КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Бушуева Галина Николаевна

ОБОБЩЕННЫЕ РАССЛОЕНИЯ ВЕЙЛЯ МНОГООБРАЗИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Казань — 2005

Работа выполнена на кафедре геометрии Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Шурыгин Вадим Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Евтушик Леонид Евгеньевич
	кандидат физико-математических наук, доцент Султанов Адгам Яхиевич
Ведущая организация:	Московский государственный педагогический университет

Защита состоится 1 декабря 2005 г. в 14 ч. 30 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18, корпус 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина /Казань, ул.Кремлёвская, 18/.

Автореферат разослан 30 октября 2005 г.

Учёный секретарь
Диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент / Малахальцев М. А. /

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Расслоения дифференциально-геометрических объектов над гладкими многообразиями являются одними из основных объектов изучения дифференциальной геометрии. Соответствие F, относящее многообразию M расслоение $FM \to M$ дифференциально-геометрических объектов данного типа, как правило, представляет собой функтор из категории многообразий, морфизмами которой являются локальные диффеоморфизмы $f\colon M_n \to M'_n$, в категорию локально тривиальных расслоений. Особое место среди таких функторов занимают так называемые функторы, сохраняющие произведение, то есть функторы F, относящие произведению многообразий $M \times M'$ произведение соответствующих расслоений $FM \times FM' \to M \times M'$. В работах Г. Кайнца и П. Михора, Д. Эка, О. Лучиано [15] было получено полное описание функторов, сохраняющих произведение, в терминах расслоений Вейля. Расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}}M$, определяемое локальной алгеброй $\mathbb{A}$ в смысле А.Вейля было введено А. Вейлем в работе [19] как обобщение расслоения n^k-скоростей Ш.Эресмана [14]. Связь теории локальных алгебр и их групп автоморфизмов с теорией дифференциально-геометрических объектов была установлена также в работах В. В. Вагнера [1].

Геометрии расслоений Вейля посвящено много исследований. Укажем, кроме упомянутых выше, работы А. Моримото, Л. Паттерсона, исследования П. Юэна, А. П. Широкова [11, 12], И. Коларжа, Э. Окассы, В. В Шурыгина [13], А. Я Султанова [9], Я. Дебекки. Касательные расслоения и расслоения n^k-скоростей Ш.Эресмана [14], представляющие собой частные случаи расслоений А. Вейля, исследовались в работах В. В. Вагнера [1], К.Яно и Ш.Ишихары [20], Ш.Сасаки, А. Моримото, Н.В.Талантовой и А.П.Широкова и других авторов. Теории функторов, сохраняющих произведения, посвящены работы В. Микульского [17], И. Коларжа и В. Микульского [16].

Различным аспектам дифференциальной геометрии высшего порядка — теории связностей высших порядков, теории дифференциально-геометрических объектов — посвящены исследования Г. Ф. Лаптева [8], В. В. Вагнера [1], А. М. Васильева [2], Н. М. Остиану, Л. Е. Евтушика [6], Б. Н. Шапукова [10], М.В.Лосика, А.К.Рыбникова, И. Коларжа и М. Модуньо.

Более полную библиографию работ, посвященных касательным расслоениям, расслоениям струй Эресмана, расслоениям и функторам А. Вейля, различным проблемам дифференциальной геометрии высшего порядка можно найти в обзорах А. П. Широкова [12], в монографиях Л. Е. Евтушика, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану и А. П. Широкова [5], П. Молино [18], И. Коларжа, П. Михора и Я. Словака [15].

А. П. Широковым [12] было установлено, что расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}}M_n$ обладает естественной структурой гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$, что позволило применять при изучении геометрии расслоений Вейля теорию многообразий над алгебрами. Общей теории пространств над алгебрами и ее применению посвящены работы В. В. Вишневского [3], Г. И. Кручковича [7], В. В. Шурыгина [13], и других авторов (см. обзор А. П. Широкова [12], книгу В. В. Вишневского, А. П. Широкова, В. В. Шурыгина [4]).

Структуры гладких многообразий над бесконечномерными алгебрами, являющимися обратными пределами конечномерных, возникают на бесконечномерных многообразиях, рассматривавшихся И. Н. Бернштейном и Б. И. Розенфельдом. Функторы А. Вейля на категории бесконечномерных многообразий, моделируемых локально выпуклыми векторными пространствами, изучались в работе А. Кригла и П. Михора. Другое обобщение функтора А. Вейля на случай бесконечномерных многообразий построено И. Коларжем.

