

На правах рукописи

БАРАНОВ Виталий Евгеньевич

ДИНАМИКА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИ
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ
В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Специальность 01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2005

Работа выполнена на кафедре математики и теоретической механики
Мордовского государственного университета имени Н. П. Огарева

- Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор С. И. Мартынов
- Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук, профессор А. Б. Мазо
- доктор физико-математических наук, профессор В. А. Налетова
- Ведущая организация — Ульяновский государственный технический университет

Защита состоится 29 декабря 2005 года в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д212.081.11 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан ноября 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент

А. А. Саченков

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию гидродинамического взаимодействия частиц в потоке вязкой жидкости и влиянию этого взаимодействия на динамику самих частиц. Как известно, в системе “жидкость+частицы” существуют два принципиально разных механизма взаимодействия частиц. Первый механизм связан с силами, непосредственно действующими на частицы. Примером таких сил могут служить силы, обусловленные наличием зарядов или дипольных моментов у частиц. Второй механизм связан с гидродинамическим взаимодействием частиц в жидкости. В диссертации исследуется влияние гидродинамического взаимодействия на динамику частиц в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса.

Актуальность темы исследования. Актуальность рассматриваемой в диссертации проблемы связана как с практикой создания новых материалов на основе вязкой жидкости, в которой частицы образуют определенную микроструктуру (например, коллоидные кристаллы), так и с теорией моделирования поведения таких сред. В последние годы интенсивно развиваются методы численного моделирования взаимодействия частиц в вязкой жидкости. Широко используются такие методы, как метод отражения, метод стоковой динамики, метод коллокаций, метод конечных элементов, метод ячеечного уравнения Больцмана. Общим недостатком этих методов является резкое возрастание вычислительных затрат с ростом числа частиц. Поэтому получение новых аналитических и конструирование эффективных численных схем в этой области по-прежнему остается актуальной задачей.

Цель и задачи исследования. Целью работы является разработка и программная реализация метода расчета гидродинамического взаимодействия конечного числа твердых сферических частиц при малых числах Рейнольдса, а также изучение процессов осаждения частиц в безграничной и ограниченной плоской стенкой жидкости.

Научная новизна.

- Разработан новый метод вычисления тензорных коэффициентов разложения решения задачи Стокса в случае обтекания конечного числа частиц.
- Показано, что удержание нескольких (5-6) первых членов этого разложения обеспечивает точность приближенного решения на уровне 1% в сравнении с известными частными решениями задачи.
- Решена задача об осаждении облака конечного числа частиц в безграничной жидкости. Показано, что скорость осаждения облака возрастает как с ростом числа частиц, так и с увеличением их концентрации.
- Разработан новый метод расчета гидродинамического взаимодействия конечного числа частиц с неподвижной плоской стенкой. Данный метод

сводит указанную задачу к задаче расчета взаимодействия частиц в неограниченной жидкости.

- Решены задачи об осаждении двух частиц вблизи вертикально и горизонтально расположенных плоских стенок. Показано, что наличие вертикальной стенки приводит к появлению поперечной составляющей скорости. При осаждении частиц на горизонтальную стенку в жидкости возникают вихревые структуры.
- Разработан программный комплекс, включающий в себя:
 - программу автоматической генерации и решения системы определяющих уравнений;
 - программу расчета полей скоростей и давлений в жидкости, гидродинамических сил и моментов, действующих на каждую частицу;
 - модуль визуализации движения частиц в потоке.

Достоверность полученных результатов. Достоверность результатов следует из того, что они основаны на общих законах и уравнениях механики жидкости и обеспечиваются строгими математическими выкладками, выводами и оценками, сопоставлением решений задач, полученных различными методами, совпадением в частных случаях количественных результатов с результатами работ других авторов.

Практическая ценность. Полученные в диссертационной работе результаты позволяют глубже понять механизм гидродинамического взаимодействия частиц и имеют широкий спектр применения на практике. В частности, разработанная модель может быть использована при расчете процессов коагуляции, сепарирования, седиментации в суспензиях, аэрозолях, коллоидных системах во внешних силовых полях различной природы.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Разработан и программно реализован алгоритм расчета динамики конечного числа частиц в безграничном потоке вязкой жидкости с учетом их гидродинамического взаимодействия.
- Получена зависимость средней скорости осаждения частиц в трехмерном облаке от их числа и концентрации.
- Разработан и программно реализован метод расчета взаимодействия потока, содержащего конечное число частиц, с плоской стенкой.
- Обнаружено, что при осаждении частиц вблизи стенки в жидкости возникают вихревые структуры, а частицы приобретают поперечную составляющую скорости.

Апробация результатов. Основные положения и результаты диссертационной работы обсуждались на Международной летней школе по гидродинамике больших скоростей (г. Чебоксары, 2002 г.; 2004 г.), международной школе по моделям механики сплошной среды (Казань, 2004 г.), на молодежной научной школе-конференции “Лобачевские чтения” (Казань, 2002–2003 гг.), на конференциях Средневолжского математического общества (Саранск, 2002–2004 гг.), на научных семинарах института математики и механики при Казанском университете (Казань, 2004–2005 гг.), на семинаре Института механики МГУ (Москва, 2003 г.).

Публикации. По теме работы опубликовано 12 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы. Общий объем диссертационной работы составляет 152 листа машинописного текста, содержит 74 рисунка, 15 таблиц и список литературы из 111 наименований.

Содержание работы

Во введении обсуждается актуальность рассматриваемой проблемы, сформулированы цель и задачи работы, проведен анализ работ, посвященных движению твердых частиц в потоке вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса, кратко излагается содержание работы.

В главе 1 рассматривается задача об одиночной сфере в потоке неограниченной вязкой жидкости, скорость которой на бесконечности представляется в виде полинома произвольной степени. Решение уравнений Стокса представляется в виде рядов по мультиполям. Рассмотрены частные случаи движения частицы в однородном, линейном, квадратичном и кубическом по координатам потоке вязкой жидкости. Для случая потока произвольной степени получены общие формулы для коэффициентов, входящих в мультипольные разложения для скорости и давления.

