Казанский Государственный Университет

На правах рукописи

Романова Елена Михайловна

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань-2005

Работа выполнена на кафедре геометрии
Казанского Государственного Университета

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук Фомин В.Е.

Официальные оппоненты:
доктор физ.-мат. наук Смоленцев Н.К.,
кандидат физ.- мат. наук Сосов Е.Н.

Ведущая организация – Нижегородский Государственный Университет.

Защита состоится 1 декабря 2005 г. в 16 часов 30 минут на заседании Диссертационного Совета по математике Д.212.081.10. Казанского Государственного Университета по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская 18, II корпус, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке КГУ.

Автореферат разослан 31 октября 2005 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета:
Доцент / М. А. Малахальцев/

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

Изучением бесконечномерных дифференцируемых многообразий математики занимаются уже более полувека. За это время были получены значительные результаты в изучении и применении банаховых многообразий (Бурбаки Н., Дьедонне Ж., Ленг С., Элиассон Х. и др.), а также многообразий Фреше (Hamilton R. S., Michor P. и др.). В них приводятся основные определения и теоремы, а также примеры, рассматривающие дифференциально-топологические свойства бесконечномерных многообразий, но меньше внимания уделяется построению дифференциально-геометрических структур, а именно, многообразиям с линейной и римановой связностями.

Построение теории абстрактных банаховых многообразий было завершено в работах Бурбаки Н. [1] и Ленга С. [2]. Изучение многообразий типа Фреше продолжается и сейчас и сопровождается некоторыми трудностями. В пространстве Фреше не удается построить естественное простое дифференциальное исчисление, как в банаховом пространстве. В пространстве Фреше не выполняется классическая теорема об обратном операторе и, как следствие, неверна теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений. Существенным отличием от теории банаховых пространств является тот факт, что пространство непрерывных линейных отображений из одного пространства Фреше в другое не образует пространство Фреше.

Наиболее важные результаты по многообразиям Фреше получены в работах Hamilton R. S. [3] и Michor P. W. [4]. В этих работах изучаются многообразия отображений бесконечного класса гладкости. Michor P. W. доказал, что множество гладких отображений $C^\infty(X, Y)$, где X, Y – компактные многообразия класса C^∞, является многообразием Фреше, причем эта структура многообразия не зависит от выбора локальной экспоненты на Y, с помощью которой строятся карты атласа. Hamilton R. S. приводит доказательства того, что множество сечений произвольного расслоения является многообразием, и в частности, что множество сечений векторного расслоения является пространством Фреше.

В этих работах подробно рассматриваются вопросы дифференциальной топологии бесконечномерных многообразий, при этом менее развит оказался дифференциально-геометрический аспект.

Теория связностей, введение метрики, вычисление тензоров кривизны и кручения, построение гладких структур многообразий и расслоений – вот одни из основных вопросов дифференциальной геометрии, рассматриваемых в данной диссертации. Они представляют интерес для таких областей знания, как вариационное исчисление, теория относительности, механика и гидродинамика.

ЦЕЛЬ ДИССЕРТАЦИИ — изучение бесконечномерных многообразий банахова типа и типа Фреше: построение структуры банахова многообразия на множестве ориентированных незамкнутых кривых в трехмерном евклидовом пространстве и нахождение объекта плоской линейной связности на этом многообразии; построение связности Картана на группе Ли невырожденных аффинорных полей; изучение линейной связности и ее тензора кривизны на многообразии компактных подмногообразий евклидова пространства и введение римановой связности на этом многообразии; построение структуры векторного расслоения типа Фреше, за базу которого взято многообразие компактных подмногообразий евклидова пространства и слоями которого являются пространства Фреше всех гладких сечений тензорного расслоения произвольного компактного подмногообразия евклидова пространства, изучение инфинитезимальной связности и ее тензора кривизны на этом расслоении.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, выносимые на защиту:

1) Доказано, что многообразие классов плоских, заданных натуральным параметром ориентированных незамкнутых кривых без точек спрямления, определяемых с точностью до движения, является локально плоским пространством линейной связности.

