На правах рукописи

АНДРЕЕВА ТАТЬЯНА НИКОЛАЕВНА

ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ОСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

01.01.04 – геометрия и топология

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2005

Работа выполнена на кафедре геометрии Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я.Яковлева

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор Столяров А.В.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Шурыгин В.В.
кандидат физико-математических наук, доцент Тимофеев Г.Н.

Ведущая организация:
Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского

Защита состоится «30» ноября 2005 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д. 212.081.10 при Казанском государственном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217)

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского государственного университета (г.Казань, ул. Кремлевская, 18)

Автореферат разослан «25» октября 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент М.А.Малахальцев

Общая характеристика диссертации

Постановка вопроса и актуальность темы. Теория связностей представляет собой обширную область исследования расслоенных пространств. История теории связностей начинается с работы Т.Леви-Чивита[1] о параллельном перенесении вектора в римановой геометрии. Эта идея была обобщена в различных направлениях, например, в общей теории относительности. Для построения единой теории поля Г.Вейль[2] ввел понятие пространства аффинной связности.

В 20-х гг. прошлого века (1923-1925 гг.) Э.Картан опубликовал основные работы по аффинной, проективной и конформной связностей (русский перевод их см. [3]). В частности, он рассматривает m – мерную поверхность в пространстве конформной связности, а также конформные связности, индуцируемые на этой поверхности связностью объемлющего пространства, вопросы конформного отображения и наложимости таких поверхностей.

К середине 20-го века назрела необходимость ввести понятие связности в расслоенном пространстве, что и сделали независимо друг от друга В.В.Вагнер[4] и Ш.Эресман[5]. Г.Ф.Лаптев[6], развивая эти результаты, отождествил понятие связности с понятием геометрического объекта специального вида.

Первые применения понятия проективной связности к геометрии подмногообразий в проективном пространстве дал Э.Картан[7]. Метод нормализации, разработанный А.П.Норденом[8)-11] позволил в касатель-

---

1. Levi-Civita T. Nozioni di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvature Riemanniana / T. Levi-Civita //. Rend. circ. Matem. – Palermo. – 1917. P. 173-205.

2. Weyl H. Raum. Zeit, Materie. – Berlin: Springer, 1923.

3. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности / Э.Картан. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1962. – 210 с.

4. Вагнер В.В. Теория составного многообразия / В.В.Вагнер // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. – М: Изд-во МГУ, 1950, 8. – С. 11-72.

5. Ehresmann C. Les connections infinitesimales dans un espace fibre differentiable / C. Ehresmann // Collque de Topologie. Bruxelles, 1950. – P. 29-55.

6. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий / Г.Ф.Лаптев // Труды Моск. матем. о-ва. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275-382.

7. Cartan E. Les éspaces á connexion projective / E. Cartan // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. – МГУ. – 1937. – Вып. 4. – С. 147-159.

8. Норден А.П. О нормализованных поверхностях пространства Мебиуса / А.П.Норден // ДАН СССР. – 1948. – Т.61. – № 2. – С. 207-210.

9. Норден А.П. Конформная интерпретация пространства Вейля / А.П.Норден // Матем. сб. – М.,1949. – Т. 24. – № 1. – С. 75-85.

10. Норден А.П. О нормализованных поверхностях конформного пространства / А.П.Норден // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1950. – Т.14. – №2. – С. 105-122.

11. Норден А.П. Пространства аффинной связности / А.П.Норден. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

ных расслоениях подмногообразий проективного пространства индуцировать аффинные связности без кручения. Г.Ф.Лаптев[12], следуя идеям Э.Картана, с использованием исчисления внешних дифференциальных форм дал видоизмененное определение пространства аффинной связности.

Понятие нормальной связности нормализованного подмногообразия в проективном пространстве ввели независимо друг от друга А.П.Норден[11] и А.В.Чакмазян[13].

А.П.Чакмазян в указанной работе изучает локальное строение подмногообразия в классических однородных пространств (проективном, аффинном и проективно-метрическом) с привлечением связностей в нормальных расслоениях.

Линейные связности на различного рода оснащенных подмногообразиях, погруженных как в однородные пространства, так и в пространства с фундаментально-групповой связностью, являются объектом исследования многих отечественных геометров.

