На правах рукописи

Ефимов Антон Валентинович

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И СМЕШАННОГО ТИПОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2004

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Репин Олег Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Плещинский Николай Борисович

доктор физико-математических наук, доцент Пулькина Людмила Степановна

Ведущая организация: Орловский государственный университет

Защита состоится 25 ноября 2004 г. в 15^{00} часов на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, 17, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «___»___________2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. н., доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типов является важнейшим разделом современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. В последние десятилетия исследования в этой области проводились наиболее интенсивно благодаря многочисленным приложениям в газовой динамике, гидромеханике сжимаемой жидкости, безмоментной теории оболочек, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, математической биологии, математическом моделировании различных процессов и явлений в средах с фрактальной структурой и многими другими вопросами механики.

Основы этой теории заложены в известных работах Ф. Трикоми, С. Геллерстедта, К.И. Бабенко, Ф.И. Франкля, М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе. В дальнейших исследованиях отечественных и зарубежных математиков рассматривались проблемы разрешимости известных классических краевых задач, ставились и исследовались новые краевые задачи, благодаря чему теория уравнений гиперболического и смешанного типов вышла на центральное место в теории уравнений с частными производными. Большая заслуга в этом принадлежит И.Н. Векуа, О.А. Олейник, В.П. Михайлову, С.П. Пулькину, В.А. Ильину, Е.И. Моисееву, Л.И. Чибриковой, В.И. Жегалову, А.М. Нахушеву. Интересные результаты получены в работах В.Ф. Волкодавова, Ф.Г. Мухлисова, Н.Б. Плещинского, Р.С. Хайруллина, К.Б. Сабитова, А.Н. Зарубина, О.А. Репина, Л.С. Пулькиной, А.А. Андреева и др.

Наряду с изучением основных краевых задач для уравнений рассматриваемого типа, начиная с семидесятых годов возрос интерес к постановке и исследованию краевых задач качественно нового класса. Эти задачи, получившие название нелокальных задач, возникали при решении многих практических задач, связанных с динамикой почвенной влаги, описанием процесса диффузии частиц в турбулентной плазме, моделированием процесса излучения лазера и диффузии в трехкомпонентных системах. Самому пристальному вниманию нелокальные задачи подверглись после публикации работы А.В Бицадзе и А.А. Самарского, в которой были предложены новые постановки эллиптических задач с нелокальными краевыми условиями.

Существенный вклад в развитие теории нелокальных краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа внесли В.И. Жегалов и А.М. Нахушев, предложившие ряд нелокальных краевых задач нового типа – краевых задач со смещением. Эти задачи сразу вызвали широкий интерес многих авторов: М.М. Смирнова, Х.Ш. Джураева, М.С. Салахитдинова, А.А. Килбаса, О.А. Репина, В.А. Елеева, С.К. Кумыковой и др. Особенно бурно теория задач со смещением стала развиваться в последние годы.

В работах японского математика М. Сайго для гиперболического уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона в краевых условиях появились интегралы и производные дробного порядка с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b;c;z)$ в ядре. На сегодняшний день в математической литературе имеются многочисленные работы, в которых изучены задачи, содержащие операторы Римана-Лиувилля в краевом условии, в то время как нелокальным краевым задачам, содержащим обобщенные операторы М. Сайго, было посвящено сравнительно мало исследований. Нелокальным задачам, содержащим операторы в смысле М. Сайго и операторы подобной структуры, посвятили свои работы М.М. Смирнов, М.С. Салахитдинов, А. Хасанов, О.А. Репин, А.А. Килбас, Д. Аманов, С.И. Макаров, С.Ю. Назаров, А.А. Андреев, Е.Н. Огородников и др.

В связи с этим возникает необходимость дальнейшего развития теории нелокальных краевых задач со смещением для вырождающихся уравнений гиперболического и смешанного типов. Актуальность этих исследований можно обосновать как внутренними потребностями теоретического обобщения классических задач для уравнений математической физики, так и прикладными значениями. Следует также отметить и такой аспект теории краевых задач со смещением, как получение новых результатов в теории дробного интегродифференцирования, а также в области дифференциальных и интегральных уравнений.

Цель работы. Постановка и исследование новых нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений Геллерстедта и Кароля, для уравнения Бицадзе-Лыкова (уравнения влагопереноса), для модельных уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типа с дробной производной первого и второго родов.

