На правах рукописи

Мамчуев Мурат Османович

Краевые задачи для системы уравнений с частными производными дробного порядка

01.01.02 – Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

2005

Работа выполнена в отделе дробного исчисления
Научно-исследовательского института
прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
(НИИ ПМА КБНЦ РАН).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Нахушев Адам Маремович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
кандидат физико-математических наук
доцент

Ведущая организация:

Защита состоится «____» __________ 2005 г. в _____ часов на заседании

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке

Автореферат разослан «____» __________ 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент __________

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Оператор дробного интегродифференцирования по Риману и Лиувиллю и различные его обобщения играют существенную роль в теории краевых задач со смещением для уравнений в частных производных, меняющих свой тип в замыкании области их определения. Основополагающие результаты в этом направлении получены в известных работах А.В. Бицадзе, Т.Д. Джураева, В.И. Жегалова, Е.И. Моисеева, А.М. Нахушева, О.А. Репина, М.С. Салахитдинова, М. Сайго.

Матричные и скалярные дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка, являясь принципиально новым обобщением уравнений с частными производными целого порядка, кроме большого теоретического интереса, имеют и важное практическое значение. Такие уравнения выступают в качестве математических моделей различных процессов и явлений в средах с фрактальной структурой.

Уравнениям переноса в средах с фрактальной геометрией посвящены работы В.Л. Кобелева, А.М. Нахушева, В.А. Нахушевой, Р.Р. Нигматуллина, В.В. Учайкина, К.В. Чукбара.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробной производной исследовались в работах Т.С. Алероева, В.К. Вебера, С.Х. Геккиевой, А.Н. Кочубея, В.А. Нахушевой, А.В. Псху.

Как отмечено в монографии А.М. Нахушева «Дробное исчисление и его применение» (2003 г.), "дробное (дифференциальное и интегральное) исчисление в теории фракталов и систем с памятью приобретает такое же важное значение, как и классический анализ в физике (механике) сплошных сред."

Таким образом, проведение фундаментальных исследований по теме диссертационной работы является актуальным.

Тема диссертации входит в план научно-исследовательских работ НИИ ПМА КБНЦ РАН по научному направлению «Развитие дробного исчисления и анализа на фракталах для разработки математических моделей физико-биологических процессов и сред с фрактальной структурой», №01.20.00 12845 гос. регистрации.

Цель работы. Основной целью работы является исследование основных краевых задач для систем уравнений в частных производных дробного порядка.

Методы исследования. Результаты работы получены с использованием метода функции Грина, метода интегрального преобразования Лапласа, метода интегральных уравнений.

Научная новизна. В диссертации исследуются основные краевые задачи для линейных матричных и связанного с ними класса скалярных уравнений в частных производных, содержащих производные дробного порядка по одной из двух независимых переменных.

Для исследуемых уравнений и систем:

1. Получены общие представления решения в прямоугольной области.

2. Доказаны теоремы существования и единственности решений основных краевых задач, задачи Коши в нелокальной постановке и краевой задачи в полубесконечной полосе.

3. Построены функции Грина краевых задач и фундаментальные решения.

4. Изучены асимптотические поведения фундаментальных решений на бесконечности.

Практическая и теоретическая ценность. Работа является теоретической. Ее результаты могут сыграть определенную роль в построении теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка.

Значение работы определяется также прикладной значимостью рассматриваемых краевых задач.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинаре по современному анализу и информатике НИИ ПМА КБНЦ РАН, на Второй Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 3-7 декабря 2001 г.), на Международном Российско-Узбекском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», (Нальчик-Эльбрус, 2003 г.), на Международном Российско-Казахском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», (Нальчик-Эльбрус, 2004 г.).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в работах [1]–[11].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, объединяющих 12 параграфов, заключения и списка литературы, содержащего 78 наименований, и изложена на 101 странице.

Содержание работы

Во введении дается обзор литературы по вопросам, связаным с темой диссертации, показана актуальность темы исследований, излагается краткое содержание основных результатов диссертации.

Первая глава посвящена краевым задачам для системы уравнений с частными производными дробного порядка в прямоугольных областях.

В §1 первой главы для системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{L}w(x,y) \equiv D^{\alpha}_{0y}w(x,y) + B(x,y)w_x(x,y) + C(x,y)w(x,y) = f(x,y), \quad (1)$$

где $w(x,y) = \|u(x,y), v(x,y)\|$ – искомая, а $f(x,y) = \|f_1(x,y), f_2(x,y)\|$ – заданная вектор-функции, $\alpha \in (0,1)$, $B(x,y)$ и $C(x,y)$ – матрицы-функции размера 2×2, получено общее представление решения в прямоугольной области $\Omega = \{(x,y):\ 0<x<l,\ 0<y<T\}$, $T\le\infty$.