Л.Ф.Филоненко[14] рассматривает распределение $m-$мерных линейных элементов в $(n-1)$-мерном конформном пространстве, используя его проективную интерпретацию. Значительное внимание уделяется возникающим при этом связностям, как вейлевой связности во всем пространстве, так и разного рода касательным и нормальным связностям распределения. Исследования А.В.Столярова[15),16)] посвящены изучению аффинных и конформных связностей, индуцируемых оснащениями распределений в $n-$мерном конформном пространстве. П.А.Фисунов[17] изучает нормальные связности на оснащенной регулярной $m-$мерной гиперполосе $n-$мерного проективного пространства. Исследования А.Н. Михайловой[18] посвящены

12. Лаптев Г.Ф. О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности / Г.Ф.Лаптев // ДАН СССР. – 1943. – Т. 41. – № 8. – С.329-331.

13. Чакмазян А.В. Нормальная связность в геометрии подмногооб-разий: Монография / А.В. Чакмазян. – Ереван: Армянск. пед. ин-т, 1990. – 116с.

14. Филоненко Л.Ф. Распределение $m-$мерных линейных элементов в конформном пространстве и присоединенные к нему связности / Л.Ф.Филоненко // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – 1995. – № 26. – С. 89-102.

15. Столяров А.В. Линейные связности на распределениях конфор-много пространства / А.В.Столяров // Изв. вузов. Мат. – Казань, 2001. – № 3. – С. 60-72.

16. Столяров А.В. Оснащения и аффинные связности на распределениях конформного пространства / А.В.Столяров // Изв. вузов. Мат. – Казань, 2002. – № 5. – С. 52-60.

17. Фисунов П.А. О нормальных связностях, индуцируемых на оснащенной регулярной гиперполосе / П.А.Фисунов // ВИНИТИ РАН. – М., 1998. – 20 с. – № 3394 – В98Деп.

18. Михайлова А.Н. Линейные связности на частично оснащенной гиперполосе конформного пространства / А.Н.Михайлова //ВИНИТИ РАН. – М., 2001. – №719. – В2001Деп. – 19с.

изучению некоторых вопросов линейных связностей на оснащенной гиперполосе конформного пространства.

Метод Г.Ф.Лаптева[6)] был применен М.А.Акивисом[19)-21)] к построению основ инвариантной теории гиперповерхностей, $m-$мерных поверхностей $n-$мерного конформного псевдоконформного пространства.

Объектом исследования настоящей работы являются линейные связности (аффинные, конформные, нормальные), индуцируемые различными оснащениями (нормальным, касательным, полным) гиперповерхности V_{n-1}, погруженной в конформное пространство C_n (псевдоконформное или собственно конформное).

Теория инвариантного построения геометрии гиперповерхности конформного пространства получила достаточное развитие в указанных выше работах М.А. Акивиса. Но следует отметить, что изучение линейных связностей, индуцируемых различными оснащениями подмногообразия V_{n-1}, до настоящего времени оставалось в стороне. Вопросы разработки теоретических и практических положений по изучению линейных связностей на оснащенной гиперповерхности конформного пространства представляют большой научный интерес и являются актуальными в связи с возможными приложениями этих связностей в математике, механике и физике.

Цель работы. Целью настоящего диссертационного исследования является инвариантное построение теории линейных связностей, индуцируемых различными оснащениями гиперповерхности V_{n-1}, погруженной в конформное пространство C_n; эта теория включает в себя решение следующих ключевых задач:

1) путем построения и изучения полей фундаментальных и охваченных геометрических объектов различного порядка на гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n в разных дифференциальных окрестностях построить различные инвариантные внутренним образом определяемые её нормальные, касательные, а следовательно, и полные оснащения;

2) исследовать дифференциально-геометрические структуры на гиперповерхности V_{n-1} пространства C_n, индуцируемые различными оснащениями подмногообразия V_{n-1}, а именно, изучать геометрию линейных связностей (аффинных, конформных и нормальных), опре-

---

19. Акивис М.А. Инвариантное построение геометрии гиперповерх-ности конформного пространства / М.А.Акивис // Матем. сб. – М., 1952. – Т. 31. – № 1. – С.43-75.

20. Акивис М.А. К конформно-дифференциальной геометрии много-мерных поверхностей / М.А.Акивис // Матем. сб. – М., 1961. – Т. 53. – № 1.– С.53-72.