Общая методика исследования. В работе широко используется аппарат специальных функций, методы теории интегральных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными и операторов дробного интегродифференцирования, известные принципы экстремума для уравнений смешанного типа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Для гиперболических уравнений Геллерстедта и Кароля в явном виде получены решения двух новых нелокальных задач, краевые условия которых содержат обобщенные операторы дробного интегродифференцирования.
2. Для уравнения влагопереноса при различных значениях коэффициента при младшей производной поставлены и исследованы задачи со смещением с операторами М. Сайго и Римана-Лиувилля в краевом условии.
3. Для модельных уравнений эллиптико-гиперболического типа первого и второго родов доказаны существование и единственность решений четырех новых нелокальных задач со смещением, содержащих обобщенные дробные операторы в краевом условии.
4. Выявлены условия, обеспечивающие выполнение принципов

экстремума при доказательстве единственности решений.

5. Доказаны существование и единственность решения нелокальных задач для параболо-гиперболических уравнений первого и второго родов с частной дробной производной Римана-Лиувилля и наличием обобщенных операторов М. Сайго в краевом условии. Решение поставленных задач ищется в области с неограниченной параболической частью различного вида.
6. Установлены ограничения на параметры операторов М. Сайго, при которых справедливы теоремы единственности и существования решения всех поставленных задач.

На защиту выносятся:

1) доказательство единственности и существования решения новых нелокальных задач, краевые условия которых содержат обобщенные операторы дробного интегродифференцирования;
2) исследование задач со смещением для смешанных уравнений эллиптико-гиперболического типа первого и второго родов;
3) постановка и разрешимость нелокальных задач для параболо-гиперболических уравнений первого и второго родов с частной дробной производной Римана-Лиувилля и наличием обобщенных операторов М. Сайго в краевом условии;
4) доказательство справедливости ограничений на параметры обобщенных операторов с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре, при которых имеют место все сформулированные в работе положения.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Она является продолжением развития теории нелокальных краевых задач для вырождающихся уравнений гиперболического и смешанного типов

Методы исследования могут быть применены для решения и исследования широкого класса краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа, а также прикладных задач, приводящих к таким уравнениям.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации представлены на:

- втором Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Самара, 2001 г.);
- научной конференции «Проблемы современной математики», посвященной 125-летию Казанского государственного педагогического университета (Казань, 2001 г.);
- международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» в Мордовском государственном университете (Саранск, 2002 г.);
- международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» в Самарском государственном

архитектурно-строительном университете (Самара, 2002 г.);
- третьей Всероссийской молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2003» в Казанском государственном университете (Казань, 2003 г.);
- межвузовских конференциях «Математическое моделирование и краевые задачи» в Самарском государственном техническом университете (Самара, 2003-2004 гг.);
- международных научных конференциях молодых ученых «Актуальные проблемы современной науки» в Самарском государственном техническом университете (Самара, 2002, 2004 гг.);
- международной научной конференции «Современные проблемы математической физики и информационной технологии» (Ташкент, 2003 г.);
- международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами» (Душанбе, 2003 г.);
- международном российско-казахском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (Нальчик, 2004 г.);
- десятой международной научной конференции имени академика М. Кравчука в Национальном техническом университете Украины «КПИ» (Киев, 2004 г.);
- семинарах кафедры прикладной математики и информатики СамГТУ в 2003-2004 гг. (руковод. – д. ф.-м. н., проф. Радченко В.П.);
- семинаре кафедры «Дифференциальные уравнения» в КГУ в 2004 г. (руковод. – д. ф.-м. н., проф. Жегалов В.И.);

Публикации. Шестнадцать работ [1-16], опубликованных автором по теме диссертации, отражают ее основные результаты. Список статей приведен в конце автореферата. Результаты, полученные в совместной с научным руководителем работе [2], принадлежат авторам в равной мере.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 120 страницах и состоит из введения, двух глав, включающих 9 параграфов и библиографического списка использованных источников, включающего 120 наименований. Нумерация формул тройная: первая цифра указывает номер главы, вторая – номер параграфа, а третья – номер формулы в нем.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, приведен обзор результатов исследований по ее тематике, кратко изложено содержание работы и методика исследований, приведены основные результаты.