Доказана

Теорема 1.1. *Пусть* $\Omega_y = \{(t,s)\ :\ 0<t<l,\ 0<s<y\}$, $B(x,y)\in C(\bar\Omega)$, $B_x(x,y)\in L(\Omega)$ *и матрица* $z(x,y,t,s)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) в области Ω_y *при фиксированных* $(x,y)\in\Omega$ *матрица* z *является решением уравнения*

$$\mathbf{L}^* z(x,y,t,s) \equiv D^{\alpha}_{ys} z(x,y,t,s) - [z(x,y,t,s)B(t,s)]_t + z(x,y,t,s)C(t,s) = 0;$$

2) для любого вектора $g(x) = \|g_1(x), g_2(x)\| \in C[x_1,x_2]$, $0\le x_1<x_2\le l$, *выполняется соотношение*

$$\lim_{s\to y}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[D^{\alpha-1}_{ys} z(x,y,t,s)\right] g(t)dt = g(x),\ x_1<x<x_2;$$

3) элементы матрицы z *являются непрерывными в* $\Omega\times\Omega_y\setminus\{y=s\}$ *функциями, и для любых точек* $(x,y)\in\Omega$ *и* $(t,s)\in\Omega_y$ *выполняется неравенство*

$$|z(x,y,t,s)| < K(y-s)^{\alpha-1},$$

где K *– постоянная матрица с положительными элементами.*

Пусть $w(x,y)$ *– решение системы (1) такое, что* $y^{1-\alpha}w(x,y)\in$ $\in C(\bar\Omega)\cap C^1(\Omega)$, *и* $\lim\limits_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y} w(x,y) = \varphi(x)$, *тогда*

$$w(x,y) = \int\limits_0^l z(x,y,t,0)\varphi(t)dt + \int\limits_0^y z(x,y,0,s)B(0,s)w(0,s)ds -$$

$$- \int\limits_0^y z(x,y,l,s)B(l,s)w(l,s)ds + \int\limits_0^y\int\limits_0^l z(x,y,t,s)f(t,s)dtds.$$

В §2 методом интегрального преобразования Лапласа построена матрица Грина первой краевой задачи для системы

$$D^{\alpha}_{0y} w(x,y) + \Lambda w_x(x,y) - Aw(x,y) = f(x,y), \tag{2}$$

где $\Lambda = \left\| \begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{array} \right\|$, $\lambda > 0$, $A = \|a_{ij}\|$, $a_{ij} = const$ $(i, j = 1, 2)$.

Задача 1.1. *В области* $\Omega = \{(x, y) : \ 0 < x < l, \ 0 < y < T\}$, $T \leq \infty$, *найти решение* $w(x, y) = \|u(x, y), v(x, y)\|$ *системы (2), удовлетворяющее следующим условиям:*

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha - 1} w = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, y) = \mu(y), \ v(l, y) = \nu(y), \ 0 < y < T,$$

где $\varphi(x) = \|\varphi_1(x), \varphi_2(x)\|$, $\mu(y)$, $\nu(y)$ *– заданные функции.*

Матрицей Грина первой краевой задачи называется матрица $z(x, y, t, s)$, удовлетворяющая вместе с условиями 1) – 3) теоремы 1.1, условиям

$$\lim_{t \to l} z_{11}(x, y, t, s) = \lim_{t \to l} z_{21}(x, y, t, s) = 0,$$

$$\lim_{t \to 0} z_{12}(x, y, t, s) = \lim_{t \to 0} z_{22}(x, y, t, s) = 0.$$

Будем обозначать

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\Gamma(\mu + \alpha n)\Gamma(\delta - \beta n)}$$

– функцию типа Райта.

