
9. Энбом Е.А. Аналог задачи Коши для уравнения третьего порядка. // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды тринадцатой межвузовской конференции, Самара, 29-31 мая 2003. 4.3. Секция «Дифференциальные уравнения и краевые задачи». Самара.:Изд-во СамГТУ, 2003. -С.171-173.
10. Энбом Е.А. Неклассическая задача для вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка./ Энбом Е.А., Волкодавов В.Ф. // Известия вузов. Математика. -Казань, 2003. -Деп. в ВИНИТИ 23.07.2003. №1445-В2003.
11. Энбом Е.А. Задача с интегральным условием для вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка. //Труды международной научной конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами, Душанбе, 25-28 октября 2003 г. Душанбе.:Изд-во «Нодир», 2003. -С.174-177.