Глава 1 посвящена нелокальным краевым задачам со смещением для дифференциальных уравнений гиперболического типа.

§ 1.1 носит вспомогательный характер. В нем содержатся определения основных объектов исследования диссертации – операторов дробного интегродифференцирования М. Сайго, их связь с операторами Римана-Лиувилля, а также необходимые свойства и композиционные тождества. Приведен ряд лемм, посвященных вопросам действия обобщенных операторов в обычных и весовых пространствах Гельдера.

Будем в дальнейшем обозначать: $\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi\right)(x)$ и $\left(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi\right)(x)$ – операторы в смысле М.Сайго; $\left(I_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(x)$ – оператор Римана-Лиувилля; J – единичный интервал $0<x<1$, $\bar{J}$ – единичный отрезок $0\le x\le 1$ прямой $y=0$; $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ – аффиксы точек пересечения характеристик рассматриваемых уравнений, выходящих из точки $(x,0)\in J$, с характеристиками AC и BC соответственно.

§ 1.2 посвящен исследованию нелокальной краевой задачи для гиперболического уравнения первого рода (уравнения Геллерстедта)

$$(-y)^m U_{xx}-U_{yy}=0,\ m=const>0,\ y\le 0. \qquad (1)$$

В полуплоскости $y\le 0$ уравнение (1) обладает двумя семействами характеристик:

$$AC:\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,\ BC:\eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1. \qquad (2)$$

Уравнение (1) рассматривается в конечной области D, ограниченной интервалом $(0,1)$ и характеристиками (2) уравнения (1).

Задача 1.1. Найти функцию $U(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и краевым условиям

$$U(x,0)=\tau(x)\quad \forall x\in\bar{J}, \qquad (3)$$

$$A_1\left(I_{0+}^{\Delta_1,-\beta-\Delta_1,\beta-1-\Delta_1}U[\theta_0(t)]\right)(x)+B_1\left(I_{1-}^{\Delta_1,\Delta_2,\beta-1-\Delta_1}U[\theta_1(t)]\right)(x)+$$
$$+\left(A_2 I_{0+}^{\alpha_1,\beta_1,\beta-1-\Delta_1}+B_2 I_{1-}^{\alpha_2,\beta_2,\eta_2}\right)U(x,0)+$$
$$+\left(A_3 I_{0+}^{\Delta_1+1-\beta}+B_3 I_{1-}^{\Delta_1+1-\beta,\Delta_2+2\beta-1,\beta-1-\Delta_1}\right)U_y(x,0)=\varphi(x)\quad \forall x\in J, \qquad (4)$$

где A_i, B_i, $i=1,2,3$ – заданные константы; $\varphi(x),\tau(x)$ – заданные функции, такие, что

$$\varphi(x)\in H^{\lambda}[0,1]\cap C^2(0,1), \qquad (5)$$

$$\tau(x)\in H_0^{\lambda_1}[0,1]\cap C^2(0,1); \qquad (6)$$

$\Delta_1,\Delta_2,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\ \beta_2,\eta_2,\lambda,\lambda_1,\lambda_2$ – действительные числа, причем

$$\Delta_1\in(-\beta,0)\cup(0,\beta),\ \beta=\frac{m}{2(m+2)},\ 0<\beta<\frac{1}{2},\ \Delta_2<0,\ \alpha_2>0,$$

$$\beta_2<\min[0,\eta_2+1],\ \Delta_1+1-\beta<\lambda\le 1,\ 1-2\beta<\lambda_1<1,\ 0<\lambda_2<\beta-\Delta_1,$$

$$\beta_1<\beta-1-\Delta_1,\ \Delta_1+1-\beta<\min[\lambda_1,-\Delta_2]\le 1,\ \Delta_1+1-\beta<\min[\lambda_1,-\beta_2]\le 1,$$

$$0<\min[\lambda_1,\beta-1-\Delta_1-\beta_1]<1 \text{ при } \alpha_1>\Delta_1+1-\beta \text{, (либо}$$
$$0<\min[\lambda_1+\alpha_1+\beta-1-\Delta_1,\beta-1-\Delta_1-\beta_1]<1 \text{ при } 0<\alpha_1<\Delta_1+1-\beta \text{).} \quad (7)$$

Доказана

Теорема 1.1. Пусть справедливы неравенства (7), A_i и B_i $(i=1,2,3)$ – ненулевые константы, функции $\varphi(x)$ и $\tau(x)$ удовлетворяют соответственно условиям (5) и (6).