21. Akivis M.A. *Goldberg V.V.* Conformal differential geometry and its generalizations / M.A. Akivis, V.V. Goldberg. – USA, 1996. – 384 p.

деляемых касательным, нормальным или полным оснащениями гиперповерхности V_{n-1};

3) указать пути приложения аффинных связностей, индуцируемых нормальным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, к изучению геометрии сетей Σ_{n-1} на подмногообразии V_{n-1};

4) установить взаимосвязь между геометриями оснащенной гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n и квадратичной гиперполосой H_{n-1} проективного пространства P_{n+1}, ассоциированной с подмногообразием V_{n-1}.

Методы исследования. В диссертационной работе используются инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований: метод продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева[6)] и метод внешних дифференциальных форм Э.Картана[22)]. Использование этих инвариантных методов позволило исследовать геометрию линейных связностей, определяемую в дифференциальных окрестностях до третьего порядка включительно.

В работе все результаты получены в минимально специализированной системе отнесения, а именно в репере первого порядка; это позволило получить их в инвариантной форме. Все рассмотрения в диссертации проводятся с локальной точки зрения. Функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми (то есть изучаемое подмногообразие достаточно гладкое), а при доказательстве теорем существования – аналитическими. Следует также заметить, что геометрия линейных связностей исследуется с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г.Ф.Лаптевым[6), 23)].

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертационном исследовании в ходе решения поставленных задач, являются новыми. Научная новизна обусловлена тем, что:

- изучением геометрии линейных связностей, индуцируемых оснащением гиперповерхности конформного пространства, математики почти не занимались;

- в работе изучение геометрии линейных связностей на оснащенной гиперповерхности проводится инвариантными аналитическими методами посредством исследования дифференциально-геометрических структур, индуцированных полями фундаментальных и оснащающих объектов подмногообразия.

22. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии / С.П.Фиников. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

23. Евтушик Л.Е. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е.Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии / ВИНИТИ.– М., 1979. – Т. 9. – 246с.

В работе приведены доказательства всех основных выводов, которые сформулированы в виде теорем.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретическое значение. Полученные в ней результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по изучению геометрии подмногообразий (как голономных, так и неголономных), вложенных в пространства конформной структуры.

Теория, разработанная в диссертации, может быть использована в качестве специальных и факультативных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а также при выполнении ими курсовых, дипломных и научных работ.

Апробация. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах по современным проблемам геометрии: на заседаниях научно-исследовательского семинара молодых исследователей при кафедре геометрии Чувашского государственного педагогического университета имени И.Я.Яковлева (2004-2005 гг.), на научных конференциях аспирантов, докторантов и научных сотрудников Чувашского государственного педагогического университета имени И.Я.Яковлева (2003-2005 гг.), на Всероссийской молодежной научной конференции «Лобачевские чтения-2003»(Казань, 2003 г.), на Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 2004 г.), на заседаниях научно-исследовательского геометриического семинара Казанского государственного университета (март и сентябрь 2005 г.).

Публикации. Основные научные результаты, включенные в диссертационную работу, опубликованы в 10 печатных работах [1] – [10] автора.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертационная работа является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные научные работы по теме исследования выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика диссертации, содержание диссертации), трех глав и списка литературы, включающего 90 наименований. Полный объем диссертации составляет 114 страниц машинописного текста.

Краткое содержание диссертации

В <u>первой главе</u> изучаются аффинные связности на нормально оснащенной гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n и их приложение к изучению геометрии различных классов сетей на подмногообразии V_{n-1}.

В §§ 1,2 содержится необходимый в дальнейшем изложении материал, носящий, в основном, реферативный характер. В п. 3 § 2 доказано, что нормальное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ при отображении Дарбу в проективном пространстве P_{n+1} индуцирует взаимным и двойственным образом нормализованную регулярную (n-1)-мерную квадратичную гиперполосу $H_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$, для которой базисной поверхностью является образ $\tilde{V}_{n-1} \subset Q_n^2$ подмногообразия V_{n-1} и полем характеристик семейства касательных к неподвижной гиперквадрике Дарбу $Q_n^2 \in \mathrm{P}_{n+1}$ гиперплоскостей в точках $\mathrm{A}_0 \in \tilde{V}_{n-1}$ служит поле прямых $[\mathrm{A}_0 \mathrm{A}_n]$ (теорема I.3).