Таким образом, изучение геометрии гладких многообразий над локальными алгебрами и геометрии расслоений Вейля как многообразий над алгебрами является направлением исследований, взаимодействующим со многими интенсивно развивающимися областями современной геометрии.

В теории дифференциальных уравнений, при построении различных геометрических моделей лагранжевой и гамильтоновой механики возникает необходимость в рассмотрении расслоений вида $Y \to \mathbb{R}$ (или в более общем случае $Y \to \mathbb{R}^m$), где $\mathbb{R}$ — время. Такие расслоения тривиализуемы, то есть $Y \simeq M \times \mathbb{R}$. При этом возникают геометрические структуры, зависящие от параметров (времени) . В этой связи отметим работы А. Вондра, М. Ранады, М. де Леона и К. Маррето. Поэтому актуальным становится подход к изучению дифференциально-геометрических структур на многообразиях вида $M \times \mathbb{R}^m$ с точки зрения теории функторов Вейля.

Целью диссертационной работы является обобщение теории функторов Вейля на случай естественных категорий многообразий, зависящих от параметров, установление взаимосвязи обобщенных функторов Вейля с функторами, сохраняющими произведение, и изучение геометрии обобщенных расслоений Вейля.

Методы исследования. При изучении функторов Вейля и функторов, сохраняющих произведение, на категориях многообразий, зависящих от параметров, применяются методы изучения естественных расслоений и функторов сохраняющих произведения (см. монографию И. Коларжа, П. Михора и Я. Словака [15]), а также методы теории многообразий над алгебрами (см. книгу В. В. Вишневского, А. П. Широкова, В. В. Шурыгина [4], обзорные работы А.П.Широкова [12], В.В.Шурыгина [13]). При исследовании вопросов, относящихся к геометрии расслоений Вейля, используются методы теории дифференциально-геометрических структур на многообразиях (П. Молино [18], Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков [5]).

Научная новизна. Результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Построено обобщенное расслоение Вейля многообразия $M_n \times \mathbb{R}^m$, зависящего от m параметров, структурной группой которого является $\mathbb{A}$-аффинная дифференциальная группа $D_n(\mathbb{A})$.

2. Выяснена структура расслоенных функторов, сохраняющих произведение, на категории многообразий $M_n \times \mathbb{R}^m$, зависящих от m параметров, морфизмами которой являются расслоенные отображения проектирующиеся в тождественные отображения пространства параметров $\mathbb{R}^m$. Доказано, что все такие функторы определяются m-параметрическим семейством $\mathbb{A}(t)$, $t \in \mathbb{R}^m$, алгебр Вейля и набором из m гладких функций $t \mapsto \mathring{\mathbb{A}}(t)$, где $\mathring{\mathbb{A}}$ — максимальный идеал алгебры $\mathbb{A}$, состоящий из всех ее нильпотентных элементов. Аналогич-

ная задача решена для категории многообразий, зависящих от m параметров, морфизмами которой являются расслоенные отображения проектирующиеся в трансляции пространства параметров $\mathbb{R}^m$. В этом случае всякий расслоенный функтор, сохраняющий произведение, эквивалентен некоторому обобщенныму функтору Вейля, определяемому постоянной алгеброй Вейля $\mathbb{A}$ и набором из m элементов идеала $\mathring{\mathbb{A}}$.

3. Получены условия эквивалентности обобщенных функторов Вейля в терминах изоморфизмов пар локальных алгебр $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ — подалгебра в $\mathbb{A}$.

4. Изучено строение структурной группы $G_n^r(\mathbb{A})$ расслоения $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$ $\mathbb{A}$-гладких реперов порядка r расслоения Вейля $T^{\mathbb{A}}M_n$ гладкого многообразия M_n. Определена структурная форма расслоения $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$ и получены структурные уравнения этого расслоения. Доказано, что локальные диффеоморфизмы расслоения $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$, сохраняющие структурную форму, являются продолжениями локальных $\mathbb{A}$-диффеоморфизмов расслоения Вейля $T^{\mathbb{A}}M_n$.