Тогда поставленная задача 1.1 (3), (4) для уравнения (1) имеет единственное решение $U(x,y)$, определяемое формулой

$$U(\xi,\eta)=\gamma_1\int_\xi^\eta \frac{(\eta-\xi)^{1-2\beta}\tau(t)dt}{(\eta-t)^{1-\beta}(t-\xi)^{1-\beta}}-\gamma_2\int_\xi^\eta \frac{\nu(t)dt}{(\eta-t)^{\beta}(t-\xi)^{\beta}},$$

где $\nu(x)=\mu(x)x^{\beta-1-\Delta_1}(1-x)^{\Delta_1+\Delta_2+\beta}$, $\nu(x)\in H_0^{\lambda_2}(x^{\Delta_1+1-\beta};[0,1])$, $\gamma_1=\dfrac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}$,

$\gamma_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\dfrac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$, при выполнении одного из трех наборов условий:

1. $d(x)=a^2(x)+b^2\neq 0$ $(x\in\overline{J})$, $-\beta-\Delta_1<\Delta_2<0$, $b=K_2\sin\pi(\beta-\Delta_1)$,

$a(x)=K_1(1-x)^{\Delta_1+\Delta_2+\beta}-K_2\cos\pi(\beta-\Delta_1)$, $K_1=A_3-A_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)$,

$K_2=B_3-B_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)$, $\theta(x)=\arg\left(\dfrac{a(x)-ib}{a(x)+ib}\right)$, $0\le\theta=\theta(0)<2\pi$,

$$F(x)=x^{\Delta_1+1-\beta}\left(I_{0+}^{\beta-1-\Delta_1}g\right)(x),\quad g(x)=\varphi(x)-A_1\gamma_1\Gamma(\beta)\left(I_{0+}^{\Delta_1+\beta,-\beta-\Delta_1,\beta-1-\Delta_1}\tau\right)(x)-$$
$$-B_1\gamma_1\Gamma(\beta)\left(I_{1-}^{\Delta_1+\beta,\Delta_2,\beta-1-\Delta_1}\tau\right)(x)-\left(A_2I_{0+}^{\alpha_1,\beta_1,\beta-1-\Delta_1}+B_2I_{1-}^{\alpha_2,\beta_2,\eta_2}\right)\tau(x),$$

$$\mu(x)=\frac{a(x)F(x)}{d(x)}-\frac{bZ_0(x)}{\pi d(x)}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\frac{\theta}{2\pi}}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\Delta_1+1-\beta}\frac{F(t)dt}{Z_0(t)(t-x)},$$

$$Z_0(x)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{\theta(t)dt}{t-x}+\frac{\theta\ln x}{2\pi}+(\Delta_1+1-\beta)\ln(1-x)\right\}.$$

2. $d=a^2+b^2\neq 0$ $(x\in\overline{J})$, $a=K_1-K_2\cos\pi(\beta-\Delta_1)$, $b=K_2\sin\pi(\beta-\Delta_1)$,

$$\int_0^1\frac{F(t)dt}{t^{1-\frac{\theta}{2\pi}}(1-t)^{\frac{\theta}{2\pi}}}=0,\quad \mu(x)=\frac{aF(x)}{d}-\frac{b}{\pi d}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\frac{\theta}{2\pi}}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\frac{\theta}{2\pi}}\frac{F(t)dt}{t-x},\quad \Delta_2=-\beta-\Delta_1.$$

3. $d_1(x)=a_1^2(x)+b_1^2(x)\neq 0$ $(x\in\overline{J})$, $b_1(x)=K_2(1-x)^{-\Delta_1-\Delta_2-\beta}\sin\pi(\beta-\Delta_1)$,

$a_1(x)=K_1-K_2(1-x)^{-\Delta_1-\Delta_2-\beta}\cos\pi(\beta-\Delta_1)$, $\theta_1(x)=\arg\left(\dfrac{a_1(x)-ib_1(x)}{a_1(x)+ib_1(x)}\right)$,