Матрица Грина имеет вид

$$G(x, y, t, s) = S(x, y, t, s) + \Gamma(x, y, t, s),$$

где $S(x, y, t, s) = ||S_{ij}(x, y, t, s)||$ – матрица с элементами

$$S_{11}(x, y, t, s) = \frac{\sqrt{|a_{12} a_{21}|}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int_0^\infty g(Y, \tau) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{11}(x, t, \tau) d\tau,$$

$$S_{12}(x, y, t, s) = \frac{a_{12}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int_0^\infty g(Y, \tau) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{12}(x, t, \tau) d\tau,$$

$$S_{21}(x, y, t, s) = \frac{a_{21}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int_0^\infty g(Y, \tau) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{21}(x, t, \tau) d\tau,$$

$$S_{22}(x, y, t, s) = \frac{\sqrt{|a_{12} a_{21}|}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int_0^\infty g(Y, \tau) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{22}(x, t, \tau) d\tau;$$

$\Gamma(x, y, t, s) = \Gamma(x - t, y - s) = \Gamma(X, Y)$ – матрица с элементами

$\Gamma_{11}(X,Y)=\frac{\sqrt{|a_{12}a_{21}|}}{2\lambda^2}e^{a_0X}\int\limits_0^\infty g(Y,\tau)\frac{\tau+X}{\sqrt{\tau^2-X^2}}h_1(X,\tau)d\tau+\frac{1}{\lambda}e^{a_0X}g(Y,X)\eta(X),$

$\Gamma_{12}(X,Y)=\frac{a_{12}}{2\lambda^2}e^{a_0X}\int\limits_0^\infty g(Y,\tau)h_0(X,\tau)d\tau,$

$\Gamma_{21}(X,Y)=\frac{a_{21}}{2\lambda^2}e^{a_0X}\int\limits_0^\infty g(Y,\tau)h_0(X,\tau)d\tau,$

$\Gamma_{22}(X,Y)=\frac{\sqrt{|a_{12}a_{21}|}}{2\lambda^2}e^{a_0X}\int\limits_0^\infty g(Y,\tau)\frac{\tau-X}{\sqrt{\tau^2-X^2}}h_1(X,\tau)d\tau+\frac{1}{\lambda}e^{a_0X}g(Y,-X)\eta(-X);$

$\Phi_n^{ij}\equiv\Phi_n^{ij}(x,t,\tau),\ \ X=x-t,\ \ Y=y-s,$

$\Phi_n^{11}=-h_{1,2n+1}(X_{1,n},\tau)-h_{1,2n+1}(X_{2,n},\tau)+h_{1,2n+3}(X_{3,n+1},\tau)+h_{1,2n+1}(X_{4,n+1},\tau),$

$\Phi_n^{12}=-h_{1,2n}(X_{1,n},\tau)-h_{1,2n+2}(X_{2,n},\tau)+h_{1,2n+2}(X_{3,n+1},\tau)+h_{1,2n+2}(X_{4,n+1},\tau),$

$\Phi_n^{21}=-h_{1,2n+2}(X_{1,n},\tau)-h_{1,2n}(X_{2,n},\tau)+h_{1,2n+2}(X_{3,n+1},\tau)+h_{1,2n+2}(X_{4,n+1},\tau),$

$\Phi_n^{22}=-h_{1,2n+1}(X_{1,n},\tau)-h_{1,2n+1}(X_{2,n},\tau)+h_{1,2n+1}(X_{3,n+1},\tau)+h_{1,2n+3}(X_{4,n+1},\tau);$

$$h_{1,m}(X,\tau)=\begin{cases}(-1)^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(\tau-X)^m\frac{J_m(|a|\sqrt{\tau^2-X^2})}{(\tau^2-X^2)^{\frac{m}{2}}}\eta(\tau-X),\,a_{12}a_{21}\le 0,\\ (\tau-X)^m\frac{I_m(a\sqrt{\tau^2-X^2})}{(\tau^2-X^2)^{\frac{m}{2}}}\eta(\tau-X),\,a_{12}a_{21}\ge 0,\end{cases}$$

$$h_i(X,\tau)=\begin{cases}(-1)^iJ_i(|a|\sqrt{\tau^2-X^2})\eta(\tau-|X|),\,a_{12}a_{21}\le 0,\\ I_i(a\sqrt{\tau^2-X^2})\eta(\tau-|X|),\,a_{12}a_{21}\ge 0,\end{cases}$$

$g(y,\tau)=\frac{e^{a_1\tau}}{y}e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{\tau}{\lambda y^\alpha}\right)$, $J_m(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2n}}{n!\Gamma(m+n+1)}$ и $I_m(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2n}}{n!\Gamma(m+n+1)}$ – функции Бесселя, $\eta(\tau)$ – функция Хевисайда, $a_{0,1}=\frac{a_{11}\mp a_{22}}{2\lambda}$, $a=\frac{\sqrt{a_{12}a_{21}}}{\lambda}$, $X_{1,n}\equiv X_{1,n}(x,t)=x+t+2nl$, $X_{2,n}\equiv X_{2,n}(x,t)=-x-t+2(n+1)l$, $X_{3,n}\equiv X_{3,n}(x,t)=-x+t+2nl$, $X_{4,n}\equiv X_{4,n}(x,t)=x-t+2nl$, $[\beta]$ – целая часть числа β.