5. Построено главное расслоение $\widehat{B}^r(M_n \times \mathbb{R}^m)$ реперов порядка r многообразия, зависящего от m параметров, ассоциированое с обобщенным расслоением Вейля. Определена структурная форма расслоения $\widehat{B}^r(M_n \times \mathbb{R}^m)$ и получены структурные уравнения. Выяснено строение локальных диффеоморфизмов расслоения $\widehat{B}^r(M_n \times \mathbb{R}^m)$, сохраняющих структурную форму.

6. Построен объект связности в расслоении $\widehat{B}^r(M_n \times \mathbb{R}^m)$ и получены уравнения горизонтального распределения индуцируемых связностей в ассоциированных обобщенных расслоениях Вейля.

Теоретическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут найти применение в исследованиях естественных расслоений и дифференциально-геометрических структур высшего порядка, а также в геометрии многообразий, несущих на себе структуру представления коммутативной ассоциативной унитальной алгебры.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

Международная конференция по геометрии и анализу, Пенза, 9 – 11 октября 2002 г.;

Международный семинар имени Н. И. Лобачевского «Современная геометрия и теория физических полей», Казань, 28 ноября – 1 декабря 2002 г.;

Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова «Колмогоров и современная математика», Москва, 16 – 21 июня 2003 г.;

9-ая Международная конференция по дифференциальной геометрии и ее приложениям, Прага, 30 августа – 3 сентября, 2004 г.;

Международная молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения», Казань, 28 ноября – 1 декабря 2001, 2002 гг.

Результаты работы регулярно докладывались на заседаниях Казанского городского геометрического семинара и итоговых научных конференциях Казанского университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав основного текста, включающих в себя 22 параграфа, и списка литературы, содержащего 87 работ. Диссертация изложена на 111 страницах машинописного текста. Нумерация предложений, теорем и формул в главах изолированная.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит обзор литературы по теме диссертации, обоснование актуальности выбранной темы и краткое содержание работы.

В **Главе 1** приведены необходимые определения из теории локальных алгебр Вейля и расслоений Вейля. В **§1.5** введена категория $\mathcal{M}f^m$ многообразий, зависящих от m параметров, и построен (обобщенный) функтор Вейля $\widehat{T}^{\mathbb{A}}\colon \mathcal{M}f^m \to \mathcal{M}f^m$, определяемый локальной алгеброй Вейля ширины m, действующий на многообразиях этой категории. Многообразием, зависящим от m параметров, называется тривиальное расслоение $p\colon M_n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ с преобразованиями координат вида $x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i, t^a)$, $t^{a'} = t^a$. Морфизмами в категории $\mathcal{M}f^m$ являются расслоенные отображения $M_n \times \mathbb{R}^m \to M'_k \times \mathbb{R}^m$ проектирующиеся в тождественные отображения $\mathrm{id} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Обобщенное расслоение Вейля $\pi\colon \widehat{T}^{\mathbb{A}}(M_n \times \mathbb{R}^m) \to M_n \times \mathbb{R}^m$ многообразия $p\colon M_n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ определяется как множество $\mathbb{A}$-струй ($\mathbb{A}$-скоростей) ростков сечений $s\colon (\mathbb{R}^m, t) \to (M_n \times \mathbb{R}^m, (x, t))$ расслоения p. Функтор Вейля $\widehat{T}^{\mathbb{A}}\colon \mathcal{M}f^m \to \mathcal{M}f^m$ является функтором, сохраняющим произведение.

В этом же параграфе построено главное расслоение $B(\mathbb{A})M_n \times \mathbb{R}^m$, присоединенное к расслоению $\widehat{T}^{\mathbb{A}}(M_n \times \mathbb{R}^m)$. Расслоение $B(\mathbb{A})M_n \times \mathbb{R}^m$ называется расслоением $\mathbb{A}$-аффинных реперов многообразия $M_n \times \mathbb{R}^m$. Показано, что структурной группой расслоения $B(\mathbb{A})M_n \times \mathbb{R}^m$ является $\mathbb{A}$-аффинная дифференциальная группа $D_n(\mathbb{A})$ [13].

Глава 2 посвящена изучению расслоенных функторов общего вида, сохраняющих произведение, на категориях многообразий, зависящих от параметров.

В **§2.1** введены категория $\mathcal{FM}^m$ расслоений над многообразиями из категории $\mathcal{M}f^m$ и подкатегория $\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^m$ в $\mathcal{M}f^m$, морфизмы которой не зависят от $t \in \mathbb{R}^m$. В этом же параграфе сформулировано определение расслоенного функтора $F\colon \mathcal{M}f^m \to \mathcal{FM}^m$ как ковариантного функтора, удовлетворяющего условиям продолжения и локальности (см. [15] в случае категории $\mathcal{M}f$), и изучена конструкция произведения на категориях $\mathcal{M}f^m$ и $\mathcal{FM}^m$.