$0\le\theta=\theta_1(0)<2\pi$, $\Delta_2<-\beta-\Delta_1$, $F_1(x)=x^{\Delta_1+1-\beta}(1-x)^{-\Delta_1-\Delta_2-\beta}\left(I_{0+}^{\beta-1-\Delta_1}g\right)(x)$,

$$\mu(x)=\frac{a_1(x)F_1(x)}{d_1(x)}-\frac{b_1(x)Z_0(x)}{\pi d_1(x)}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\frac{\theta}{2\pi}}\frac{F_1(t)}{Z_0(t)(t-x)}dt\,, \qquad \int_0^1\frac{F_1(t)dt}{t^{1-\frac{\theta}{2\pi}}Z_0(t)}=0\,,$$

$$Z_0(x)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{\theta_1(t)dt}{t-x}+\frac{\theta\ln x}{2\pi}\right\}.$$

В § 1.3 рассматривается нелокальная краевая задача для гиперболического уравнения второго рода (уравнения Кароля)

$$U_{xx}-(-y)^m U_{yy}=0\,,\ 0<m<1\,,\ y\le 0\,. \qquad (8)$$

Уравнение (8) рассматривается в конечной области D, ограниченной интервалом $(0,1)$ и характеристиками

$$AC:\xi=x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0\,,\ BC:\eta=x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1 \qquad (9)$$

уравнения (8).

Задача 1.2. Найти функцию $U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению (8), краевым условиям (3) и

$$A_1\left(I_{0+}^{\Delta_1,-\beta-\Delta_1,\beta-1-\Delta_1}U\left[\theta_0(t)\right]\right)(x)+\left(A_2 I_{0+}^{\alpha_1,\beta_1,\beta-1-\Delta_1}+B_2 I_{1-}^{\alpha_2,\beta_2,\eta_2}\right)U(x,0)+$$
$$+\left(A_3 I_{0+}^{\Delta_1+1-\beta}+B_3 I_{1-}^{\Delta_1+1-\beta,\Delta_2,\beta-1-\Delta_1}\right)U_y(x,0)=\varphi(x)\quad \forall x\in J\,,$$

где A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 – заданные константы; $\varphi(x)$, $\tau(x)$ – заданные функции, такие, что выполняются условия (5) и $\tau(x)\in H_0^{\lambda_1}[0,1]\cap C'(0,1)$, $\Delta_1,\Delta_2,\alpha_1,\beta_1,\ \alpha_2,\beta_2,\eta_2,\lambda,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ – действительные числа, причем

$$\Delta_1\in(-\beta,0)\cup(0,\beta)\,,\ \beta=\frac{m}{2(m-2)},\ -\frac{1}{2}<\beta<0\,,\ \Delta_2<0\,,\ \Delta_1+1-\beta<\lambda\le 1,$$

$$\beta_1<\beta-1-\Delta_1\,,\ 0<\lambda_2<\beta-\Delta_1\,,\ \alpha_2>0\,,\ 0<\lambda_3<1,\ \ \beta_2<\min[0,\eta_2+1]\,,$$

$\Delta_1+1-\beta<\min[\lambda_1,-\beta_2]\le 1$, $0<\min[\lambda_1,\beta-1-\Delta_1-\beta_1]<1$ при $\alpha_1>\Delta_1+1-\beta$ (либо $0<\min[\lambda_1+\alpha_1+\beta-1-\Delta_1,\beta-1-\Delta_1-\beta_1]<1$ при $0<\alpha_1<\Delta_1+1-\beta$).

Доказана теорема существования и единственности решения задачи 1.2, аналогичная теореме 1.1.

В §§ 1.4-1.5 поставлены и исследованы краевые задачи 1.3-1.4 для уравнения Бицадзе-Лыкова

$$y^2U_{xx}-U_{yy}+aU_x=0\,,\ a=const\,. \qquad (10)$$

Уравнение (10) рассматривается в конечной области D, ограниченной интервалом $(0,1)$ и характеристиками

$$AC=\{(x,y):x-\frac{y^2}{2}=0,y\le 0\}\,,\ BC=\{(x,y):x+\frac{y^2}{2}=1,y\le 0\}$$

уравнения (10).