В §3 доказана теорема существования и единственности решения первой краевой задачи для системы (2).

Теорема 1.2. *Пусть* $y^{1-\alpha}f(x,y)\in C(\bar\Omega)\cap C^1(\Omega),\varphi(x)\in C[0;l]\cap$ $\cap C^1(0;l)$, $y^{1-\alpha}\mu(y),y^{1-\alpha}\nu(y)\in C[0;T]\cap C^1(0;T)$, *и выполняются условия согласования*

$$\lim_{y\to 0}D^{\alpha-1}_{0y}\mu(t)=\varphi_1(0),\ \lim_{y\to 0}D^{\alpha-1}_{0y}\nu(t)=\varphi_2(l).$$

Тогда существует единственное решение задачи 1.1, такое, что

$y^{1-\alpha}w(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. *Решение имеет вид*

$$w(x,y) = \lambda \int_0^y [G(x,y,l,s) + G(x,y,0,s)] \left\| \begin{array}{c} \mu(s) \\ \nu(s) \end{array} \right\| ds +$$

$$+ \int_0^l G(x,y,t,0)\varphi(t)dt + \int_0^y \int_0^l G(x,y,t,s)f(t,s)dtds.$$

В §4 рассмотрена смешанная задача для системы (1) с постоянными матричными коэффициентами B и C.

Задача 1.2. *Найти решение* $w(x,y) = ||u(x,y), v(x,y)||$ *системы (1), удовлетворяющее следующим условиям:*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} w = \varphi(x), \ 0 \le x \le l,$$

$$\gamma_{11}u(0,y) + \gamma_{12}v(0,y) = \mu(y), \ 0 < y < T,$$

$$\gamma_{21}u(l,y) + \gamma_{22}v(l,y) = \nu(y), \ 0 < y < T,$$

где $\varphi(x) = ||\varphi_1(x), \varphi_2(x)||$, $\mu(y)$, $\nu(y)$ *– заданные функции.*

Доказана

Теорема 1.3. *Пусть* $B = \left\| \begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{array} \right\|$, $y^{1-\alpha}f(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $\varphi(x) \in C[0;l] \cap C^1(0;l)$, $y^{1-\alpha}\mu(y), y^{1-\alpha}\nu(y) \in C[0;T] \cap C^1(0;T)$, $\gamma_{11}\gamma_{22} \ne 0$, *и выполняются условия согласования*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} \mu(t) = \gamma_{11}\varphi_1(0) + \gamma_{12}\varphi_2(0), \tag{3}$$

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} \nu(t) = \gamma_{21}\varphi_1(l) + \gamma_{22}\varphi_2(l). \tag{4}$$

Тогда существует единственное решение задачи 1.2, такое, что $y^{1-\alpha}w(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$.

В §5 теорема существования и единственности решения смешанной задачи доказана для системы более общего вида.

Теорема 1.4. *Пусть* $B = \left\| \begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{11} \end{array} \right\|$, $\lambda_i = (-1)^{i+1}\sqrt{-\det B}$, $\det B < 0$, $(b_{11} - \lambda_i)\gamma_{i2} \ne b_{12}\gamma_{i1}$ $(i = 1,2)$, $\varphi(x) \in C[0;l] \cap C^1(0;l)$,

$y^{1-\alpha}\mu(y), y^{1-\alpha}\nu(y) \in C[0;T] \cap C^1(0;T)$, $y^{1-\alpha}f(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, *и выполняются условия согласования (3), (4). Тогда существует единственное решение задачи 1.2, такое, что* $y^{1-\alpha}w(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$.

Во второй главе рассматриваются краевые задачи для системы (2) в неограниченных областях.

В §1 исследована задача Коши в нелокальной постановке.