В **§2.2** определено понятие m-параметрического семейства локальных алгебр Вейля и построен функтор $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}$, действующий из категории $\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^m$ в категорию $\mathcal{FM}^m$, названный m-параметрическим семейством функторов Вейля.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 2.1. *Для всякого расслоенного функтора* $F\colon \mathcal{M}f^m \to$

$\mathcal{FM}^m$, сохраняющего произведение, функтор $\overline{F}\colon \mathcal{M}f \times \mathbb{R}^m \to \mathcal{FM}^m$ естественно эквивалентен некоторому m-параметрическому семейству функторов Вейля $\widetilde{T}^{\mathbb{A}(t)}$.

В этом параграфе также построены некоторые примеры однопараметрических семейств локальных алгебр Вейля.

§2.3 посвящен выяснению строения расслоенных функторов $F\colon \mathcal{M}f^m \to \mathcal{FM}^m$, сохраняющих произведение, определенных на всей категории $\mathcal{M}f^m$. Итогом этого параграфа является следующая

Теорема 2.2. *Всякий расслоенный функтор $F\colon \mathcal{M}f^m \to \mathcal{FM}^m$, сохраняющий произведение, однозначно определяется m-параметрическим семейством алгебр Вейля $\mathbb{A}(t) \times \mathbb{R}^m$ и набором функций $\mathbb{R}^m \ni t \mapsto \mathring{S}^a(t) \in \mathring{\mathbb{A}}(t)$, $a = 1, \dots, m$, задающих сечение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{A}(t)^m \times \mathbb{R}^m$.*

В **§2.4** вводятся категории $\mathcal{M}f^m_{\mathrm{tr}}$ многообразий и $\mathcal{FM}^m_{\mathrm{tr}}$ расслоений, зависящих от параметров. Объекты и морфизмы этих категорий имеют более общий вид по сравнению с ранее изучавшимися категориями $\mathcal{M}f^m$ и $\mathcal{FM}^m$. Объекты категории $\mathcal{M}f^m_{\mathrm{tr}}$ представляют собой расслоения $p\colon M_n \times U \to U$, где U — область в $\mathbb{R}^m$, а морфизмами в $\mathcal{M}f^m_{\mathrm{tr}}$ являются расслоенные отображения $M_n \times U \to M'_k \times U'$, проектирующиеся в трансляции $\mathrm{tr}_{t_0} : U \ni t \mapsto t + t_0 \in U'$.

Аналогично случаю категории $\mathcal{M}f^m$ вводится подкатегория $(\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^m)_{\mathrm{tr}}$, морфизмами которой являются расслоенные отображения, не зависящие от $t \in \mathbb{R}^m$.

В **§2.5** получено описание расслоенных функторов $G\colon (\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^m)_{\mathrm{tr}} \to \mathcal{FM}^m_{\mathrm{tr}}$, сохраняющих произведение:

Теорема 2.3. *Расслоенный функтор $G\colon (\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^m)_{\mathrm{tr}} \to \mathcal{FM}^m_{\mathrm{tr}}$, сохраняющий произведение, естественно эквивалентен функтору $T^{\mathbb{A}}\colon (\mathcal{M}f \times \mathbb{R}^m)_{\mathrm{tr}} \to (\mathcal{FM} \times \mathbb{R}^m)_{\mathrm{tr}}$, определяемому некоторой алгеброй Вейля $\mathbb{A}$.*

В параграфах **2.6 и 2.7** выяснено строение произвольного расслоенного функтора $F\colon \mathcal{M}f^m_{\mathrm{tr}} \to \mathcal{FM}^m_{\mathrm{tr}}$, сохраняющего произведение. Доказана

Теорема 2.4. *Всякий расслоенный функтор $F\colon \mathcal{M}f^m_{\mathrm{tr}} \to \mathcal{FM}^m_{\mathrm{tr}}$, сохраняющий произведение, естественно эквивалентен обобщенному функ-*

тору Вейля $\widehat{T}^{\mathbb{A}}_{\sigma}\colon \mathcal{M}f^m_{\mathrm{tr}} \to \mathcal{FM}^m_{\mathrm{tr}}$, *определяемому некоторой алгеброй Вейля* $\mathbb{A}$ *и набором элементов* $\overset{\circ}{\sigma}{}^a \in \overset{\circ}{\mathbb{A}}$, $a = 1, \dots, m$.