§ 3 посвящен изучению аффинных связностей, индуцируемых нормальным оснащением гиперповерхности конформного пространства C_n полем квазитензора x_i^0. Доказано, что при нормальном оснащении гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем окружностей $[P_i]$ индуцируется пространство аффинной связности $\overset{0}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ без кручения, которое является вейлевым с полем метрического тензора g_{ij} и дополнительной формой $\Theta = \omega_0^0 - x_k^0 \omega_0^k$; кроме того, это пространство является эквиаффинным, а следовательно, римановым тогда и только тогда, когда обращается в нуль кососимметричный тензор $x_{[kl]}^0$ (теорема I.4).

Путем преобразования аффинной связности $\overset{0}{\nabla}$ пространства $\overset{0}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ найдены две аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые нормальным оснащением гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n. Доказано, что аффинные связности $\overset{0}{\nabla}$ и $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{0}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ сопряжены относительно полей симметричных тензоров соответственно a_{ij}^n и B_{ij} второго порядка (теоремы I.6 и I.7).

§ 4 посвящен приложению аффинных связностей к изучению внутренней геометрии сетей Σ_{n-1}, заданных на гиперповерхности V_{n-1} в пространстве C_n. Это применение проиллюстрировано на примере связности $\overset{0}{\nabla}$. Записаны дифференциальные уравнения сети на подмногообразии V_{n-1}, приведены некоторые порождаемые ею инвариантные геометрические образы (псевдофокальные гиперсферы F_i^j, гармонические гиперсферы F_i ортогональной сети). Найден геометрический смысл гармонических гиперсфер ортогональной сети: каждая из $n-1$ гармонических гиперсфер F_i ортогональной сети

$\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1} \subset C_n$ есть среднее арифметическое псевдофокальных гиперсфер F_i^j касательной $A_0 A_i$ к линии сети (п.2, § 4).

В п. 3-6 § 4 рассмотрены гиперсопряженные системы конформного пространства, сеть линий кривизны на гиперповерхности V_{n-1}, параллельное перенесение направления $A_0 A_i$ касательной к $i-$ой линии сети вдоль ее $k-$ой линии, геодезические и чебышевские сети в аффинной связности $\overset{0}{\nabla}$; получены аналитические условия, характеризующие эти сети; чебышевские сети линий кривизны рассмотрены (п. 7) на поверхности V_2 конформного пространства C_3. Основные результаты § 4 приведены в теоремах I.9, I.10, I.12- I.16, I.18, I.19, I.21, а также в замечаниях к ним.

Доказаны теоремы существования рассмотренных классов сетей (теоремы I.8, I.11, I.17, I.20).

Вторая глава посвящена изучению конформных и аффинных связностей, индуцируемых полным оснащением гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства.

В § 1 изучаются конформные связности, индуцируемые касательным и полным оснащениями гиперповерхности. Доказано (п.1), что инвариантное касательное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем гиперсфер P_n, определяемым полем квазитензора x_n^0, индуцирует пространство конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ с полем метрического тензора g_{ij}, определяемое системой $(n+1)^2$ форм Пфаффа, причем это пространство является пространством без кручения (теорема II.1). При перенесении Дарбу конформного пространства C_n на проективное пространство P_{n+1} все точки каждого слоя пространства конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ отображаются в точки квадрики Дарбу $Q_{n-1}^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$, получающейся при пересечении гиперквадрики Дарбу $Q_n^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$, с полярой точки P_n относительно этой гиперквадрики.

В п.2 § 1 найдено условие неподвижности касательной гиперсферы P_n, при выполнении которого исходная гиперповерхность V_{n-1} совпадает с этой гиперсферой, а пространство конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ является плоским.

Доказано (п.3,4), что если задано полное оснащение гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n, то индуцируется нормализованное пространство $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ конформной связности (теорема II.5). В случае, когда полное оснащение подмногообразия V_{n-1} является невырожденным (то есть основной тензор нормализации a^0_{ik} невырожден), то индуцируется второе пространство конформной связности $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$, метрический тензор которого совпадает с метрическим тензором g_{ij} пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ (теорема II.6); приведены строения компонент тензора кривизны-кручения пространства $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$.