Задача 2.1. *В области* $\Omega = \{(x,y):\ -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < T\}$, $T \leq \infty$, *найти решение* $w(x,y)$ *системы (2) удовлетворяющее следующему условию:*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} w = \varphi(x),\ -\infty < x < +\infty,$$

где $\varphi(x) = \|\varphi_1(x), \varphi_2(x)\|$ *– заданная вектор-функция.*

Доказана

Теорема 2.1. *Пусть функции* $f(x,y)$ *и* $\varphi(x)$ *таковы, что* $f(x,y) = O(\exp(x^\varepsilon))$, $\varphi(x) = O(\exp(x^\varepsilon))$, $\varepsilon < \frac{1}{1-\alpha}$ *при* $|x| \to \infty$ *и* $y^{1-\alpha}f(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $\varphi(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, *тогда существует единственное решение задачи 2.1, такое, что* $y^{1-\alpha}w(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ *и* $w(x,y) = O(\exp(x^\varepsilon))$ *при* $|x| \to \infty$. *Решение задается формулой*

$$w(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,y,t,0)\varphi(t)dt + \int_0^y \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,y,t,s) f(t,s)dtds,$$

где $\Gamma(x,y,t,s) = \Gamma(x-t, y-s) = \Gamma(X,Y)$ *– матрица с элементами*

$$\Gamma_{11}(X,Y) = \frac{\sqrt{|a_{12}a_{21}|}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int_0^\infty g(Y,\tau) \frac{\tau + X}{\sqrt{\tau^2 - X^2}} h_1(X,\tau)d\tau + \frac{e^{a_0 X}}{\lambda} g(Y,X)\eta(X),$$

$$\Gamma_{12}(X,Y) = \frac{a_{12}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int_0^\infty g(Y,\tau) h_0(X,\tau)d\tau,$$

$$\Gamma_{21}(X,Y) = \frac{a_{21}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int_0^\infty g(Y,\tau) h_0(X,\tau)d\tau,$$

$$\Gamma_{22}(X,Y) = \frac{\sqrt{|a_{12}a_{21}|}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int_0^\infty g(Y,\tau) \frac{\tau - X}{\sqrt{\tau^2 - X^2}} h_1(X,\tau)d\tau + \frac{e^{a_0 X}}{\lambda} g(Y,-X)\eta(-X),$$

$$h_i(X,\tau) = \begin{cases} (-1)^i J_i(|a|\sqrt{\tau^2 - X^2})\eta(\tau - |X|), a_{12}a_{21} \leq 0, \\ I_i(a\sqrt{\tau^2 - X^2})\eta(\tau - |X|), a_{12}a_{21} \geq 0, \end{cases}$$

$g(y,\tau) = \frac{e^{a_1 \tau}}{y} e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{\tau}{\lambda y^\alpha}\right)$, $a_{0,1} = \frac{a_{11} \mp a_{22}}{2\lambda}$, $a = \frac{\sqrt{a_{12}a_{21}}}{\lambda}$, $\eta(\tau)$ *– функция Хевисайда.*

В §2 для матрицы $\Gamma(x,y,t,s)$ получена оценка

$$\Gamma(x,y,t,s)\le Ke^{k|X|}Y^{\alpha-1}e_{1,\alpha}^{1,\alpha}\left(-\frac{|X|}{\lambda Y^{\alpha}}\right)E_{\frac{1}{\alpha}}(\lambda kY^{\alpha};1),$$

и асимптотическая формула

$$\Gamma(x,y,t,s)\sim K_0\exp\left(-k_1|X|^{\varepsilon_0}\right),\ \ |X|\to\infty,$$

где $E_{\frac{1}{\alpha}}(z,\mu)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}$ – функция типа Миттаг-Леффлера, $\varepsilon_0=\frac{1}{1-\alpha}$, K и K_0 – некоторые постоянные матрицы, а k и k_1 – положительные числа, зависящие от α.

В §3 для системы (2) рассматривается следующая

Задача 2.2. *В области* $\Omega^+=\{(x,y):\ 0<x<+\infty,\ 0<y<T\}$, $T\le\infty$, *найти решение* $w(x,y)$ *системы (2), удовлетворяющее начальному*

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}w=\varphi(x),\ 0\le x<+\infty,$$

и краевому

$$u(0,y)=\mu(y),\ 0<y<T,$$

условиям, где $\varphi(x)=\|\varphi_1(x),\varphi_2(x)\|$ *и* $\mu(y)$ *– заданные функции.*