2) Доказано, что фактормногообразие невырожденных аффинорных полей по действию группы обратимых функций является группой Ли и, следовательно, пространством линейной связности, допускающим абсолютный параллелизм.

3) На многообразии компактных подмногообразий евклидова пространства строится объект линейной связности и вычисляется ее тензор кривизны.

4) На векторном расслоении Фреше гладких тензорных полей над многообразием компактных подмногообразий евклидова пространства строится объект инфинитезимальной связности и для расслоения гладких функций

находится тензор кривизны этой связности.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе используются методы и результаты дифференциальной геометрии многообразий.

В первой главе диссертации применяется метод нормализации Нордена [5]. Нормализация – это расширение понятия "оснащение". Под оснащением понимают соответствие, при котором каждой точке подмногообразия ставится в соответствие подпространство, дополнительное к касательному пространству подмногообразия. Здесь также применяется метод проектирования линейных связностей на расслоениях банахова типа, описанный Фоминым В. Е. [6].

Третья глава данной диссертации (в частности, параграфы 3.6 - 3.8) содержит обобщение примера 4.5.5. из Hamilton R. S. [3]. В этом примере строится векторное расслоение гладких функций на римановом многообразии M и вычисляется тензор кривизны инфинитезимальной связности на этом расслоении, причем кривизна эта не равна 0, даже когда риманово многообразие M плоское.

СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых на параграфы, которые обозначаются двумя цифрами, где первая цифра означает номер главы, а вторая – номер параграфа.

Во **Введении** дается постановка задач, рассматриваемых в диссертации, приводится обзор литературы, используемой в работе, и список основных результатов, полученных в диссертации.

В первых двух главах рассматриваются примеры банаховых многообразий и расслоений, в третьей главе – многообразия и расслоения типа Фреше.

Первая глава состоит из 5 параграфов и посвящена изучению множества незамкнутых кривых, которое играет важную роль в вариационном исчислении.

Задача введения гладкой структуры на множестве всех дифференцируемых кривых евклидова пространства нетривиальна, поскольку существует несколько различных подходов к четкому определению кривой. В силу неоднозначного понимания термина "кривая" подробно рассматриваются все ограничения, накладываемые на этот объект.

Здесь термин "кривая" означает гладкое отображение класса C^q $r : [0, s_0] \subset R \to R^n$ $(n = 2, 3)$ с некоторыми оговорками: $\forall s \in [0, s_0]$ $|r'(s)| \equiv 1$, $r(0) \neq r(s_0)$, т.е. кривая параметризована натурально и незамкнута. При этом образ кривой определяется как подмножество $\ell = r([0, s_0]) \subset R^n$ $(n = 2, 3)$ с заданной ориентацией и фиксированной длины s_0.

В параграфе 1.1 доказывается, что множество U незамкнутых ориентированных кривых фиксированной длины, параметризованных натуральным параметром и имеющих ненулевое кручение (случай трехмерного пространства R^3) или ненулевую кривизну (случай двумерного пространства R^2), можно наделить структурой банахова многообразия класса C^∞.

Но под словом "кривая" в геометрии часто понимают подмножество ℓ, определяемое с точностью до движения, т.е. без учета ее расположения в пространстве как твердого тела. Множество так понимаемых кривых является фактормножеством множества U по действию группы движений G, которое определяется в параграфе 1.2. На этом фактормножестве в параграфе 1.4 строится такая глобальная карта, что для любого класса эквивалентности $[\ell]$ его "координатой" являются функции кривизны и кручения (при $n = 3$) произвольного представителя этого класса.

В параграфе 1.3 на многообразии U, которое является подмногообразием банахова пространства отображений класса C^q из отрезка $[0, s_0]$ числовой оси в евклидово пространство R^n $(n = 2, 3)$, естественным образом определяется связность, задаваемая распределением площадок:

$$H_r = \{h(.) = \int_0^{\cdot} \alpha(s) r'(s) ds \quad | \quad \alpha \in C^{q-1}([0, s_0], R)\}.$$

Такая нормализация определяет на U ковариантную производную вида

$$\nabla_Y X = \mathrm{pr}_{TU} TX(Y),$$

где X, Y – векторные поля на U.