§ 2 главы II посвящен изучению внутренней геометрии аффинных связностей, индуцируемых полным оснащением гиперповерхности V_{n-1} пространства C_n. Доказано (теорема II.7), что невырожденное полное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ определяет одновременную нормализацию пространств конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ и $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$ полем квазитензора x^0_i, при этом поля основных тензоров этих пространств совпадают; аффинные связности $\overset{0}{\overline{\nabla}}$ и $\overset{1}{\overline{\nabla}}$, индуцируемые при этом оснащении, являются вейлевыми с полем метрического тензора g_{ik}, причем связность $\overset{0}{\overline{\nabla}}$ - без кручения, тензор кручения связности $\overset{1}{\overline{\nabla}}$ совпадает с тензором кручения пространства $\overset{1}{C}_{n-1,n-1}$ и, вообще говоря, является ненулевым. Связность $\overset{0}{\overline{\nabla}}$ риманова тогда и только тогда, когда нормализация пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ является гармонической (то есть, основной тензор нормализации симметрический). Аффинная связность $\overset{0}{\overline{\nabla}}$ совпадает с аффинной связностью $\overset{0}{\nabla}$, то есть не зависит от касательного оснащения гиперповерхности V_{n-1}, а аффинная связность $\overset{1}{\overline{\nabla}}$ зависит как от касательного, так и от нормального оснащения гиперповерхности V_{n-1}. В общем случае невырожденное полное оснащение подмногообразия $V_{n-1} \subset C_n$ полями функции x^0_n и квазитензора x^0_i индуцирует бесчисленное множество пространств конформной связности $\overset{p}{C}_{n-1,n-1}$ и аффинной связности $\overset{p}{\overline{A}}_{n-1,n-1}$ (p=0,1,2,…), удовлетворяющих теоремам соответственно II.6 и II.7.

В § 3 главы II рассмотрено поле циклид Дарбу, индуцируемое полным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$; доказано (теорема II.9), что полное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ внутренним образом индуцирует поле инвариантных циклид Дарбу, содержащих нормализующие точки X'_{n+1} слоев пространства конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ и не проходящих через соответствующие точки $A_0 \in V_{n-1}$; в каждой точке $A_0 \in V_{n-1}$ образом соответствующей циклиды при перенесении Дарбу конформного пространства C_n на проективное пространство P_{n+1} является (n-2)-мерная поверхность 4-го порядка (она может быть и мнимой), лежащая на гиперквадрике Дарбу $Q_n^2 \subset P_{n+1}$.

Третья глава посвящена изучению нормальных связностей на гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n.

В § 1 главы III на нормально оснащенной гиперповерхности в расслоении окружностей $[P_i]$ найдены две нормальные связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\tilde{\nabla}^{\perp}$; приведены строения тензоров кривизны-кручения соответствующих пространств. Доказаны (п.1, § 1) следующие предложения (теоремы III.1 – III.3):

- на нормально оснащенной полем квазитензора x_i^0 гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ в расслоении окружностей $[P_i]$ индуцируется нормальная связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, определяемая системой форм $\{\overset{0}{\Theta}{}_n^0, \overset{0}{\Theta}{}_n^n\}$; форма $\{\overset{0}{\Theta}{}_n^n\}$ определяет подсвязность $\overset{0}{\underset{0}{\nabla}}{}^{\perp}$ связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$. Для каждого соответствующего пространства нормальной связности найдены строения тензоров кривизны-кручения;

- нормальная подсвязность $\overset{0}{\underset{0}{\nabla}}{}^{\perp}$ связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемой нормальным оснащением гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n, плоская (то есть связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ - полуплоская) тогда и только тогда, когда вейлево пространство $\overset{0}{A}_{n-1,n-1} \equiv W_{n-1}$, рассмотренное в § 3 гл.I, является римановым. Это предложение справедливо, например, для нормального оснащения гиперповерхности полем квазитензора $\tilde{a}_k = \dfrac{1}{n-1} a_n^{ji} a_{ijk}^n$ третьего порядка;

- для того чтобы нормальная связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемая нормальным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, была плоской, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция нормалей первого рода и псевдоконгруэнция нормалей второго рода на поверхности $\tilde{V}_{n-1} \subset Q_n^2 \subset P_{n+1}$ составляли пару, односторонне расслояемую в сторону от нормалей первого рода к нормали второго рода.