В пункте 1.1 дана постановка задачи. Пусть единичная твердая сферическая частица находится в неограниченной вязкой жидкости вязкости η . Радиус частицы R , в пространстве задана система координат, начало которой совпадает с центром частицы. Невозмущенный поток жидкости (т.е. поток, который был бы в отсутствии частицы) задан в виде функции $U_i(\vec{x})$.

Скорость $\vec{u}'(\vec{x})$ и давление $p'(\vec{x})$ возмущенного потока будем рассматривать в виде суммы скорости и давления невозмущенного потока и скорости и давления потока возмущения:

$$\begin{aligned}\vec{u}'(\vec{x}) &= \vec{U}(\vec{x}) + \vec{u}(\vec{x}), \\ p'(\vec{x}) &= P(\vec{x}) + p(\vec{x}).\end{aligned}$$

Уравнения для возмущения скорости $\vec{u}(\vec{x})$ и давления $p(\vec{x})$ в приближении Стокса имеют вид:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1)$$

$$\eta \nabla^2 \vec{u} = \nabla p. \quad (2)$$

Скорость невозмущенного потока задается в виде полинома :

$$U_i(\vec{x}) = U_i + U_{ij} x_j + U_{ijk} x_j x_k + U_{ijkl} x_j x_k x_l + \dots$$

На поверхности частицы и в бесконечности ставятся граничные условия:

$$u_i(\vec{x}) + U_i(\vec{x}) = V_i + \Gamma_{ij} x_j, \quad \text{когда } |\vec{x}| = R, \quad (3)$$

$$u_i(\vec{x}) \rightarrow 0, \quad p(\vec{x}) \rightarrow 0, \quad \text{когда } |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

где $\Gamma_{ij} = \varepsilon_{ikj} \omega_k$, $\vec{V}$ - линейная скорость частицы, $\vec{\omega}$ - угловая скорость частицы.

Требуется определить скорость и давление возмущенного потока, а также силу и момент, действующие на частицу со стороны жидкости.

В пункте 1.2 рассматриваются мультипольные разложения для возмущений скорости и давления :

$$p(\vec{x}) = H_i L_i(\vec{x}) + H_{ij} L_{ij}(\vec{x}) + H_{ijk} L_{ijk}(\vec{x}) + H_{ijkl} L_{ijkl}(\vec{x}) + \dots \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \eta u_i(\vec{x}) = & -\frac{2}{3} H_i L_0(\vec{x}) - \frac{1}{6} H_j L_{ij}(\vec{x}) \cdot |\vec{x}|^2 - \frac{3}{5} H_{ij} L_j(\vec{x}) - \\ & - \frac{1}{10} H_{jk} L_{ijk}(\vec{x}) \cdot |\vec{x}|^2 - \frac{4}{7} H_{ijk} L_{jk}(\vec{x}) - \frac{1}{14} H_{jkl} L_{ijkl}(\vec{x}) \cdot |\vec{x}|^2 - \\ & - \frac{5}{9} H_{ijkl} L_{jkl}(\vec{x}) - \frac{1}{18} H_{jklm} L_{ijklm}(\vec{x}) \cdot |\vec{x}|^2 - \dots \end{aligned} \quad (6)$$

где тензорные коэффициенты H_i , H_{ij} , H_{ijk} , H_{ijkl} , ... подлежат определению, а мультиполь $L_{ijk\dots s}(\vec{x})$ вычисляется по формуле:

$$L_{ijk\dots s}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \dots \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right),$$

В пунктах 1.3–1.4 рассмотрены случаи обтекания одиночной частицы однородным и линейным потоком. Из граничных условий на поверхности частицы найдены тензорные коэффициенты. Полученные решения задачи для возмущений скорости и давления в этих случаях совпадают с известными.

В пунктах 1.5–1.6 аналогичным образом рассмотрены случаи обтекания одиночной частицы квадратичным потоком и потоком третьей степени.

В пунктах 1.7–1.8 дано обобщение на случай, когда невозмущенный поток задан в виде произвольного полинома по координатам.

В главе 2 дается постановка задачи о гидродинамическом взаимодействии конечного числа частиц в вязкой жидкости. С использованием математического аппарата, развитого в главе 1, была разработана процедура, позволяющая записать решение задачи о гидродинамическом взаимодействии конечного числа частиц в форме, подобной случаю одиночной сферы. В результате получена система линейных уравнений, решение которой позволяет определить все неизвестные коэффициенты, входящие в разложения для скорости и давления, а также вычислить линейную и угловую скорость каждой частицы.

В пункте 2.1 дается постановка и решение задачи о движении двух частиц в неподвижной на бесконечности жидкости. Две твердые частицы A и B радиуса R помещены в жидкость вязкости η . На частицы действуют внешние силы $\vec{F}^A$ и $\vec{F}^B$, и внешние моменты $\vec{T}^A$ и $\vec{T}^B$. Требуется определить линейные скорости частиц.

Положение точки в жидкости относительно центров сфер A и B будем обозначать векторами $\vec{x}^A$ и $\vec{x}^B$ соответственно. Из геометрических соображений имеем соотношение $\vec{x}^B - \vec{x}^A = \vec{h}$, где $\vec{h}$ - вектор, соединяющий центры частиц. Граничные условия на поверхности частиц задаются в виде аналогичном (3).

По аналогии с выражениями (5) и (6), возмущения скорости и давления от двух частиц ищем в виде:

$$p(\vec{x}) = H_i^A L_i(\vec{x}^A) + H_{ij}^A L_{ij}(\vec{x}^A) + H_{ijk}^A L_{ijk}(\vec{x}^A) + H_{ijkl}^A L_{ijkl}(\vec{x}^A) + \\ + H_i^B L_i(\vec{x}^B) + H_{ij}^B L_{ij}(\vec{x}^B) + H_{ijk}^B L_{ijk}(\vec{x}^B) + H_{ijkl}^B L_{ijkl}(\vec{x}^B) + \dots \quad (7)$$