Доказана

Теорема 2.2. *Пусть функции* $f(x,y)$ *и* $\varphi(x)$ *таковы, что* $f(x,y)=O(\exp(x^{\varepsilon}))$, $\varphi(x)=O(\exp(x^{\varepsilon}))$, $\varepsilon<\frac{1}{1-\alpha}$, *при* $x\to+\infty$, $y^{1-\alpha}f(x,y)\in C(\bar{\Omega}^+)\cap C^1(\Omega^+)$, $\varphi(x)\in C[0,+\infty)\cap C^1(0,+\infty)$, $y^{1-\alpha}\mu(y)\in C[0,T]\cap C^1(0,T)$, *и выполняется условие согласования* $\lim\limits_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}\mu(y)=\varphi_1(0)$. *Тогда существует единственное решение задачи 2.2, такое, что* $y^{1-\alpha}w(x,y)\in C(\bar{\Omega}^+)\cap C^1(\Omega^+)$ *и* $w(x,y)=O(\exp(x^{\varepsilon}))$ *при* $x\to+\infty$. *Решение имеет вид*

$$w(x,y)=\int\limits_0^{+\infty}G^+(x,y,t,0)\varphi(t)dt+\int\limits_0^{y}G^+(x,y,0,s)\left\|\begin{matrix}\mu(s)\\0\end{matrix}\right\|ds+$$

$$+\int\limits_0^{y}\int\limits_0^{+\infty}G^+(x,y,t,s)f(t,s)dtds,$$

где $G^+(x,y,t,s) = \|G^+_{ij}(x,y,t,s)\|$ *– матрица с элементами*
$$G^+_{11}(x,y,t,s) = \frac{1}{\lambda} e^{a_0 X} g(Y,X)\eta(X) +$$
$$+ \frac{\sqrt{|a_{12}a_{21}|}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int\limits_0^\infty g(Y,\tau)\left[\frac{\tau+X}{\sqrt{\tau^2-X^2}} h_1(|X|,\tau) - \frac{\tau-X}{\sqrt{\tau^2-X^2}} h_1(|X_1|,\tau)\right] d\tau,$$
$$G^+_{12}(x,y,t,s) = \frac{a_{12}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int\limits_0^\infty g(Y,\tau)\left[h_0(|X|,\tau) - h_0(|X_1|,\tau)\right] d\tau,$$
$$G^+_{21}(x,y,t,s) = \frac{a_{21}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int\limits_0^\infty g(Y,\tau)\left[h_0(|X|,\tau) - h_{1,2}(|X_1|,\tau)\right] d\tau,$$
$$G^+_{22}(x,y,t,s) = \frac{1}{\lambda} e^{a_0 X} g(Y,-X)\eta(-X) +$$
$$+ \frac{\sqrt{|a_{12}a_{21}|}}{2\lambda^2} e^{a_0 X} \int\limits_0^\infty g(Y,\tau)\left[\frac{\tau-X}{\sqrt{\tau^2-X^2}} h_1(|X|,\tau) - \frac{\tau-X}{\sqrt{\tau^2-X^2}} h_1(|X_1|,\tau)\right] d\tau,$$
здесь $X = x - t$, $X_1 = x + t$.

В третьей главе результаты первых двух глав применяются к решению краевых задач для уравнения с оператором дробной диффузии в главной части.

В §1 исследуется задача Коши в нелокальной постановке.

Задача 3.1. *Найти решение* $u(x,y)$ *уравнения*
$$D^\alpha_{0y} u(x,y) - u_{xx}(x,y) + b D^\beta_{0y} u(x,y) + c u(x,y) = f(x,y), \qquad (5)$$
в области $\Omega = \{(x,y) : \ -\infty < x < +\infty, \ 0 < y < T\}$, $T \le \infty$, *такое, что* $y^{1-\alpha} u(x,y) \in C(\bar\Omega)$, u_{xx}, $u_y \in C(\Omega)$, *и удовлетворяющее начальному условию*
$$\lim_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y} u = \tau(x), \ -\infty < x < +\infty,$$
где $\alpha = 2\beta \in (0,1)$, b, c *– заданные действительные числа,* $f(x,y)$, $\tau(x)$ *– заданные функции.*

Методом редукции уравнения (5) к системе уравнений с частными производными дробного порядка доказана

Теорема 3.1. *Пусть* $f(x,y) = O(\exp(x^\varepsilon))$, $\tau(x) = O(\exp(x^\varepsilon))$, $\varepsilon < \frac{1}{1-\beta}$ *при* $|x| \to \infty$ *и* $y^{1-\alpha} f(x,y) \in C(\bar\Omega) \cap C^1(\Omega)$, $\tau(x) \in C^1(-\infty,+\infty)$, *тогда существует единственное решение задачи 3.1, такое, что* $y^{1-\alpha} u(x,y) \in C(\bar\Omega)$, u_{xx}, $u_y \in C(\Omega)$, *и* $u(x,y) = O(\exp(x^\varepsilon))$ *при* $|x| \to \infty$. *Решение задается формулой*
$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,y,t,0)\tau(t)dt + \int\limits_0^y \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,y,t,s) f(t,s) dt ds,$$

