Хусаинова Эндже Джаудатовна

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ МЕТОДАМИ ФУРЬЕ И ПОТЕНЦИАЛОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Казань — 2004

Работа выполнена на кафедре математического анализа Казанского государственного педагогического университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Мухлисов Фоат Габдуллович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Кожанов Александр Иванович,
кандидат физико-математических наук,
доцент Бурмистров Борис Николаевич

Ведущая организация: Самарский государственный
университет

Защита состоится 30 сентября 2004 года в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, д. 17, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан   августа 2004 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент   *Е. К. Липачев*

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задачи теории дифракции на протяжении многих лет привлекают внимание специалистов в области дифференциальных уравнений с частными производными. Необходимость изучения таких задач обусловлена многочисленными их приложениями в физике, механике сплошных сред, геофизике, океанографии, медицине и т.д. В приложениях также могут возникать задачи дифракции для уравнения Гельмгольца с сингулярным оператором Бесселя, названные нами сингулярными задачами дифракции. Методы исследования сингулярных задач дифракции существенно отличаются от методов исследования задач дифракции. Так, например, потенциалы для сингулярной задачи дифракции строятся с помощью оператора обобщенного сдвига, который представляет собой линейный интегральный оператор, не имеющий обратного. Это обстоятельство порождает отличия в вопросах обоснования и в доказательствах, связанных со сдвигом. Это и обосновывает актуальность выбранного направления исследований.

Для обеспечения единственности решения краевых задач для эллиптических уравнений в неограниченных областях, кроме условий на границе области, необходимо задавать условия на бесконечности. Эти условия, называемые "условиями излучения", для уравнения Гельмгольца впервые были найдены А. Зоммерфельдом. Доказательство принципа излучения для уравнения Гельмгольца было указано в 1933 году В. Д. Купрадзе. Условия излучения и теоремы единственности для уравнения Гельмгольца стали предметом изучения в работах большого круга авторов (Д. З. Авазашвили, И. Н. Векуа, H. Freudenthal, F. Rellich и др.). В этих работах рассматриваются граничные задачи в бесконечных областях, когда среда занимает внешность некоторой ограниченной области. Теорема единственности решения задачи математической теории дифракции для бесконечных областей с границей, простирающейся в бесконечность, впервые была доказана Ф. Г. Мухлисовым.

Среди методов решения краевых задач для эллиптических уравнений с оператором Бесселя серьезного внимания заслуживает метод потенциалов, поскольку с помощью правильно подобранных потенциалов сингулярная задача может быть сведена к регулярной системе интегральных уравнений. Поверхностные потенциалы, построенные Н. Раджабовым, оказались достаточными при полном исследовании основных краевых задач для сингулярного уравнения

$$\Delta_{x'} u + B_{x_p} u = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_{x'} = \sum\limits_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа, $x' = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{p-1})$, $B_{x_p} = \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{k}{x_p}\frac{\partial}{\partial x_p}$ — оператор Бесселя, при условиях, когда нехарактеристическая часть границы есть гиперповерхность Ляпунова и образует с гиперплоскостью $x_p = 0$ прямой угол. Метод потенциалов неоднократно применялся разными авторами к решению краевых задач для эллиптических уравнений как второго порядка, так и высших порядков и систем. Соответствующие работы, обзор которых имеется в литературе (Я. Б. Лопатинский, О. И. Панич и др.), хорошо известны. Впервые Ф. Г. Мухлисову метод потенциалов удалось применить к решению сингулярной задачи дифракции с условиями сопряжения на конечной границе раздела областей.

Целью настоящей работы является доказательство существования единственного решения сингулярных задач математической теории дифракции с условиями сопряжения на конечных и полубесконечных границах раздела областей, а также с условиями сопряжения на конечных границах раздела областей с общей границей.

Методы исследования. В работе применяются методы классической теории потенциала, теории функций действительной переменной, теории функций комплексной переменной, дифференциальных и интегральных уравнений, методы интегральных преобразований и разделения переменных (Фурье).

Научная новизна.

1. Доказательство единственности решения сингулярных задач дифракции с условиями сопряжения на n конечных и полубесконечных границах раздела областей.

2. Доказательство существования решения сингулярных задач дифракции с условиями сопряжения на n конечных границах раздела областей методом потенциалов.