В **§2.8** найдены условия, при которых два обобщенных функтора Вейля $\widehat{T}^{\mathbb{A}}_{\sigma}$ и $\widehat{T}^{\mathbb{A}'}_{\sigma'}$ естественно эквивалентны. Сечение $\sigma\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{A}^m$ определяется набором элементов $\{\overset{\circ}{\sigma}{}^1, \dots, \overset{\circ}{\sigma}{}^m\}$ максимального идеала $\overset{\circ}{\mathbb{A}}$ алгебры $\mathbb{A}$. Это сечение задает гомоморфизм локальных алгебр $\xi_\sigma\colon \mathbb{R}(m,q) \to \mathbb{A}$, относящий образующим $\{\nu^a,\ a = 1, \dots, m\}$ алгебры $\mathbb{R}(m,q)$ срезанных многочленов степени q от m переменных, соответственно, элементы $\overset{\circ}{\sigma}{}^a$. Образом гомоморфизма ξ_σ является подалгебра $\mathbb{B}_\sigma \subset \mathbb{A}$. Доказана следующая

Теорема 2.5. *Функторы* $\widehat{T}^{\mathbb{A}}_{\sigma}$ *и* $\widehat{T}^{\mathbb{A}'}_{\sigma'}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм* $\eta\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, *такой что* $\eta \circ \xi_\sigma = \xi_{\sigma'}$.

При этом справедливо

Предложение 2.4. *Множество всех естественных эквивалентностей* $\Phi\colon \widehat{T}^{\mathbb{A}}_{\sigma} \to \widehat{T}^{\mathbb{A}}_{\sigma}$ *находится в биективном соответствии с множеством* $\mathbb{B}$*-линейных автоморфизмов* $\eta\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

В **главе 3** изучается строение расслоения $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$ $\mathbb{A}$-гладких реперов порядка r расслоения Вейля $T^{\mathbb{A}}M_n$ гладкого многообразия M_n. $\mathbb{A}$-гладким r-репером в точке $X \in T^{\mathbb{A}}M_n$ называется r-струя ростка $\mathbb{A}$-диффеоморфизма $\Phi\colon (\mathbb{A}^n, 0) \to (T^{\mathbb{A}}M_n, X)$. Множество всех $\mathbb{A}$-гладких r-реперов $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$ образует $\mathbb{A}$-гладкое главное расслоение над $T^{\mathbb{A}}M_n$.

В **§3.1** изучается структурная группа Ли $G^r_n(\mathbb{A})$ расслоения $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$. Доказана

Теорема 3.1. i) *Группа Ли* $G^r_n(\mathbb{A})$ *изоморфна группе Ли* $\mathbb{A}$*-линейных автоморфизмов алгебры* $\mathbb{A} \otimes \mathbb{R}(n,r)$.
ii) *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}^r_n(\mathbb{A})$ *группы Ли* $G^r_n(\mathbb{A})$ *изоморфна алгебре Ли* $\mathbb{A}$*-линейных дифференцирований алгебры* $\mathbb{A} \otimes \mathbb{R}(n,r)$ *с операцией скобки* $[D_1, D_2] = D_2 \circ D_1 - D_1 \circ D_2$.

§3.2 посвящен построению $\mathbb{A} \otimes \mathbb{R}(n,r)$-модуля фундаментальных полувекторных полей (в смысле А.М.Васильева [2]) на расслоении $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$, представляющих собой сечения векторного расслоения $T^{r-1}B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n \to B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$, являющегося обратным образом касательного расслоения $TB^{r-1}(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n \to B^{r-1}(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$ относительно проекции $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n \to B^{r-1}(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$. Установлена связь полувекторных полей с $\mathbb{A}$-линейными дифференцированиями из алгебры $\mathbb{A}\otimes\mathbb{R}(n,r)$ в алгебру $\mathbb{A}\otimes\mathbb{R}(n,r-1)$.