$$\eta u_i(\vec{x}) = -\frac{2}{3} H_i^A L_0(\vec{x}^A) - \frac{1}{6} H_j^A L_{ij}(\vec{x}^A) \cdot |\vec{x}^A|^2 - \frac{3}{5} H_{ij}^A L_j(\vec{x}^A) - \\ - \frac{1}{10} H_{jk}^A L_{ijk}(\vec{x}^A) \cdot |\vec{x}^A|^2 - \frac{4}{7} H_{ijk}^A L_{jk}(\vec{x}^A) - \frac{1}{14} H_{jkl}^A L_{ijkl}(\vec{x}^A) \cdot |\vec{x}^A|^2 - \\ - \frac{5}{9} H_{ijkl}^A L_{jkl}(\vec{x}^A) - \frac{1}{18} H_{jklm}^A L_{ijklm}(\vec{x}^A) \cdot |\vec{x}^A|^2 - \\ - \frac{2}{3} H_i^B L_0(\vec{x}^B) - \frac{1}{6} H_j^B L_{ij}(\vec{x}^B) \cdot |\vec{x}^B|^2 - \frac{3}{5} H_{ij}^B L_j(\vec{x}^B) - \\ - \frac{1}{10} H_{jk}^B L_{ijk}(\vec{x}^B) \cdot |\vec{x}^B|^2 - \frac{4}{7} H_{ijk}^B L_{jk}(\vec{x}^B) - \frac{1}{14} H_{jkl}^B L_{ijkl}(\vec{x}^B) \cdot |\vec{x}^B|^2 - \\ - \frac{5}{9} H_{ijkl}^B L_{jkl}(\vec{x}^B) - \frac{1}{18} H_{jklm}^B L_{ijklm}(\vec{x}^B) \cdot |\vec{x}^B|^2 - \dots \quad (8)$$

Вычисляя силы и моменты, действующие на частицу A со стороны жидкости $F_i^{A(hyd)} = 4\pi H_i^A$, $T_i^{A(hyd)} = \frac{12}{5}\pi \varepsilon_{ijk} H_{jk}^A$ и пренебрегая инерцией

частицы A , получим

$$4\pi H_i^A + F_i^A = 0, \quad \frac{12}{5}\pi \varepsilon_{ijk} H_{jk}^A + T_i^A = 0. \quad (9)$$

Рассматривая граничное условие на поверхности частицы A , замечено, что для всех точек этой поверхности верно неравенство $|\vec{x}^A| < |\vec{h}|$, при выполнении которого реализуется разложение в ряд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x}^B|} &= L_0(\vec{x}^B) = L_0(\vec{h} + \vec{x}^A) = L_0(\vec{h}) + \frac{1}{1!} L_i(\vec{h}) x_i^A + \frac{1}{2!} L_{ij}(\vec{h}) x_i^A x_j^A + \\ &+ \frac{1}{3!} L_{ijk}(\vec{h}) x_i^A x_j^A x_k^A + \frac{1}{4!} L_{ijkl}(\vec{h}) x_i^A x_j^A x_k^A x_l^A + \dots \end{aligned}$$

Выбирая первые два члена этого разложения, получим приближенное равенство

$$\frac{1}{|\vec{x}^B|} \approx L_0(\vec{h}) + L_s(\vec{h}) x_s^A. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8) и обозначая

$$\begin{aligned} D_i^A &= \frac{1}{\eta} \left[-\frac{2}{3} H_i^B L_0(\vec{h}) - \frac{1}{6} H_j^B L_{ij}(\vec{h}) \cdot |\vec{h}|^2 - \frac{3}{5} H_{ij}^B L_j(\vec{h}) - \right. \\ &- \frac{1}{10} H_{jk}^B L_{ijk}(\vec{h}) \cdot |\vec{h}|^2 - \frac{4}{7} H_{ijk}^B L_{jk}(\vec{h}) - \frac{1}{14} H_{jkl}^B L_{ijkl}(\vec{h}) \cdot |\vec{h}|^2 - \\ &\left. - \frac{5}{9} H_{ijkl}^B L_{jkl}(\vec{h}) - \frac{1}{18} H_{jklm}^B L_{ijklm}(\vec{h}) \cdot |\vec{h}|^2 \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} D_{is}^A &= \frac{1}{\eta} \left[-\frac{2}{3} H_i^B L_s(\vec{h}) - \frac{1}{6} H_j^B \left[2h_s L_{ij}(\vec{h}) + L_{ijs}(\vec{h}) \cdot |\vec{h}|^2 \right] - \right. \\ &- \frac{3}{5} H_{ij}^B L_{js}(\vec{h}) - \frac{1}{10} H_{jk}^B \left[2h_s L_{ijk}(\vec{h}) + L_{ijks}(\vec{h}) \cdot |\vec{h}|^2 \right] - \\ &- \frac{4}{7} H_{ijk}^B L_{jks}(\vec{h}) - \frac{1}{14} H_{jkl}^B \left[2h_s L_{ijkl}(\vec{h}) + L_{ijkl s}(\vec{h}) \cdot |\vec{h}|^2 \right] - \\ &\left. - \frac{5}{9} H_{ijkl}^B L_{jkl s}(\vec{h}) - \frac{1}{18} H_{jklm}^B \left[2h_s L_{ijklm}(\vec{h}) + L_{ijklms}(\vec{h}) \cdot |\vec{h}|^2 \right] \right], \end{aligned} \quad (12)$$

получим граничное условие на поверхности частицы в виде:

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{3} H_i^A L_0(\vec{x}^A) - \frac{1}{6} H_j^A L_{ij}(\vec{x}^A) \cdot |\vec{x}^A|^2 - \frac{3}{5} H_{ij}^A L_j(\vec{x}^A) - \\ &-\frac{1}{10} H_{jk}^A L_{ijk}(\vec{x}^A) \cdot |\vec{x}^A|^2 - \frac{4}{7} H_{ijk}^A L_{jk}(\vec{x}^A) - \frac{1}{14} H_{jkl}^A L_{ijkl}(\vec{x}^A) \cdot |\vec{x}^A|^2 - \\ &-\frac{5}{9} H_{ijkl}^A L_{jkl}(\vec{x}^A) - \frac{1}{18} H_{jklm}^A L_{ijklm}(\vec{x}^A) \cdot |\vec{x}^A|^2 = \\ &= -\eta D_i^A - \eta D_{is}^A x_s^A + \eta V_i + \eta \Gamma_{ij} x_j^A, \quad \text{когда } |\vec{x}^A| = R. \end{aligned}$$