где

$$\Gamma(x,y,t,s)=\frac{1}{2}\int\limits_{|x-t|}^{\infty}\frac{e^{a_1\tau}}{y-s}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{\tau}{(y-s)^{\beta}}\right)h_0(x-t,\tau)d\tau,$$

$$h_0(x-t,\tau)=\left\{\begin{array}{c} J_0(|a|\sqrt{\tau^2-(x-t)^2}),\ b^2\le 4c,\\ I_0(a\sqrt{\tau^2-(x-t)^2}),\ b^2\ge 4c,\end{array}\right.$$

$J_0(z)$ *и* $I_0(z)$ *– функции Бесселя,* $a_1=-\frac{b}{2}$, $a=\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$.

В §2 получено общее представление решения уравнения (5) в прямоугольной области.

Теорема 3.2. *Пусть функция* $v=v(x,y,t,s)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) в области $\Omega_y=\{(t,s):\ 0<t<l,\ 0<s<y\}$ *при фиксированных* $(x,y)\in\Omega$ *функция* v *является решением уравнения*

$$\mathbf{L}^*v\equiv D_{ys}^{\alpha}v(x,y,t,s)-v_{tt}(x,y,t,s)+bD_{ys}^{\beta}v(x,y,t,s)+cv(x,y,t,s)=0;$$

2) для любой функции $g(x)\in C[x_1,x_2]$, $0\le x_1<x_2\le l$, *выполняется соотношение*

$$\lim_{s\to y}\int\limits_{x_1}^{x_2}g(t)D_{ys}^{\alpha-1}v(x,y,t,s)dt=g(x),\quad x_1<x<x_2;$$

3) функция v *непрерывна в* $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}_y\setminus\{y=s\}$, *и для любых точек* $(x,y)\in\Omega$ *и* $(t,s)\in\Omega_y$ *выполняется неравенство*

$$|v(x,y,t,s)|<k(y-s)^{-1+\beta},$$

где k *– положительная константа.*

Функция $u(x,y)$ *такова, что* $y^{1-\alpha}u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$, u_{xx}, $u_y\in C(\Omega)$, *производная* u_x *непрерывна вплоть до участков границы* $x=0$ *и* $x=l$, *и* $u(x,y)$ *является решением уравнения (5) удовлетворяющим краевому условию*

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}u(x,s)=\tau(x),\quad 0\le x\le l.$$

Тогда для функции $u(x,y)$ выполняется соотношение

$$u(x,y)=\int\limits_0^y[v(x,y,l,s)u_t(l,s)-v(x,y,0,s)u_t(0,s)-$$

$$-v_t(x,y,l,s)u(l,s)+v_t(x,y,0,s)u(0,s)]ds+$$

$$+\int\limits_0^l\tau(t)v(x,y,t,0)dt+\int\limits_0^l\int\limits_0^y v(x,y,t,s)f(t,s)dtds.$$

В §3 исследуется краевая задача для уравнения (5) в полубесконечной полосе. С помощью метода функции Грина выписано решение и доказана его единственность.

Задача 3.2. *В области $\Omega=\{(x,y):\ 0<x<+\infty,\ 0<y<T\}$, $T\leq\infty$, найти решение $u(x,y)$ уравнения (5), удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y)=\tau(x),\ 0<x<+\infty,$$

$$u(0,y)=\varphi(y),$$

где $\tau(x)$ и $\varphi(y)$ – заданные функции.