В **§3.3** фундаментальные полувекторные поля используются для определения структурной формы Θ^r расслоения $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$ (следуя подходу Л.Е.Евтушика [6]) и изучения ее свойств.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 3.2. *Пусть $\overline{\Phi}\colon B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n \to B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M'_n$ — локальный диффеоморфизм, при котором структурная форма Θ^r расслоения $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$ переходит в структурную форму Θ'^r расслоения $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M'_n$. Тогда в окрестности всякой точки $\overline{X} \in B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$ $\overline{\Phi}$ совпадает с $\mathbb{A}\otimes\mathbb{R}(n,r)$-продолжением локального $\mathbb{A}$-диффеоморфизма $\Phi\colon T^{\mathbb{A}}M_n \to T^{\mathbb{A}}M'_n$.*

В **§3.4** получены структурные уравнения расслоения $\mathbb{A}$-гладких реперов $B^r(\mathbb{A})T^{\mathbb{A}}M_n$.

Глава 4 посвящена изучению геометрии высшего порядка на многообразиях, зависящих от параметров.

В **§4.1** построено и изучено главное расслоение $\widehat{B}^r(M_n\times U)$ реперов порядка r многообразия $M_n\times U$. Доказана

Теорема 4.1. i) *Группа Ли $\widehat{D}^r(n,m)$ изоморфна группе Ли $\mathbb{R}(m,r)$-линейных автоморфизмов алгебры $\mathbb{R}(n,r)\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathbb{R}(m,r)$.*

ii) *Алгебра Ли $\mathfrak{d}^r(n,m)$ группы Ли $\widehat{D}^r(n,m)$ изоморфна алгебре Ли $\mathbb{R}(m,r)$-линейных дифференцирований алгебры $\mathbb{R}(n,r)\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathbb{R}(m,r)$.*

В **§4.2** определена структурная форма $\widehat{\theta}^r$ расслоения $\widehat{B}^r(M_n\times\mathbb{R}^m)$ и изучены ее свойства.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 4.2. *Пусть $\Phi\colon \widehat{B}^r(M_n\times U) \to \widehat{B}^r(M'_n\times U')$ — локальный диффеоморфизм, при котором структурная форма $\widehat{\theta}^r$ расслоения $\widehat{B}^r(M_n\times U)$ переходит в структурную форму $\widehat{\theta}'^r$ расслоения $\widehat{B}^r(M'_n\times U')$. Тогда в окрестности всякой точки $\overline{X}\in\widehat{B}^r(M_n\times U)$ отображение Φ совпадает с $\mathbb{R}(n,r)\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathbb{R}(m,r)$-продолжением изоморфизма $(\varphi,\mathrm{tr}_{t_0})\colon M_n\times U \to M'_n\times U'$.*

В **§4.3** доказана

Теорема 4.3. *На расслоении $\widehat{B}^r(M_n \times U)$ имеют место следующие структурные уравнения:*

$$d\widetilde{\theta}^i = \theta^j \wedge \partial_j \circ \theta^i + \theta^a \wedge \partial_a \circ \theta^i, \quad d\widetilde{\theta}^a = 0.$$

где $\theta^r = \theta^j e_j^{(r-1)} + \theta^a e_a^{(r-1)}$ — разложение формы θ^r с использованием стандартного базиса в прямой сумме $T_e^{r-1}\widehat{B}^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \equiv \mathbb{R}(n+m, r-1)^n \oplus \mathbb{R}^m$ векторных пространств $\mathbb{R}(n+m, r-1)^n$ и $\mathbb{R}^m$, $\widetilde{\theta}^r = \pi_{r-2}^{r-1} \circ \theta^r$, а $\partial_j \colon \mathbb{R}(n+m, r) \to \mathbb{R}(n+m, r-1)$ и $\partial_a \colon \mathbb{R}(n+m, r) \to \mathbb{R}(n+m, r-1)$ — дифференцирования, определяемые условиями $\partial_j(\varepsilon^i) = \delta_j^i$, $\partial_j(\nu^b) = 0$, $\partial_a(\varepsilon^i) = 0$, $\partial_a(\nu^b) = \delta_b^a$.

В **§4.4** построен объект связности в главном расслоении $\widehat{B}^r(M_n \times U)$. Горизонтальное распределение связности в $\widehat{B}^r(M_n \times U)$ задается уравнениями

$$d\overset{\circ}{X}{}^i - \Gamma^i_{psj}(x^j, t^a)\overset{\circ}{X}{}^p \nu^s dx^j - \Gamma^i_{psa}(x^j, t^a)\overset{\circ}{X}{}^p \nu^s dt^a = 0,$$

где $\overset{\circ}{X}{}^i$ — координаты в слоях $\widehat{B}^r(M_n \times U)$, принимающие значение в максимальном идеале алгебры срезанных многочленов $\mathbb{R}(n+m, r)$.