Граничное условие, записанное в такой форме, очень похоже на граничное условие, которое получится, если рассматривать движение одиночной частицы A в потоке, скорость которого на бесконечности задана формулой $D_i + D_{is}x_s^A$. Используя решение для одиночной частицы, можно выразить тензоры H_i^A , H_{ij}^A , H_{ijk}^A и H_{ijkl}^A через тензоры D_i^A и D_{is}^A

$$H_i^A = \frac{3R}{2} \eta (D_i^A - V_i^A), \quad (13)$$

$$H_{ij}^A = -\frac{5R^3}{3} \eta (D_{ij}^A - \Gamma_{ij}^A), \quad (14)$$

$$H_{ijk}^A = -\frac{7R^3}{32} \eta ([D_j^A - V_j^A] \delta_{ik} + [D_k^A - V_k^A] \delta_{ij}), \quad (15)$$

$$H_{ijkl}^A = \frac{R^5}{20} \eta (D_{jk}^A \delta_{il} + D_{jl}^A \delta_{ik} + D_{kj}^A \delta_{il} + D_{kl}^A \delta_{ij} + D_{lj}^A \delta_{ik} + D_{lk}^A \delta_{ij}). \quad (16)$$

Уравнения (9), (11) – (16) были получены при рассмотрении граничного условия на поверхности частицы A . Если добавить к ним уравнения, которые получаются при аналогичном рассмотрении граничного условия на поверхности частицы B , то получится замкнутая система уравнений. Эта система уравнений при известных $\vec{h}$, $\vec{F}^A$, $\vec{F}^B$, $\vec{T}^A$, $\vec{T}^B$ единственным образом определяет значения всех неизвестных: $\vec{V}^A$, $\vec{V}^B$, $\vec{\omega}^A$, $\vec{\omega}^B$, D_i^A , D_{is}^A , H_i^A , H_{ij}^A , H_{ijk}^A , H_{ijkl}^A , D_i^B , D_{is}^B , H_i^B , H_{ij}^B , H_{ijk}^B , H_{ijkl}^B . Таким образом по заданным силам и моментам, действующим на частицы, можно найти скорости частиц и возмущения скорости и давления в каждой точке жидкости.

В пункте 2.2 приводится обобщение приведенной процедуры на случай произвольного числа частиц и произвольной точности приближения граничных условий на поверхности частиц.

В пункте 2.3 разработанный метод моделирования взаимодействия конечного числа частиц тестируется на задачах, решение которых получено другими методами.

Первая из таких задач - известная [1,2] задача о движении двух сферических частиц вдоль линии центров. В диссертации вычисляются коэффициенты сопротивления, найденные для этой задачи при различных e ($e = R/h$ - отношение радиуса частицы к расстоянию между центрами частиц) и различными методами. Отклонение результатов предложенного в диссертации метода от точных значений [1] при любых e не превышает 0.025%.

Вторая задача связана с моделированием движения двух частиц под действием силы, перпендикулярной линии центров. Сравнение результатов с расчетами по методу отражения показало, что при $e < 0.4$ различие в значениях коэффициента сопротивления не превышает 1%.

Третья тестовая задача состояла в определении мгновенной скорости осаждения нечетного числа одинаковых частиц, расположенных вдоль гори-

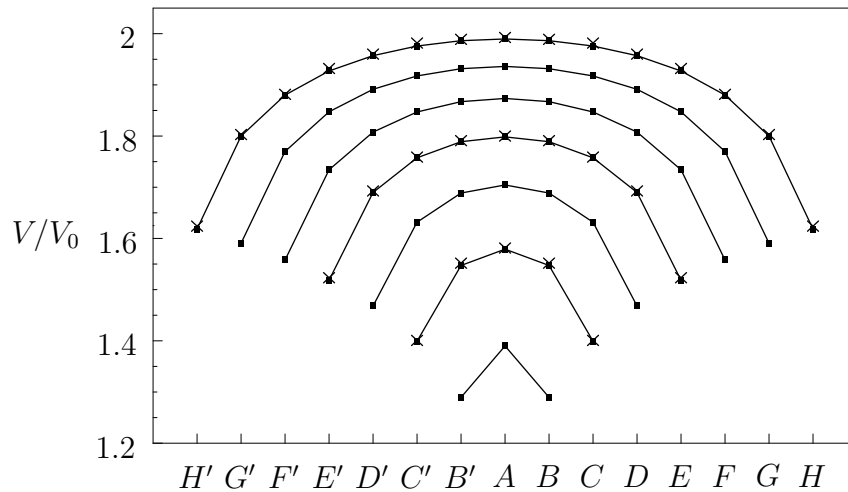


Рис. 1. Скорости нечетного числа частиц с центрами на одной прямой, движущихся под действием силы, перпендикулярной этой прямой. Точки - результат данной работы, крестики - результаты [3, 4].

горизонтальной прямой с расстояниями a между центрами. На рис. 1 отображены скорости частиц для $a/R = 4$, число частиц от 3 до 15. Частицы обозначены буквами: A - центральная частица, B и B' - ближайшие к ней (их центры находятся на расстоянии $a = 4R$ от центра частицы A), C и C' - следующие две частицы (их центры находятся на расстоянии $a = 4R$ от центров частиц B и B' , соответственно), и так далее. Таким образом, конфигурация из трех частиц состоит из частиц B' , A и B ; конфигурация из семи частиц состоит из частиц D' , C' , B' , A , B , C , D (их центры лежат на одной прямой в этом порядке). Через V_0 обозначена скорость одиночной частицы, найденная по закону Стокса, через V - скорость одной из частиц $H', \dots, A, \dots, H$. Ломаная линия соединяет точки, соответствующие частицам одной конфигурации.

Наконец, рассматривался случай осаждения двух частиц одинакового размера, но разной плотности [5]. Более плотная частица изначально располагалась над менее плотной. Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментом до момента контакта частиц.

Помимо тестов в п. 2.3 изучалось также несколько случаев динамики трех и четырех частиц в зависимости от их начального положения. В частности, для четырех одинаковых частиц, расположенных первоначально в углах вертикально ориентированного квадрата, получено решение, согласно которому относительное движение частиц периодически по времени.