3. Доказательство существования решения сингулярной задачи дифракции с условиями сопряжения на конечных границах раздела областей с общей нехарактеристической границей.

4. Решение сингулярных задач дифракции с условиями сопряжения на двух параллельных полупрямых, на двух полубесконечных кривых и на m концентрических полуокружностях.

Теоретическая и практическая значимость. Данная работа содержит теоретический материал. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки теории дифракции и найти приложение в теории краевых задач для эллиптических уравнений с оператором Бесселя, применяемых при решении многих важных вопросов прикладного характера.

Апробация работы. Данные результаты обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Казанского государственного педагогического университета (руководитель – профессор Мухлисов Ф. Г.). Основные результаты работы докладывались на международной научной конференции "Спектральная теория дифференциальных операторов и смежные вопросы"(Стерлитамак, 1998), международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики", посвященной 40 – летию мехмата КГУ (Казань, 2000), Четвертом Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ – 2000), посвященном памяти М. А. Лаврентьева (Новосибирск, 2000), одиннадцатой межвузовской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи"(Самара, 2001), научной конференции "Проблемы современной математики", посвященной 125 – летию Казанского государственного педагогического университета (Казань, 2001), тринадцатой межвузовской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи"(Самара, 2003), научно – практических итоговых конференциях в Казанском государственном университете и Казанском государственном педагогическом университете.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-9].

Структура и объем работы. Диссертация содержит 105 страниц и состоит из введения, трех глав, разбитых на 10 параграфов и списка литературы из 55 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении дается обзор литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, излагается краткое содержание работы, а также сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

Первая глава диссертации посвящена вопросам единственности решений сингулярных задач дифракции с граничными условиями типа четности на характеристической части границы.

В §1 методом разделения переменных строятся частные решения уравнения

$$\Delta_B u + \lambda^2 u = 0, \ k > 0,$$

где $\Delta_B = \sum\limits_{j=1}^{p-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + B_{x_p}$, в полупространстве $x_p > 0$ p – мерного евклидова пространства, удовлетворяющие на бесконечности условиям излучения. В §2 рассматривается сингулярная задача дифракции: найти четные по x_p решения уравнений

$$\Delta_B u_j + \lambda_j^2 u_j = 0 \ (j = \overline{1, n+1}), \ k > 0, \tag{2}$$

в областях соответственно $T^{(j)}$ $(j = \overline{1, n+1})$, удовлетворяющих на $\Gamma^{(j)}$ $(j = \overline{1, n})$ условиям сопряжения

$$u_j^+ - u_{j+1}^- = f_j(\xi),$$

$$\frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial u_j^+}{\partial n_\xi} - \frac{1}{\alpha_{j+1}} \frac{\partial u_{j+1}^-}{\partial n_\xi} = \varphi_j(\xi) \ (j = \overline{1, n}) \tag{3}$$

и при $R \to \infty$ условиям излучения

$$\int\limits_{S_R^+} |u_{n+1}|^2 x_p^k dS_R^+ = O(1),$$

$$\int\limits_{S_R^+} \left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial r} - i\lambda_{n+1} u_{n+1} \right|^2 x_p^k dS_R^+ = o(1). \tag{4}$$

Здесь $\Gamma^{(j)}$ $(j = \overline{1, n})$ — конечные попарно непересекающиеся гиперповерхности, разбивающие полупространство $E_p^+ = \{(x_1, x_2, \dots x_p) \in E_p : \ x_p > 0\}$ на $n+1$ частей $T^{(j)}$, $\lambda_j^2 = \alpha_j \beta_j$, $\alpha_j > 0$, $\beta_j > 0$ — параметры среды, $f_j(\xi)$, $\varphi_j(\xi)$ – заданные на $\Gamma^{(j)}$ непрерывные и четные по переменной ξ_p функции.

Доказывается единственность решения задачи (2) – (4).

В §3 доказывается единственность решения сингулярной задачи дифракции в случае, когда n непересекающиеся полубесконечные гиперповерхности $\Gamma^{(j)}$ $(j=\overline{1,n})$ разбивают полупространство E_p^+ на $n+1$ частей.