При преобразовании координат на базе $x^{i'} = f^{i'}(x^i, t^a)$, $t^{a'} = t^a + t_0^a$ коэффициенты связности преобразуются следующим образом

$$\Gamma^{i'}_{uj'}(A_s^* \varepsilon^s)^u = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left(\frac{\partial A_p^{i'}}{\partial x^j} \varepsilon^p + A_p^{i'} \sum_{i=1}^n p_i \Gamma^i_{sj} \varepsilon^{p+s-i} \right),$$

$$\Gamma^{i'}_{ua'}(A_s^* \varepsilon^s)^u = \frac{\partial A_p^{i'}}{\partial t^a} \varepsilon^p - \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial t^a} \frac{\partial A_p^{i'}}{\partial x^j} \varepsilon^p + {} + A_p^{i'} \sum_{i=1}^n p_i \left(\Gamma^i_{sa} - \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial t^a} \Gamma^i_{sj} \right) \varepsilon^{p+s-i},$$

где функции $A_p^{i'}(x^i, t^a) \in \mathbb{R}(m, r)/\mathfrak{m}(\mathbb{R}(m, r))^{|p|}$ задаются соотношениями

$$A_p^{i'}(x^i, t^a)\varepsilon^p = \sum_{|p|+|s|=1}^r \frac{1}{p!s!} \frac{\partial^{|p|+|s|} f^{i'}}{\partial x^p \partial t^s} \nu^s \varepsilon^p,$$

а $(A_s^* \varepsilon^s)^u = A^u$ для $A^i = A_s^i \varepsilon^s$ и $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

В **§4.5** построена связность в обобщенном расслоении Вейля $\widehat{T}_\sigma^{\mathbb{A}}(M_n \times U)$, индуцируемая связностью в расслоении $\widehat{B}^r(M_n \times \mathbb{R}^m)$. Уравнения горизонтального распределения этой связности имеют вид:

$$d\overset{\circ}{X}{}^i - \Gamma^i_{psj}(x^j, t^a)\overset{\circ}{X}{}^p\overset{\circ}{\sigma}{}^s dx^j - \Gamma^i_{psa}(x^j, t^a)\overset{\circ}{X}{}^p\overset{\circ}{\sigma}{}^s dt^a = 0\,.$$

где $\overset{\circ}{X}{}^i$ — координаты в слоях расслоения $\widehat{T}^{\mathbb{A}}_{\sigma}(M_n \times U)$, принимающие значение в максимальном идеале алгебры $\mathbb{A}$.

В качестве примера рассмотрена аффинная (нелинейная) связность на многообразии $M_n \times U$, соответствующая случаю $m = r = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вагнер, В. В. Алгебраическая теория касательных пространств высших порядков. // Труды семин. по вект. и тенз. анализу. — вып.10. — МГУ, 1956. — С. 31–88.

[2] Васильев, А. М. Полувекторные поля на расслоениях. / А. М. Васильев // Итоги науки и техники. / ВИНИТИ — Т. 7: Проблемы геометрии. — М., 1975. — С. 23–26.

[3] Вишневский, В. В. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации. / В. В. Вишневский // Итоги науки и техн. / ВИНИТИ. — Т. 73: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — М., 2002. — С. 5–64. —

[4] Вишневский, В. В. Пространства над алгебрами. / В. В. Вишневский, А. П. Широков, В. В. Шурыгин. — Казань: изд-во Казанского университета, 1984. — 264 с.

[5] Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. / Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков // Итоги науки и техники. / ВИНИТИ — Т. 9: Проблемы геометрии. — М., 1979. — 247 с.

[6] Евтушик, Л. Е. Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы. / Л. Е. Евтушик // Труды геом. семин. / ВИНИТИ — Т. 2. — М., 1966. — С. 119–150.

[7] Кручкович, Г. И. Гиперкомплексные структуры на многообразиях, I. / Г. И. Кручкович // Труды семин. по вект. и тенз. анализу. — вып. 16. — М.: Изд-во МГУ, 1972. — С. 174–201.

[8] Лаптев, Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. / Г. Ф. Лаптев // Труды геом. семин. — Т. 1. — М.: Институт науч. инф. АН СССР, 1966. — С. 139–189.