В пункте 2.4 рассмотрено движение трех частиц, на которые наложены связи, оставляющие расстояние между соседними частицами постоянным и не мешающие вращательному движению частиц (цепочка частиц). Получено, что в случае, когда частицы расположены вдоль прямой, перпендикулярной направлению действия внешней силы, имеется предельная конфигурация, при котором крайние частицы сближаются. Для частиц, расположенных

вдоль прямой под углом к силе тяжести, наблюдается процесс циклического сворачивания - разворачивания цепочки.

В пункте 2.5 разработанный метод использовался для моделирования динамики большого числа взаимодействующих частиц (облако). Рассматривалось осаждение трехмерного облака, состоящего из 110 частиц под действием силы тяжести. Получена зависимость средней скорости $\langle v \rangle$ осаждения от числа частиц и их концентрации в облаке.

Графики зависимостей $\langle v \rangle$ от концентрации при 30 и 100 частицах построены на рис. 2. Графики зависимости $\langle v \rangle$ при изменении числа частиц и постоянной концентрации 0.1, 0.05 и 0.025 построены на рис. 3.

Рис. 2 и 3 показывают, что средняя скорость осаждения облака увеличивается как с ростом числа частиц так и с ростом концентрации. В диссер-

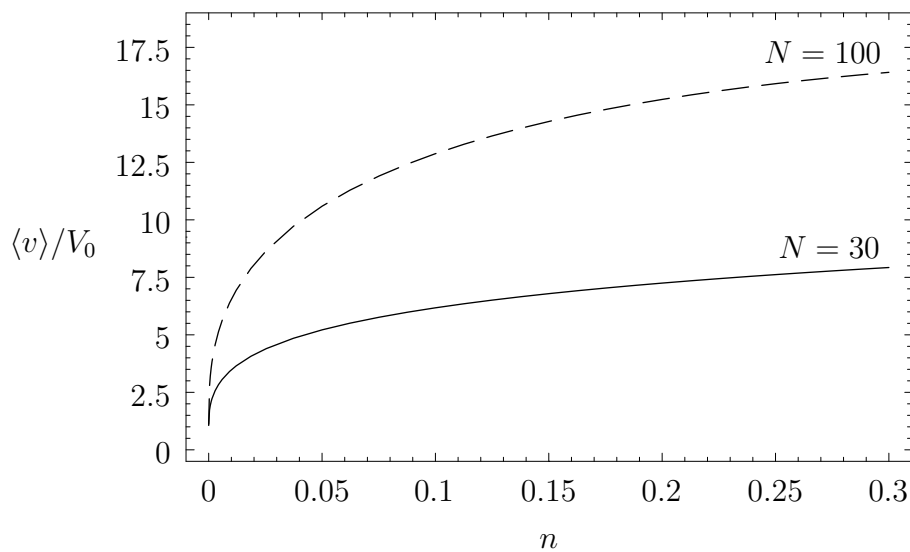


Рис. 2. Зависимость средней скорости осаждения облака от концентрации при постоянном числе частиц.

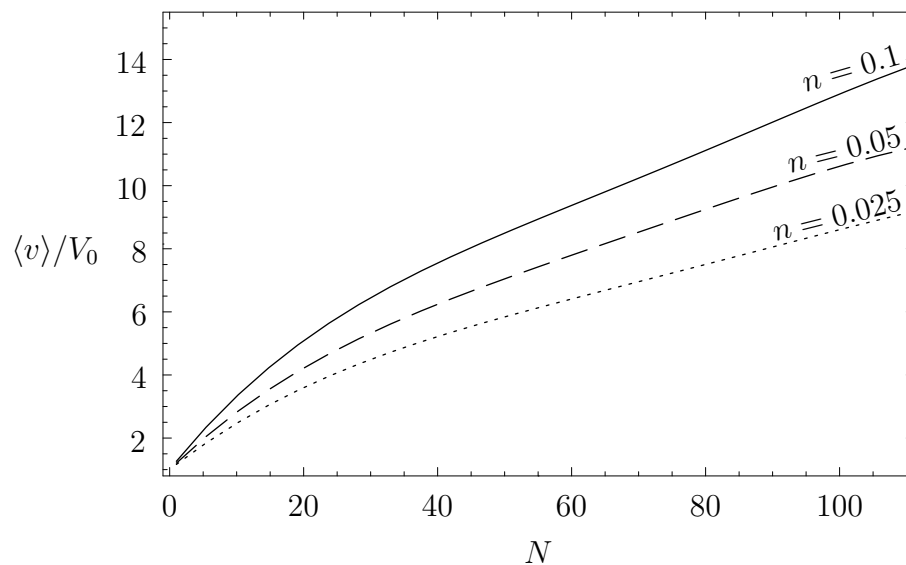


Рис. 3. Зависимость средней скорости осаждения облака от числа частиц при постоянной концентрации.

тации было найдено распределение частиц по скоростям в облаке. Выяснено общее правило: модуль линейной скорости больше у частиц, находящихся ближе к центру облака, и меньше у частиц, находящихся ближе к краю облака.

В главе 3 рассматривается гидродинамическое взаимодействие твердых сферических частиц при наличии плоской поверхности.

В пункте 3.1 дается постановка задачи и форма решения задачи о движении одной частицы A радиуса R в жидкости с вязкостью η и ограниченной плоскостью γ . Проекция центра частицы A на плоскость γ обозначается точкой M . Вектор с началом в точке M и концом в центре частицы A обозначается буквой $\vec{h}$; таким образом, модуль вектора $\vec{h}$ равен расстоянию от центра частицы A до плоскости γ . Положение точки жидкости относительно центра сферы A обозначается вектором $\vec{x}$.