§4 посвящен задаче дифракции с условиями сопряжения на конечных границах раздела областей с общей нехарактеристической границей. Общей границей Γ_1 для областей $T^{(j)}$ $(j=\overline{1,n+1})$ служит гиперплоскость $x_{p-1}=-a_1$ $(a_1>0)$ в полупространстве E_p^+. Задача ставится следующим образом. Требуется найти четные по x_p решения уравнений (2) в областях соответственно $T^{(j)}$ $(j=\overline{1,n+1})$, удовлетворяющие на $\Gamma^{(j)}$ $(j=\overline{1,n})$ условиям сопряжения (3), на общей границе Γ_1 граничным условиям

$$u_j|_{\Gamma_1}=\psi_j(\xi),\ j=\overline{1,n+1}, \tag{5}$$

и при $R\to\infty$ условиям излучения

$$\int\limits_{S_R^{++}}|u_{n+1}|^2\xi_p^k dS_R^+=O(1),$$

$$\int\limits_{S_R^{++}}\left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial r}-i\lambda_{n+1}u_{n+1}\right|^2\xi_p^k dS_R^+=o(1), \tag{6}$$

где $S_R^{++}=S_R^+\cap E_p^{++}$, $E_p^{++}=\{x\in E_p^+ :\ x_{p-1}>-a_1\}$. Доказывается единственность решения поставленной задачи.

Вторая глава диссертации посвящена вопросам существования решения сингулярных задач дифракции с условиями сопряжения на конечных границах раздела областей.

В §1 рассматривается сингулярная задача дифракции: найти четные по x_3 решения уравнений

$$\Delta_B u_j+\lambda_j^2 u_j=0\ (j=\overline{1,\ 4}) \tag{7}$$

в областях соответственно $T^{(j)}$ $(j=\overline{1,\ 4})$, удовлетворяющие на $\Gamma^{(j)}$ $(j=\overline{1,3})$ условиям сопряжения

$$u_j^+-u_{j+1}^-=f_j(\xi),$$

$$\frac{1}{\alpha_j}\frac{\partial u_j^+}{\partial n_\xi} - \frac{1}{\alpha_{j+1}}\frac{\partial u_{j+1}^-}{\partial n_\xi} = \varphi_j(\xi)\ (j = \overline{1,\ 3}), \tag{8}$$

и при $R \to \infty$ условиям излучения

$$\int\limits_{S_R^+} |u_4|^2 \xi_3^k dS_R^+ = O(1),$$

$$\int\limits_{S_R^+} \left| \frac{\partial u_4}{\partial r} - i\lambda_4 u_4 \right|^2 \xi_3^k dS_R^+ = o(1). \tag{9}$$

Решение задачи (7) – (9) ищется в виде

$$u_1(x) = \alpha_1 W_{11}(x,\ \mu_1) + \alpha_1 V_{11}(x,\ \mu_2),$$

$$u_2(x) = \alpha_2 W_{21}(x,\ \mu_1) + \alpha_2 V_{21}(x,\ \mu_2) + \alpha_2 W_{22}(x,\ \mu_3) + \alpha_2 V_{22}(x,\ \mu_4),$$

$$u_3(x) = \alpha_3 W_{32}(x,\ \mu_3) + \alpha_3 V_{32}(x,\ \mu_4) + \alpha_3 W_{33}(x,\ \mu_5) + \alpha_3 V_{33}(x,\ \mu_6),$$

$$u_4(x) = \alpha_4 W_{43}(x,\ \mu_5) + \alpha_4 V_{43}(x,\ \mu_6).$$

Здесь

$$V_{ij}(x, \mu_{2l}) = \int\limits_{\Gamma^{(j)}} \mu_{2l}(\xi)\varepsilon_i(\xi,\ x)\xi_3^k d\Gamma^{(j)},$$

$$W_{ij}(x,\ \mu_{2l-1}) = \int\limits_{\Gamma^{(j)}} \mu_{2l-1}(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\varepsilon_i(\xi,\ x)\xi_3^k d\Gamma^{(j)},$$