Теорема 3.3. *Пусть $f(x,y)=O(\exp(x^\varepsilon))$, $\tau(x)=O(\exp(x^\varepsilon))$, $\varepsilon<\frac{1}{1-\alpha}$, при $x\to+\infty$, $y^{1-\alpha}f(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$, $\tau(x)\in C[0,+\infty)\cap$ $\cap C^1(0,+\infty)$, $y^{1-\alpha}\varphi(y)\in C[0,T]\cap C^1(0,T)$, и выполняется условие согласования $\lim\limits_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}\varphi(y)=\tau(0)$. Тогда существует единственное решение задачи 3.2, такое, что $y^{1-\alpha}u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$, u_{xx}, $u_y\in C(\Omega)$, $u_x\in L(\Omega)$ и $u(x,y)=O(\exp(x^\varepsilon))$ при $x\to+\infty$. Решение представимо в виде*

$$u(x,y)=\int\limits_0^{+\infty}G(x,y,t,0)\tau(t)dt+\int\limits_0^y G_t(x,y,0,s)\varphi(s)ds+$$

$$+\int\limits_0^y\int\limits_0^{+\infty}G(x,y,t,s)f(t,s)dtds,$$

где $G(x,y,t,s) = \Gamma(x,y,t,s) - \Gamma(x,y,-t,s)$, $\Gamma(x,y,t,s)$ *– фундаментальное решение уравнения (5).*

В §4 рассматриваются первая, вторая и смешанные краевые задачи для уравнения (5). Найдены функции Грина этих краевых задач.

Заключение

Выполненные исследования, посвященные основным краевым задачам для широких классов систем линейных нелокальных дифференциальных уравнений с частными производными и уравнения с оператором дробной диффузии в главной части, позволяют сформулировать следующие основные научные результаты диссертационной работы:

1. Для систем нелокальных дифференциальных уравнений:

1.1. Доказана теорема 1.1 об общем представлении решения системы в прямоугольной области. Построена матрица Грина первой краевой задачи.

1.2. Доказаны теоремы 1.2, 1.3, 1.4 существования и единственности решений первой краевой 3.1 и смешанной 3.2 задач.

1.3. Доказаны теоремы 2.1 и 2.2 существования и единственности решений задачи Коши 2.1 в нелокальной постановке и краевой задачи 2.2 в полубесконечной полосе.

1.4. Построена фундаментальная матрица решений системы и матрица Грина краевой задачи в полубесконечной полосе.

1.5. Для фундаментальной матрицы решений системы получена оценка неравенственного типа и изучено асимптотическое поведение на бесконечности.

2. Для линейного нелокального дифференциального уравнения с оператором дробной диффузии в главной части:

2.1. Доказана теорема 3.1, существования и единственности решения задачи Коши 3.1 в нелокальной постановке. Построено фундаментальное решение.

2.2. Доказана теорема 3.4 об общем представлении решения уравнения в прямоугольной области.

2.3. Доказана теорема 3.5, существования и единственности решения краевой задачи 3.2 в полубесконечной полосе и построена ее функция Грина.

2.4. Построены решения и функции Грина первой, второй и смешанных краевых задач.

Публикации по теме диссертации

1. *Мамчуев М.О.* Задача с условием Самарского для системы нелокальных дифференциальных уравнений // IV-й Всероссийский Симпозиум «Математическое моделирование и компьютерные технологии».

Тезисы докладов. – Кисловодск, 20-22 апреля, 2000.

2. *Мамчуев М.О.* Решение краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка // Вторая Международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Тезисы докладов. – Нальчик, 2001. С. 160-161.

3. *Мамчуев М.О.* Краевая задача для системы дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка // Изв. Кабардино-Балкарского Научного Центра РАН. 2002. №1 (8). С. 37-42.

4. *Мамчуев М.О.* Метод матрицы Грина для системы дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка //Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук 2002. Т.6. №1. С. 18-21.

5. *Мамчуев М.О.* Задача Коши в нелокальной постановке для системы дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка // Материалы Международного Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», – Нальчик-Эльбрус, 2003. С. 64-65.

6. *Мамчуев М.О.* Краевые задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка в неограниченных областях //Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук 2003. Т.7. №1. С. 60-63.

7. *Мамчуев М.О.* Краевая задача для системы дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка в прямоугольной области // Сборник трудов Всероссийской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи (ММ-2004)», посвященной к 90-летию СамГТУ, – Самара, 27-28 мая, 2004. Ч. 3. С. 150-152.

8. *Мамчуев М.О.* Смешанная задача для системы дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка //Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук 2004. Т.7. №1. С. 56-59.

9. *Мамчуев М.О.* Метод факторизации в решении задачи Коши для уравнения диффузии дробного порядка //Материалы Международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», – Нальчик-Эльбрус, 2004. С. 129-132.

10. *Мамчуев М.О.* Общее представление решения уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами в прямоугольной области // Изв. Кабардино-Балкарского Научного Центра РАН. 2004. №2 (12). С. 116-118.

11. *Мамчуев М.О.* Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами //Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук 2005. Т.7. №2. С. 38-45.