Так же, как в первой и второй главах предполагается, что движение жидкости описывается уравнениями непрерывности (1) и Стокса (2). На поверхности частицы и бесконечности граничные условия имеют вид (3), (4). На стенке имеется граничное условие:

$$u_i = 0, \text{ когда } (\vec{x} + \vec{h}) \perp \vec{h}. \quad (17)$$

Для получения решения задачи вводится дополнительная фиктивная частица B , симметричная A относительно плоскости (рис. 4), и затем используется форма записи решения, как в задаче о двух частицах. Обозначая через $\vec{y}$ положение точки жидкости относительно центра фиктивной частицы B , получаем, что $\vec{y} = \vec{x} + 2\vec{h}$. Кроме того, для точек на плоскости выполняются

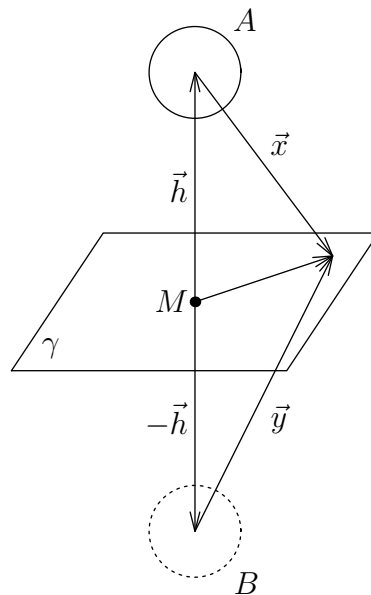


Рис. 4. Фиктивная частица служит для представления взаимодействия частицы с плоской стенкой.

следующие равенства:

$$\begin{aligned} y_i &= x_i + 2h_i, \quad |\vec{x}| = |\vec{y}|, \\ (\vec{x} + \vec{h}) &\perp \vec{h}, \quad (\vec{y} - \vec{h}) \perp \vec{h}, \\ x_i h_i &= -|\vec{h}|^2, \quad y_i h_i = |\vec{h}|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение для возмущений давления и скорости ищется в виде:

$$\begin{aligned} p(\vec{x}) &= H_i L_i(\vec{x}) + H_{ij} L_{ij}(\vec{x}) + H_{ijk} L_{ijk}(\vec{x}) + \dots + \\ &+ G_i L_i(\vec{y}) + G_{ij} L_{ij}(\vec{y}) + G_{ijk} L_{ijk}(\vec{y}) + \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \eta u_i &= -\frac{2}{3} H_i L_0(\vec{x}) - \frac{1}{6} H_j L_{ij}(\vec{x}) \cdot |\vec{x}|^2 - \frac{3}{5} H_{ij} L_j(\vec{x}) - \\ &- \frac{1}{10} H_{jk} L_{ijk}(\vec{x}) \cdot |\vec{x}|^2 - \frac{4}{7} H_{ijk} L_{jk}(\vec{x}) - \frac{1}{14} H_{jkl} L_{ijkl}(\vec{x}) \cdot |\vec{x}|^2 - \dots - \\ &- \frac{2}{3} G_i L_0(\vec{y}) - \frac{1}{6} G_j L_{ij}(\vec{y}) \cdot |\vec{y}|^2 - \frac{3}{5} G_{ij} L_j(\vec{y}) - \\ &- \frac{1}{10} G_{jk} L_{ijk}(\vec{y}) \cdot |\vec{y}|^2 - \frac{4}{7} G_{ijk} L_{jk}(\vec{y}) - \frac{1}{14} G_{jkl} L_{ijkl}(\vec{y}) \cdot |\vec{y}|^2 - \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Форма записи решения такая же, как если бы вместо частицы A и стенки было две частицы A и B . Имеется принципиальное отличие от случая взаимодействия двух частиц. Хотя форма записи выражений для давления (19) и скорости (20) такая же, как если бы описывалось взаимодействие двух частиц A и B , однако граничные условия по-прежнему рассматриваются на частице A и стенке γ , а не на частице A и частице B .

В пункте 3.2 описана процедура, позволяющая подобрать для каждого из коэффициентов $H_i, H_{ij}, H_{ijk}, \dots$ несколько коэффициентов $G_i, G_{ij}, G_{ijk}, \dots$, так, чтобы граничное условие на плоской поверхности выполнялось тождественно. Для H_i эта процедура выглядит так.

Беря всевозможные комбинации тензоров H_i, h_i (линейно по H_i), можно записать выражения для тензоров G_i, G_{ij}, G_{ijk} :

$$G_i = g_1 H_i + g_2 H_\alpha h_\alpha h_i / |\vec{h}|^2, \quad (21)$$

$$G_{ij} = g_3 H_i h_j + g_4 H_j h_i + g_5 H_\alpha h_\alpha \delta_{ij} + g_6 H_\alpha h_\alpha h_i h_j / |\vec{h}|^2, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} G_{ijk} &= g_7 H_i h_j h_k + g_8 (H_j h_i h_k + H_k h_i h_j) + g_9 H_i \delta_{jk} |\vec{h}|^2 + \\ &+ g_{10} (H_j \delta_{ik} + H_k \delta_{ij}) |\vec{h}|^2 + g_{11} H_\alpha h_\alpha h_i \delta_{jk} + \\ &+ g_{12} H_\alpha h_\alpha (h_j \delta_{ik} + h_k \delta_{ij}) + g_{13} H_\alpha h_\alpha h_i h_j h_k / |\vec{h}|^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}$ есть неизвестные числовые коэффициенты.

Подставляя (21) – (23) в выражение для скорости (20) и приводя подобные с учетом (18), получим значения числовых коэффициентов:

$$g_1 = -1, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{2}{3}, \quad g_4 = -\frac{8}{3}, \quad g_5 = -\frac{2}{3}, \quad g_6 = 4, \\ g_7 = 0, \quad g_8 = 0, \quad g_{10} = -\frac{7}{8}, \quad g_{12} = \frac{7}{4}, \quad g_{13} = 0.$$

Таким образом, можно записать выражения для тензорных коэффициентов фиктивной частицы, которые позволяют точно удовлетворить граничное условие на плоскости. Тензорные коэффициенты для реальной частицы определяются из граничного условия на ее поверхности.

При изучении движения нескольких частиц вблизи плоской стенки для каждой частицы добавляется симметричная ей фиктивная таким образом, чтобы выполнялись граничные условия на плоскости. В результате такого добавления получается облако взаимодействующих частиц. Метод решения таких задач развит в главе 2.

В пункте 3.3 было проведено тестирование предложенного метода моделирования взаимодействия частиц с плоской стенкой и сравнение с другими известными методами [6]. В работе приведены результаты численного моделирования взаимодействия со стенкой одной и двух частиц. Были построены поля скоростей и линии тока для различных случаев осаждения частиц вблизи плоской стенки. Линии тока для одной частицы, осаждающейся на стенку, изображены на рис. 5. Линии тока при осаждении на плоскость приняли вид замкнутых кривых, что соответствует образованию замкнутой вихревой нити вокруг частицы, расположенной в плоскости, перпендикулярной скорости осаждения частицы.