Причем эта связность оказывается инвариантной относительно действия группы движений, а поэтому появляется возможность спроектировать ее на фактормногообразие.

В параграфе 1.5 удается вычислить в "координатах" объект этой связности только в случае многообразия плоских кривых. Компоненты спроектированной связности на фактормногообразии при этом оказываются равными нулю. Отсюда вывод (утверждение 1.10. в диссертации):

Многообразие классов плоских ориентированных незамкнутых, заданных натуральным параметром кривых без точек спрямления, определя-

емых с точностью до движения, является локально плоским пространством линейной связности.

Вторая глава посвящена связности Картана на группе Ли невырожденных аффинорных полей и состоит из двух параграфов.

В первом параграфе рассматривается множество невырожденных тензорных полей валентности (1,1) конечного класса гладкости на компактном многообразии. На этом множестве действует группа функций, не обращающихся в ноль ни в одной точке многообразия. Фактормногообразие по этому отношению эквивалентности образует группу Ли.

На любой группе Ли можно определить такую линейную связность, что любое левоинвариантное (соответственно, правоинвариантное) векторное поле ковариантно постоянно. Такая связность называется связностью Картана. Можно выделить три связности Картана – левую, правую и среднюю. Все три связности Картана не симметричны по своим аргументам и имеют нулевой тензор кривизны, но ненулевой тензор кручения.

Во втором параграфе в естественной карте строится объект левой связности Картана с тензором кручения. Вывод, полученный в этой главе, следующий (утверждение 2.5):

Фактормногообразие невырожденных аффинорных полей по действию группы обратимых функций является группой Ли и, следовательно, пространством линейной связности, допускающим абсолютный параллелизм.

Третья глава состоит из 8 параграфов, где рассматриваются многообразие $\mathcal{B}$ компактных подмногообразий евклидова пространства и векторное расслоение Фреше $\mathcal{E}$ гладких тензорных полей на этих подмногообразиях.

В параграфе 3.1 строится атлас $\mathcal{A} = \{c_N\}_{N\in\mathcal{B}}$ естественных карт на многообразии $\mathcal{B}$ компактных подмногообразий евклидова пространства. Каждая карта $c_N = (U_N, \phi_N, \Gamma^\infty(N^\perp))$ центрированна в точке $N \in \mathcal{B}$. Модельным пространством $\Gamma^\infty(N^\perp)$ является пространство Фреше гладких сечений нормальнго расслоения $N^\perp$. Атлас $\mathcal{A}$ порождает на $\mathcal{B}$ линейную связность без кручения, объект которой в точке $N \in \mathcal{B}$ относительно карты c_N равен нулевому оператору.

В параграфе 3.2 (формула (5)) находится объект Γ этой связности в произвольной точке $L \in \mathcal{B}$ относительно естественной центрированной карты c_N, взятой в точке $N \in \mathcal{B}$

$$\Gamma_{\phi_N(L)}(X,Y) = -\mathrm{pr}_{N^\perp\|TL}(\bigtriangledown^\perp X^\perp(Y^\top) + \bigtriangledown^\perp Y^\perp(X^\top) + H^\perp(X^\top, Y^\top)),$$

где $\mathrm{pr}_{N^\perp\|TL}$– проекция векторного поля на нормальное расслоение $N^\perp$ параллельно касательному расслоению TL, $\bigtriangledown^\perp$ — линейная связность в нормальном расслоении $L^\perp$, $H^\perp$ — вторая основная форма многообразия L, значения которой лежат в $L^\perp$, $X^\top$– касательная составляющая на TL, $X^\perp$– нормальная составляющая на $L^\perp$ векторного поля $X \in \Gamma^\infty(N^\perp)$.