[9] Султанов, А. Я. Продолжения тензорных полей и связностей на расслоения Вейля. / А. Я. Султанов // Известия вузов. Математика. — 1999. — № 9. — С. 81–90.

[10] Шапуков, Б. Н. Связности на дифференцируемых расслоениях. / Б. Н. Шапуков// Итоги науки и техники. / ВИНИТИ — Т. 15: Проблемы геометрии. — М., 1985. — С. 61–95.

[11] Широков, А. П. Замечание о структурах в касательных расслоениях. / А. П. Широков // Труды геометр. семин. / ВИНИТИ — Т. 5. — М., 1974. — С. 311–318.

[12] Широков, А. П. Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами. / А. П. Широков // Итоги науки и техники. / ВИНИТИ — Т. 12: Проблемы геометрии. — М., 1981. — С. 61–95.

[13] Шурыгин, В. В. Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля. / В. В. Шурыгин // Итоги науки и техн. / ВИНИТИ. — Т. 73: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — М., 2002. — С. 162–236.

[14] Ehresmann, C. Les prolongements d'une variété différentiable. i. calcul des jets, prolongement principal / C. Ehresmann // C. R. Acad. Sci. — 1951. — Vol. 233, no. 11. — Pp. 598–600.

[15] Kolář, I. Natural Operations in Differential Geometry. / I. Kolář, P. W. Michor, J. Slovák. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. — 434 pp.

[16] Kolář, I. On the fiber product preserving bundle functors. / I. Kolář,

W. M. Mikulski // Differ. Geom. and Appl. — 1999. — Vol. 11. — Pp. 105–115.

[17] Mikulski, W. M. Product preserving bundle functors on fibered manifolds. / W. M. Mikulski // Archiv. Math. — 1996. — Vol. 32. — Pp. 307–316.

[18] Molino, P. Théorie des G-structure: le problème d'equivalence. / P. Molino // Lecture Notes in Mathematics. — 1977. — Vol. 588.

[19] Weil, A. Théorie des points proches sur les variététes différentiables. / A. Weil // Colloque internat. centre nat. rech. sci. — Vol. 52. — Strasbourg: 1953. — Pp. 111–117.

[20] Yano, K. Tangent and cotangent bundles. / K. Yano, S. Ishihara — Marcel Dekker, N.Y., 1973.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Бушуева, Г. Н. Расслоения Вейля над многообразиями, зависящими от параметров. / Г. Н. Бушуева // Движения в обобщенных пространствах. Межвузовский сборник научных трудов. / Пензенск. гос. педагогич. ун-т. — Пенза, 2002. — С. 24–34.

[2] Бушуева, Г. Н. Связности высших порядков и поля геометрических объектов на многообразиях, зависящих от параметров. / Г. Н. Бушуева // Труды геометрического семинара. Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Казанск. гос. ун-т. — вып. 24. — Казань, 2003. — С. 31–43.

[3] Бушуева, Г. Н. Функторы Вейля и функторы, сохраняющие произведение, на категории многообразий, зависящих от параметров. / Г. Н. Бушуева // Известия ВУЗов. Математика. — 2005. — № 5 (516). — С. 14–21.

[4] Бушуева, Г. Н. Функторы типа Вейля на категории многообразий, зависящих от параметров. / Г. Н. Бушуева // Уч. зап-ки. / Казан. гос. ун-т. — Т. 147, кн. 1. — Казань: Изд-во КГУ, 2005. — С. 37–50.

[5] Bushueva, G. N. On the higher order geometry of Weil bundles over smooth manifolds and over parameter-dependent manifolds. / G. N. Bushueva, V. V. Shurygin // Lobachevskii J. of Math. — 2005. — Vol. 18. — Pp. 53–105.

[6] Бушуева, Г. Н. Функторы Вейля на категории многообразий, зависящих от параметров. / Г. Н. Бушуева // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. — Т. 12: Материалы международной молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения-2001», Казань, 28 ноября – 1 декабря 2001 г. — Казань: Изд-во «ДАС», 2001. — С. 24–25.

[7] Бушуева, Г. Н. Лифты обобщенных аффиных связностей на касательные расслоения в категории многообразий, зависящих от параметров. / Г. Н. Бушуева // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. — Т. 18: Материалы международной молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения-2002», Казань, 28 ноября – 1 декабря 2002 г.— Казань: Каз. мат. общ-во, 2002. — С. 12–13.