Задача 1.3. Найти функцию $U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению (10) ($a=1$) в области D, краевым условиям (3) и

$$A_1\left(I_{0+}^{\alpha}U[\theta_0(t)]\right)(x)+B_1\left(I_{1-}^{\alpha-\frac{1}{2},c,-\alpha-\frac{1}{2}}U[\theta_1(t)]\right)(x)+$$

$$+\left(A_2 I_{0+}^{\alpha_1,\beta_1,\eta}+B_2 I_{1-}^{\alpha_2,\beta_2,\eta_2}\right)U(x,0)+$$

$$+\left(A_3 I_{0+}^{\alpha+\frac{1}{2}}+B_3 I_{1-}^{\alpha+\frac{1}{2},c-\frac{1}{2},-\alpha-\frac{1}{2}}\right)U_y(x,0)=\varphi(x)\ \ \forall x\in J,$$

где $\varphi(x)$ и $\tau(x)$ – известные функции, такие, что выполняются условия (5) и (6), A_i, B_i $(i=1,2,3)$ – заданные константы; $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,c,\eta,\eta_2,\lambda,\lambda_1,\lambda_2$ – действительные числа, причем

$$0<\alpha<\frac{1}{2},\ c<\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{1}{2}<\lambda\le 1,\ \frac{1}{2}<\lambda_1<1,\ 0<\lambda_2<\frac{1}{2}-\alpha,$$

$$\beta_2<\min[0,\eta_2+1],\ \eta>-1,\ 0<\min[\lambda_1,-\beta_1-\alpha-\frac{1}{2}]<1 \text{ при } \alpha_1>\alpha+\frac{1}{2} \text{ (либо}$$

$$0<\min[\lambda_1+\alpha_1-\alpha-\frac{1}{2},\ -\beta_1-\alpha-\frac{1}{2}]<1 \text{ при } 0<\alpha_1<\alpha+\frac{1}{2}),$$

$$\alpha_2>0,\ \alpha+\frac{1}{2}<\min[\lambda_1,-\beta_2]\le 1,\ \beta_1<-\alpha-\frac{1}{2}.$$

Задача 1.4. Найти функцию $U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению (10) ($a=-1$) в области D и краевым условиям (3) и

$$A_1\left(I_{0+}^{\alpha,-\alpha-\frac{1}{2},-\alpha-1}U[\theta_0(t)]\right)(x)+B_1\left(I_{1-}^{\alpha+\frac{1}{2},c,-\alpha-1}U[\theta_1(t)]\right)(x)+$$

$$+\left(A_2 I_{0+}^{\alpha_1,\beta_1,-\alpha-1}+B_2 I_{1-}^{\alpha_2,\beta_2,\eta_2}\right)U(x,0)+$$

$$+\left(A_3 I_{0+}^{\alpha+1}+B_3 I_{1-}^{\alpha+1,c-\frac{1}{2},-\alpha-1}\right)U_y(x,0)=\varphi(x)\ \ (x\in J),$$

где $\varphi(x)$ и $\tau(x)$ – известные функции, такие, что выполняются условия (5) и (6); A_i, B_i $(i=1,2,3)$ – заданные константы; $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\ \beta_2,c,\eta_2,\lambda,\lambda_1,\lambda_2$ – действительные числа, причем

$$-\frac{1}{2}<\alpha<0,\ c<0,\ \alpha+1<\lambda\le 1,\ \alpha+1<\lambda_1\le 1,\ 0<\lambda_2<-\alpha,$$

$$\alpha+1<\min[\lambda_1,-c]\le 1,\ \beta_1<-\alpha-1,\ \beta_2<\min[0,\eta_2+1],\ \alpha+1<\min[\lambda_1,-\beta_2]\le 1,$$

$$\alpha_2>0,\ 0<\min[\lambda_1,\ -\beta_1-\alpha-1]<1 \text{ при } \alpha_1>\alpha+1 \text{ (либо}$$

$$0<\min[\lambda_1+\alpha_1-\alpha-1,\ -\beta_1-\alpha-1]<1 \text{ при } 0<\alpha_1<\alpha+1).$$

Для задач 1.3-1.4 доказаны теоремы существования и единственности решения, аналогичные теореме 1.1.

Во **второй главе** речь идет о нелокальных краевых задачах для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа и уравнений параболо-гиперболического типа с частной дробной производной Римана-Лиувилля.

В § 2.1 поставлена и изучена нелокальная краевая задача 2.1 для эллиптико-гиперболического уравнения второго рода

$$U_{xx} + \operatorname{sgn} y \, |y|^m \, U_{yy} = 0, \ (0 < m < 1) . \tag{11}$$

Уравнение (11) рассматривается в односвязной области D, ограниченной кривой Жордана Γ, с концами в точках $A(0,0)$ и $B(0,1)$, расположенной в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками (9) уравнения (11).