В п.3 § 1 при одном частном преобразовании слоевых форм нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ (тензор H_{nk}^n – нулевой) построена нормальная связность $\tilde{\nabla}^{\perp}$, найдено строение тензора кривизны-кручения соответствующего пространства нормальной связности. Построен охват тензора H^0_{nk}, при котором связность $\tilde{\nabla}^{\perp}$ определяется внутренним образом. Доказано (теорема III.5), что при этом охвате связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\tilde{\nabla}^{\perp}$, индуцируемые в расслоении окружностей $[P_i]$ при нормальном оснащении гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n полем квазитензора x^0_i, имеют одинаковые тензоры кривизны-кручения тогда и только тогда, когда вейлева связность $\overset{0}{\nabla}$ в касательном расслоении является римановой.

§ 2 посвящен изучению нормальных связностей $\nabla^{\perp}$, получаемых путем общего преобразования (тензор H^n_{nk} – ненулевой) слоевых форм нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$; такое преобразование возможно лишь при полном оснащении гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$. Доказано (теорема III.7), что нормальная связность $\nabla^{\perp}$, индуцируемая полным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, допускающим обращение в нуль тензора $\mathrm{X}^0_{nk} \equiv x^0_{nk} - x^0_n x^0_k - x^0_s \Lambda^s_{nk}$, является плоской тогда и только тогда, когда она полуплоская. Найдено (теорема III.9) геометрическое условие обращения в нуль тензора X^0_{nk}. К этому классу подмногообразий $V_{n-1} \subset C_n$ относится, например, гиперповерхность, вырождающаяся в гиперсферу.

В п.2 § 2 построены два охвата тензора H^n_{nk}, при которых нормальная связность определяется внутренним образом (соответственно, нормальные связности $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$); найдены строения тензоров кривизны-кручения соответствующих пространств. Доказаны (теорема III.8 и следствие) следующие предложения:

- нормальная связность $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемая полным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, является полуплоской;

- нормальная связность $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемая полным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, допускающим обращение в нуль тензора X^0_{nk}, является плоской.

Связность $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$ более подробно изучается (п.3 § 2) на поверхности V_2 конформного пространства C_3, отнесенной к сети линий кривизны.

В § 3 главы III рассмотрены нормальные связности на регулярной квадратичной гиперполосе H_{n-1} проективного пространства P_{n+1}, ассоциированной с гиперповерхностью $V_{n-1} \subset C_n$.

В п.1 в нормали первого рода гиперполосы H_{n-1} найдена инвариантная прямая $h \equiv [\mathrm{A}_0 \mathrm{N}_{n+1}]$, внутренним образом определяемая во второй дифференциальной окрестности.

В п.2 найдено условие параллельности гладкого поля одномерных направлений, принадлежащего полю нормалей первого рода гиперполосы H_{n-1}, в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$. Доказаны следующие предложения:

- при любом нормальном оснащении гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ поле характеристик $[\mathrm{A}_0 \mathrm{A}_n]$ гиперполосы $H_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$ параллельно переносится в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ (теорема III.10). Это утверждение сформулировано также на языке конформного пространства (теорема III. 10$'$);

- поле инвариантных прямых $h \equiv [\mathrm{A}_0 \mathrm{N}_{n+1}]$ на гиперполосе $H_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$, определяемое полем квазитензора x_i^0, является параллельным в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда тензор $\mathrm{A}^n_{n+1,k}$ обращается в нуль (теорема III.11);

- для общей гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ в третьей дифференциальной окрестности существует единственное внутренним образом определяемое ее нормальное оснащение, при котором соответствующее поле инвариантных прямых h гиперполосы $H_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$ является параллельным в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ (теорема III.12).

Условие параллельности гладкого поля одномерных направлений, принадлежащего полю нормалей первого рода гиперполосы H_{n-1}, записано также относительно нормальных связностей $\tilde{\nabla}^{\perp}, \overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$; для этих связностей справедливы аналоги теорем III.10, III.12.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

1. На гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n во второй и третьей дифференциальных окрестностях построены инвариантные внутренним образом определяемые нормальные, касательные и полные оснащения гиперповерхности V_{n-1}.