$(i = \overline{1,4},\ j = \overline{1,3},\ l = \overline{1,3})$ — поверхностные потенциалы типа потенциалов соответственно простого и двойного слоев с плотностями μ_{2l} и μ_{2l-1}, имеющие на границах $\Gamma^{(j)}$ $(j = 1,3)$ такие же предельные значения, что и их аналоги для уравнения (1), и, удовлетворяющие на бесконечности условиям излучения (9),

$$\varepsilon_i(x,\ \xi) = c_k \int\limits_0^\pi \psi_i(\rho_\varphi)\sin^{k-1}\varphi\ d\varphi,$$

$$\psi_i(r) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)^{\nu} r^{-\nu} H_{\nu}^{(1)}(\lambda_i r) \Big/ \Gamma(\nu)$$

— фундаментальные решения уравнений (7),

$$\rho_\varphi = \left(|x' - \xi'|^2 + x_3^2 + \xi_3^2 - 2x_3\xi_3\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Задача (7) – (9) сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. На основе альтернативы Фредгольма доказывается однозначная разрешимость полученной системы.

В §2 методом потенциалов доказывается существование решения сингулярной задачи дифракции в случае, когда область $E_3^{++} = \{x \in E_3^+ : x_2 > 0\}$ разбивается двумя конечными поверхностями Ляпунова $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$, образующими с плоскостями $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ прямой угол, на три части. Здесь $x_2 = 0$ — нехарактеристическая общая граница.

В §3 результаты §1 обобщаются на случай, когда полупространство E_3^+ разбивается попарно непересекающимися n поверхностями $\Gamma^{(j)}$ $(j = \overline{1,n})$ на $n+1$ частей.

В третьей главе находятся решения плоских сингулярных задач дифракции с условиями сопряжения на двух параллельных полупрямых, на двух полубесконечных кривых и на m концентрических полуокружностях.

В §1 рассматривается сингулярная задача дифракции с условиями сопряжения на двух параллельных полупрямых $\{x = 0,\ y \ge 0\}$ и $\{x = a,\ y \ge 0\}$ об отыскании четных по y решений уравнений

$$\Delta_B u_j + \lambda_j^2 u_j = 0, \tag{10}$$

в областях соответственно $T^{(j)}$ $(j = \overline{1,3})$ удовлетворяющие на полупрямых $\{x = 0,\ y \ge 0\}$, $\{x = a,\ y \ge 0\}$ условиям сопряжения

$$u_j^+ - u_{j+1}^- = f_j(y),$$

$$\frac{1}{\alpha_j}\frac{\partial u_j^+}{\partial x} - \frac{1}{\alpha_{j+1}}\frac{\partial u_{j+1}^-}{\partial x} = \varphi_j(y)\ (j=1,2) \tag{11}$$

и при $R \to \infty$ условиям излучения

$$\int\limits_{C_R^{(j)}} |u_j|^2 y^k dC_R^+ = O(1),$$

$$\int\limits_{C_R^{(j)}} \left|\frac{\partial u_j}{\partial r} - i\lambda_j u_j\right|^2 y^k dC_R^+ = o(1)\ (j=\overline{1,3}). \tag{12}$$

Здесь $C_R^+ = \{(x,y) \in E_2^+ :\ x^2+y^2 = R^2\}$ — полуокружность, $C_R^{(j)} = C_R^+ \cap T^{(j)}$; $f_j(y),\ \varphi_j(y) \in S_B$, S_B — класс четных по y бесконечно дифференцируемых функций $g(y)$, удовлетворяющих неравенству $\left|B_y^m g(y)\right| \le \frac{c_{m\nu}}{(1+y^2)^\nu}$ при всех $\nu, m = 0,1,2,\ldots$.

Решение задачи (10) – (12) представляется в виде интегралов Фурье – Бесселя. Приводится подробное обоснование полученного решения.

В §2 рассмотрена плоская сингулярная задача дифракции об отыскании четных по y решений уравнений (10) в областях $T^{(j)}$ $(j=\overline{1,\ 3})$ соответственно, удовлетворяющих на кривых $\Gamma^{(1)} = \{(x,y) \in E_2^+ :\ x=\varphi_1(y),\ y>0\}$, $\Gamma^{(2)} = \{(x,y) \in E_2^+ :\ x=\varphi_2(y),\ y>0\}$ без общих точек условиям сопряжения (11) и при $R \to \infty$ условиям излучения (12). Решение задачи представляется в виде

$$u_j(x,y) = \frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{jm}e^{-\beta_{jm}x} + B_{jm}e^{\beta_{jm}x}\right)\gamma_m^{2\nu} j_\nu(\gamma_m y),$$

где $j=\overline{1,\ 3}$; γ_m — корни уравнения $J_\nu(y)=0$, $j_\nu(z) = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)J_\nu(z)}{(z)^\nu}$. Неопределенные коэффициенты A_{jm}, B_{jm} определяются из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Доказывается однозначная разрешимость системы.