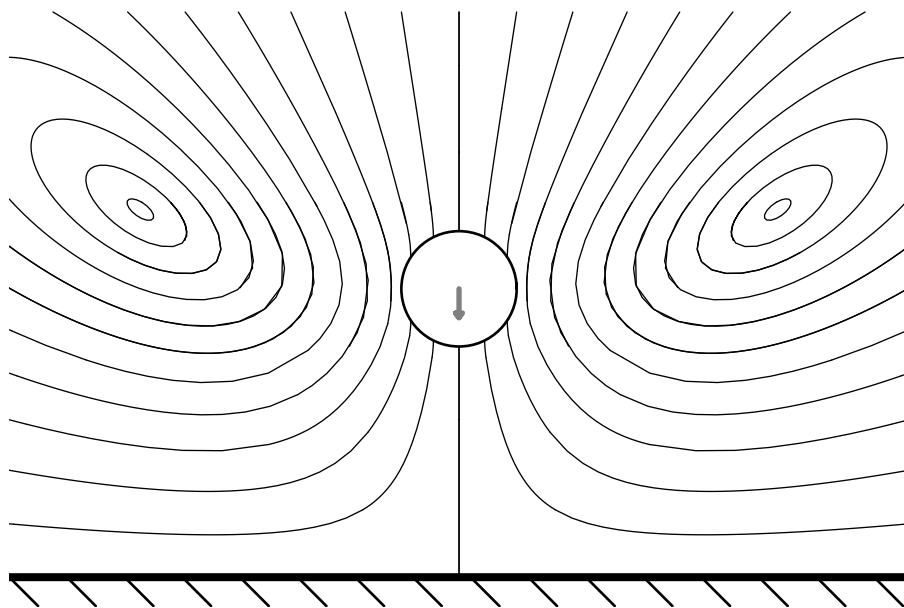


Рис. 5. Линии тока для одной частицы, движущейся под действием внешней силы вблизи плоской стенки. Направление силы - перпендикулярно стенке, расстояние от центра частицы до стенки - пять радиусов. Стрелкой показана скорость самой частицы.

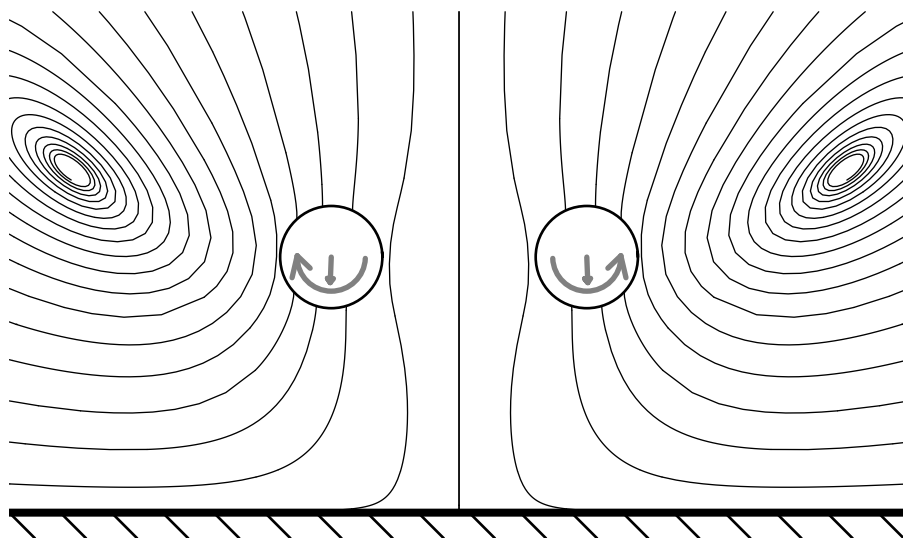


Рис. 6. Линии тока для двух частиц, осаждающихся на плоскую стенку. Расстояние между центрами частиц - пять радиусов, от центров частиц до стенки - пять радиусов. Стрелками показаны скорости частиц.

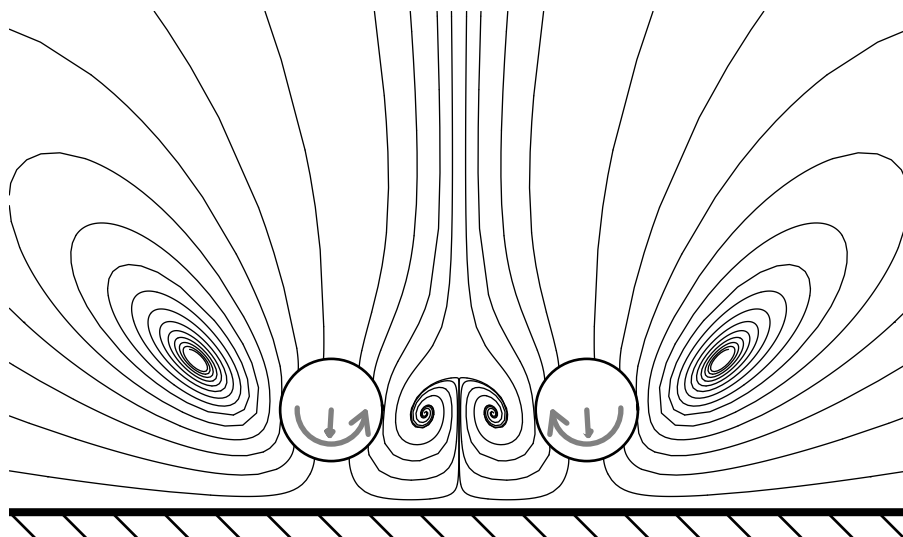


Рис. 7. Линии тока для двух частиц, осаждающихся на плоскую стенку. Расстояние между центрами частиц - пять радиусов, от центров частиц до стенки - два радиуса. Стрелками показаны скорости частиц.

Также было рассмотрено движение двух частиц вблизи плоской поверхности. При осаждении на плоскую стенку двух сферических частиц, вокруг них также образуется замкнутая вихревая нить (рис. 6). Однако при приближении к стенке картина усложняется (рис. 7). В области между частицами образуется новое вихревое поле, имеющее грибовидную форму. Это приводит к тому, что направление вращения частиц при приближении к плоской стенке меняется на противоположное, что ранее не было известно.