Из полученной формулы видно, что объект линейной связности зависит от ковариантного дифференцирования и второй основной формы в нормальном расслоении фиксированного компактного подмногообразия евклидова пространства. Но несмотря на сложный вид объекта связности, в параграфе 3.3 удается вычислить ее тензор кривизны.

Кроме этого, многообразие компактных подмногообразий можно наделить структурой риманова многообразия. Риманова связность построена в параграфах 3.4 – 3.5.

В параграфе 3.6 для каждого подмногообразия $N \in \mathcal{B}$ рассматривается векторное расслоение $T^q_p N$ тензоров валентности (q, p) на N.

Беря многообразие $\mathcal{B}$ за базу и в качестве слоя над $N \in \mathcal{B}$ – пространство Фреше $\Gamma^\infty(T^q_p N)$ гладких сечений тензорного расслоения компактного подмногообразия $N \in \mathcal{B}$, получаем векторное расслоение типа Фреше $\mathcal{E}$. На этом расслоении гладких тензорных полей в параграфе 3.7 строится инфинитезимальная связность и находится объект этой связности. В параграфе 3.8 удается вычислить тензор кривизны только в случае расслоения гладких функций ($p = q = 0$), но в произвольной точке расслоения в отличии от примера 4.5.5. из Hamilton R. S. [3], где тензор кривизны вычислен в нуле $0 \in \Gamma^\infty(T^0_0 N)$.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА

В диссертации рассмотрены нетривиальные задачи дифференциальной геометрии бесконечномерных многообразий и построены геометрические объекты, ранее не рассматриваемые, либо изученные в частных случаях.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ

Работа носит теоретический характер и может быть полезна специалистам, изучающим и применяющим бесконечномерные многообразия.

СПИСОК ТРУДОВ И АПРОБАЦИЯ ДИССЕРТАЦИИ

По теме диссертации имеется 6 публикаций.

Первые тезисы на тему "Многообразие ориентированных незамкнутых кривых в евклидовой плоскости" были опубликованы в сборнике тезисов студенческой конференции КГУ в 1998 г., на которой был сделан доклад.

Второй доклад был сделан на научной конференции, посвященной 40-летию механико-математического факультета КГУ в 2000 г.. Тезисы под названием "Линейная связность и геодезические на многообразии компактных подмногообразий евклидова пространства" были написаны совместно с научным руководителем Фоминым В. Е.

Следующие тезисы "Связность на расслоении с тотальным пространством гладких тензорных полей" были опубликованы в научных трудах конференции "Геометризация физики", КГУ, 2001 г.

Имеются три статьи:

1) Романова Е. М. *Линейная связность на многообразии компактных подмногообразий*// Межвузовский сборник научных трудов. Движения в обобщенных пространствах. – Пенза: Изд.Пензенск. Гос. Педагог. Ун.-та. – 2000. – с. 41-49.

2) Романова Е. М. *Риманова связность на многообразии компактных подмногообразий евклидова пространства*// Труды XIII-XIV Международной летней школы-семинара "Волга 2001-2002". – Казань. – 2003. – с. 360-366.

3) Романова Е. М. *Связность на расслоении гладких тензорных полей*// Труды XIII-XIV Международной летней школы-семинара "Волга 2001-2002". – Казань. – 2003. – с. 348-360.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Бурбаки Н. *Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов.*– М.: Мир, 1975,– 224 с. .

2. Ленг С. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий.*– М.: Мир, 1967.– 204 с.

3. Hamilton R. S. *The inverse function theorem of Nash and Moser*// Bull. Amer. Math. Soc., 1982.– V.7.– №1.– p.65 - 222.

4. Michor P. *Manifolds of differentiable mappings*// Cambridge, Mass., 1980.– 158 p.

5. Норден А. П. *Пространства аффинной связности.*– М.: Наука, 1976, п.57.

6. Фомин В. Е. *Проектирование линейных связностей в расслоениях банахова типа* // Труды геометрического семинара. – Изд.-во КГУ, Казань, 1988. – Выпуск 18. – с. 95 - 116.

Автор выражает признательность научному руководителю Фомину В.Е. за постановку задач и постоянную помощь при выполнении работы.