2. Изучены геометрии аффинных, конформных и нормальных связностей, определяемых нормальным, касательным и полным оснащениями гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$. В частности:

- аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$ – вейлева, найдено условие ее римановости; показано, что аффинные связности $\overset{0}{\nabla}, \overset{1}{\nabla}$ и $\overset{0}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$ сопряжены относительно полей симметричных тензоров соответственно a_{ij}^n и B_{ij} второго порядка;

- найдены условия, при которых нормальная связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ является полуплоской, а связность $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ – плоской, а также условия параллельности гладкого поля одномерных направлений в нормальных связностях $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, $\tilde{\nabla}^{\perp}$, $\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}$.

3. Найдены приложения аффинных связностей, индуцируемых нормальным оснащением гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$, к изучению геометрии различных классов сетей $\Sigma_{n-1} \subset V_{n-1}$, а именно, к гиперсопряженным системам, к сети линий кривизны, к чебышевской и геодезической сетям.

4. Установлена взаимосвязь между геометриями оснащенной гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства C_n и квадратичной гиперполосой H_{n-1} проективного пространства P_{n+1}, ассоциированной с подмногообразием V_{n-1}.

5. Найдена взаимосвязь между индуцируемыми на нормально оснащенной гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ вейлевой и нормальными связностями.

Работы автора, опубликованные по теме диссертации

1. Андреева Т.Н. Аффинные связности на нормально оснащенной гиперповерхности конформного пространства / Т.Н.Андреева // Тр. Мат. Центра им. Н.И.Лобачевского. Том 21/ Казанское мат. об-во. Лобачевские чтения 2003 // Материалы третьей всероссийской молодежной научн. школы-конференции. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2003. – С. 67-69.

2. Андреева Т.Н. Аффинные связности на нормально оснащенной гиперповерхности конформного пространства / Т.Н.Андреева // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. – Чебоксары, 2004. – №1. – С. 3-9.

3. Андреева Т.Н. Конформно – дифференциальная геометрия сетей на гиперповерхности / Т.Н.Андреева // ВИНИТИ РАН. – М., 2004. – 18 с. – №744 – В2004.

4. Андреева Т.Н. Сети на гиперповерхности конформного пространства / Т.Н.Андреева // Научно – информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. – Чебоксары, 2004. – Т.2. – №1(3). – С.21-29.

5. Андреева Т.Н. Конформные и аффинные связности, индуцируемые полным оснащением гиперповерхности конформного пространства / Т.Н.Андреева //ВИНИТИ РАН. – М., 2004. – 18 с. — №1369 – В2004.

6. Андреева Т.Н. Конформные и аффинные связности, индуцируемые полным оснащением гиперповерхности конформного пространства / Т.Н.Антреева // Тр. Мат. Центра им. Н.И.Лобачевского. Том 25/ Казанское мат. об-во. Актуальные проблемы математики и механики // Материалы Международной научной конференции. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2004. – С.24-25.

7. Андреева Т.Н. Сопряженные аффинные связности на нормально оснащенной гиперповерхности конформного пространства / Т.Н.Андреева // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. – Калининград: Изд-во КГУ, 2004. – Вып. 35. – С. 24-27.

8. Андреева Т.Н. Поле циклид Дарбу, индуцируемое полным оснащением гиперповерхности конформного пространства / Т.Н. Андреева // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. – Чебоксары, 2005. – №1. – С. 19-24.

9. Андреева Т.Н. Нормальные связности на гиперповерхности конформного пространства //ВИНИТИ РАН. – М., 2005. – 23 с. – № 379 – В2005.

10. Андреева Т.Н. О нормальных связностях, индуцируемых на оснащенной гиперповерхности конформного пространства / Т.Н. Андреева // Научно – информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. – Чебоксары, 2005. – Т.1 . - № 1(5). – С. 3-10.

Подписано к печати 21.10. 05. Формат $60\times84/_{16}$.

Бумага ксероксная. Печать трафаретная.

Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ 995.

Отдел оперативной полиграфии

Чувашского государственного педагогического университета.

428000, Чебоксары, ул. К.Маркса, 38.