В §3 рассматривается задача об отыскании решений уравнений (2) при $0 < k < 1$, удовлетворяющие на концентрических полуокружностях $C^{+}_{R_j}$, $j = \overline{1,m}$ с общим центром в начале координат и радиусами R_j, условиям сопряжения (3), при $R \to \infty$ условиям излучения (4) и граничным условиям

$$u_j|_{y=0} = 0 \ (j = \overline{1, m+1}).$$

Решение этой задачи представляется в виде рядов Фурье по системе многочленов Якоби. Приводится обоснование полученного решения.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Ф. Г. Мухлисову за оказанную помощь и ценные советы, которые он давал мне в период написания этой работы.

Публикации автора по теме диссертации

1. Хусаинова Э. Д. О весовых краевых задачах для одного В – эллиптического уравнения / Э. Д. Хусаинова, Ф. Г. Мухлисов // Сборник науч. трудов междунар. науч. конф. "Спектральная теория дифференциальных операторов и смежные вопросы". — Ч. 1. — Стерлитамак, 1998. — С. 51–53.

2. Хусаинова Э. Д. Решение краевой задачи для одного B – эллиптического уравнения в бесконечной области / Э. Д. Хусаинова // Труды математического центра им Н. И. Лобачевского (Материалы Междунар. науч. конф. (Казань, 1.10–3.10.2000)). — Т. 5. — Казань: УНИПРЕСС, 2000. — С. 221–222.

3. Хусаинова Э. Д. Решение задачи типа Дирихле для одного B – эллиптического уравнения в области с бесконечной границей / Э. Д. Хусаинова // Тез. докл. Четвертого Сибир. конгр. по прикл. и индустр. математике (ИНПРИМ – 2000), посвящ. пам. М. А. Лаврентьева. Ч. 1. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Со-

болева СО РАН, 2000. — С. 87–89.

4. Хусаинова Э. Д. Решение задач типа Дирихле для одного B – эллиптического уравнения в областях с бесконечными границами методом Фурье – Бесселя / Э. Д. Хусаинова / Казанский гос. пед. университет. — Казань, 2000. — 16 с. — Деп. в ВИНИТИ 04.07.00, N 1858–В00.

5. Хусаинова Э. Д. Решение одной сингулярной задачи дифракции методом потенциалов / Э. Д. Хусаинова // Труды 11-й межвуз. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи". — Ч. 3. — СамГТУ, ИАР. — Самара, 2001. — С. 129–132.

6. Хусаинова Э. Д. Решение одной сингулярной задачи дифракции с условиями сопряжения на полусфере методом Фурье / Э. Д. Хусаинова // Труды математического центра им Н. И. Лобачевского (Материалы Межвуз. науч. конф. (Казань, 22.10–24.10.2001)). — Т. 11. — Казань: УНИПРЕСС, 2001. — С. 278–281.

7. Хусаинова Э. Д. О некоторых сингулярных задачах дифракции с общей границей / Э. Д. Хусаинова // Известия вузов. Математика. – 2002. — N 9(484). — С. 75–78.

8. Хусаинова Э. Д. Решение одной сингулярной задачи дифракции с условиями сопряжения на двух полусферах методом Фурье / Э. Д. Хусаинова // Труды 13-й межвуз. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи". — Ч. 3. — СамГТУ, ИАР. — Самара, 2003. — С. 164–167.

9. Хусаинова Э. Д. О потенциалах для одного сингулярного эллиптического уравнения / Э. Д. Хусаинова // Вопросы современной математики и информационных технологий в математическом образовании: Сборник науч. трудов молодых математиков КГПУ. — Казанский государственный педагогический университет, 2004. — С. 133–140.