Исследовалось также движение двух частиц параллельно плоской стенке. В этом случае появляется поперечная составляющая скорости, направленная перпендикулярно действующей внешней силе. Эта поперечная составляющая приводит к отдалению частиц от стенки. В диссертации такое поведение частиц объясняется гидродинамическим взаимодействием с плоскостью.

Основные результаты

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- разработан метод и его программная реализация для численного расчета динамики конечного числа частиц в потоке вязкой жидкости с учетом их гидродинамического взаимодействия;
- полученные с помощью метода результаты для частных случаев движения одной, двух, трех, четырех и нечетного числа частиц, расположенных на прямой, хорошо согласуются с известными результатами, полученными другими методами;
- рассчитана скорость осаждения для различных конфигураций случайно расположенных частиц, образующих облако из 1-110 частиц;
- получена зависимость средней скорости осаждения частиц от их числа и концентрации в облаке; показано, что скорость осаждения увеличивается с ростом числа частиц, причем во всех случаях наибольшая скорость наблюдается у частицы, находящейся внутри облака;
- разработан метод и его программная реализация для численного расчета динамики конечного числа частиц в потоке вязкой жидкости при наличии твердой плоской поверхности; метод сводит задачу о взаимодействии частицы со стенкой к задаче о взаимодействии двух частиц;
- показано, что наличие стенки качественно меняет динамику частиц по сравнению со случаем безграничной жидкости, в частности наличие стенки приводит к появлению вихревых течений и поперечных перемещений, что не наблюдалось при осаждении частиц в безграничной жидкости.

Следует отметить финансовую помощь Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №01-01-00435, №04-01-00607), позволившую ускорить выполнение работы и написание диссертации.

Список цитируемой литературы

1. *Stimson M.* The motion of two spheres in a viscous fluid / M. Stimson, G. B. Jeffrey // Proc. Roy. Soc. – 1926. – Ser. A. – V. 111. – P. 110-116.
2. *Ханпель Дж.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Ханпель, Г. Бреннер; перевод с англ. В. С. Бермана и В. Г. Маркова; под ред. Ю. А. Бувевича. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
3. *Durlofsky L.* Dynamic simulation of hydrodynamically interacting particles / L. Durlofsky, J. F. Brady, G. Bossis // J. Fluid. Mech. – 1987. – V. 180, – P. 21-49.
4. *Ganatos P.* A numerical solution technique for three-dimensional Stokes flows, with application to the motion of strongly interacting spheres in a plane / P. Ganatos, R. Pfeffer, S. Weinbaum // J. Fluid Mech. – 1978. – V. 84. P. 79-111.
5. *Zhao Y.* Interaction of two touching spheres in a viscous fluid / Y. Zhao, R. H. Davis // Chem. Eng. Sci. – 2002. – V. 57. – P. 1997-2006.
6. *Brenner H.* The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface // Chem. Eng. Sci. – 1961. – V. 16. – P. 242-251.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. *Баранов В. Е.* Общее решение уравнений Стокса для движения твердой сферической частицы в произвольном потоке вязкой жидкости / В. Е. Баранов, С. И. Мартынов // Труды Средневолжского мат. общ-ва. – 2003. – Т. 5. – № 1. – С. 280-292.
2. *Баранов В. Е.* Осаждение цепочки частиц в вязкой жидкости // Мат. межд. молод. науч. школы-конф. “Лобачевские чтения – 2002”. – Казань: изд-во Казанского мат. об-ва, 2002. – С. 8-9.
3. *Baranov V. E.* Sedimentation of a large number of particles in viscous fluid / V. E. Baranov, I. P. Boriskina, S. I. Martynov // Int. summer sci. school "High Speed Hydrodynamics – 2002". – Cheboksary, 2002. – P. 425-428.
4. *Баранов В. Е.* Осаждение большого числа частиц в вязкой жидкости / В. Е. Баранов, И. П. Борискина, С. И. Мартынов // Тез. докл. Межд. летней науч. школы “Гидродинамика больших скоростей – 2002”. – Чебоксары, 2002. – С. 34-35.

5. Баранов В. Е. Осаждение конечного числа твердых сферических частиц в вязкой жидкости. / В. Е. Баранов, С. И. Мартынов // Труды Средне-волжского мат. общ-ва, 2002. – Т. 5. – № 1. – С. 300-309.
6. Баранов В. Е. Изменение формы осаждающихся структур под влиянием гидродинамического взаимодействия // Мат. всероссийской молод. науч. школы-конф. “Лобачевские чтения – 2003”. – Казань: изд-во Казанского мат. общ-ва, 2003. – С. 73-74.
7. Баранов В. Е. Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости / В. Е. Баранов, С. И. Мартынов // Изв. РАН. МЖГ. – 2004. – № 1. – С. 152-164.
8. Баранов В. Е. Осаждение облака случайно расположенных частиц // Мат. науч. конф. “Огаревские чтения – 2003”. – Саранск: изд-во Мордов. ун-та, 2003. – С. 182-183.
9. Баранов В. Е. Движение твердой частицы в вязкой жидкости вблизи плоской поверхности / В. Е. Баранов, С. И. Мартынов // Мат. XVII сессии межд. школы по моделям механики сплошной среды. – Казань: изд-во Казанского мат. об-ва, 2004. – С. 42-46.
10. Baranov V. E. Sedimentation of particles on the plane / V. E. Baranov, S. I. Martynov // Int. summer sci. school “High Speed Hydrodynamics – 2004”. – Cheboksary, 2004. – P. 297-300.
11. Баранов В. Е. Осаждение на плоскость частиц в вязкой жидкости / В. Е. Баранов, С. И. Мартынов // Тез. докл. межд. летней науч. школы “Гидродинамика больших скоростей – 2004”. – Чебоксары, 2004. – С. 35-36.
12. Баранов В. Е. Гидродинамическое взаимодействие частиц с плоскостью / В. Е. Баранов, С. И. Мартынов // Труды Средневолжского мат. общ-ва, 2004. – Т. 6. – № 1. – Р. 266-271.