Задача 2.1. Найти функцию $U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D_1 \cup J) \cap \cap C^1(D_2 \cup J) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, удовлетворяющую уравнению (11) в каждой из областей D_1 и D_2, краевым условиям

$$U(x, y)\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y) \ \ \forall (x, y) \in \Gamma , \tag{12}$$

$$Ax^{1-2\beta+b}\left(I_{0+}^{-\beta-c,b,c} t^{2\beta-1} U[\theta_0(t)]\right)(x) = B\left(I_{0+}^{-c,0,-1+2\beta+c-b} \alpha(t) U(t,0)\right)(x) +$$
$$+\left(I_{0+}^{\alpha_1,\beta_1,-1+2\beta+c-b} \Psi_1(t)\right)(x) \ \ \forall x \in J$$

и условиям сопряжения

$$U(x,-0) = U(x,+0), \ U_y(x,-0) = -U_y(x,+0) .$$

Здесь $\Psi_1(x), \varphi(x, y), \alpha(x)$ – заданные непрерывные функции; A, B – заданные константы; $\beta = \dfrac{m}{2(m-2)}$, $-\dfrac{1}{2} < \beta < 0$; $b, c, \alpha_1, \beta_1, \lambda, \lambda_2$ – действительные числа, причем выполняются условия

$\Psi_1(x) \in H^{\lambda}[0,1]$, $0 < \lambda \le 1$, $c < 1-2\beta$, $\alpha_1 > 1-2\beta-c$ (или $0 < \alpha_1 < 1-2\beta-c$),

$$\beta_1 < \min[0,1-b] + 2\beta - 1 , \ \frac{B}{A}\alpha(x) + k_0\Gamma(1-\beta) > 0 .$$

Единственность решения задачи 2.1 доказывается с помощью аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе, а вопрос существования решения данной задачи сводится к разрешимости уравнения Фредгольма второго рода.

В § 2.2 рассматривается уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$\operatorname{sgn} y \, |y|^m \, U_{xx} + U_{yy} = 0, \ (m > 0) \tag{13}$$

в односвязной области D, ограниченной кривой Жордана Γ, с концами в точках $A(0,0)$ и $B(0,1)$, расположенной в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками (2) уравнения (13).

Обозначим через D_1 и D_2 – эллиптическую и гиперболическую части смешанной области D соответственно.

Регулярным в области D решением уравнения (13) назовем функцию $U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^2(D_1\cup D_2)$, удовлетворяющую уравнению (13) в D_1 и D_2, и такую, что $U_y(x,0)$ на концах интервала $(0,1)$ может обращаться в бесконечность порядка ниже $1-2\beta$.

Задача 2.2. Найти регулярное в области D решение $U(x,y)$ уравнения (13), удовлетворяющее условиям (12),

$$Ax^{1-2\beta+b}\left(I_{0+}^{-\beta-c,b,c}t^{2\beta-1}U[\theta_0(t)]\right)(x)=B\left(I_{0+}^{1-2\beta-c,2\beta-1,-1+2\beta+c-b}\alpha(t)U_y(t,0)\right)(x)+$$
$$+\left(I_{0+}^{\alpha_1,\beta_1,-1+2\beta+c-b}\Psi_1(t)\right)(x)\quad \forall x\in J$$

и условиям сопряжения

$$U(x,-0)=U(x,+0)\,,\; U_y(x,-0)=U_y(x,+0)\,.$$

Здесь A,B $(AB<0)$ – заданные константы; $\beta=\dfrac{m}{2(m+2)}$, $0<\beta<\dfrac{1}{2}$; $\Psi_1(x),\varphi(x,y),\alpha(x)$ – заданные непрерывные функции, $\alpha(x)$ – неубывающая неотрицательная функция из класса $C^{(0,k)}(\overline{J})$, $k>1-2\beta$; $b,c,\alpha_1,\beta_1,\lambda,\lambda_2$ – действительные числа, причем

$$\Psi_1(x)\in H^{\lambda}[0,1]\,,\;0<\lambda\le 1\,,\;c<0\,,\;\alpha_1>1-2\beta-c\;\text{(или}\;0<\alpha_1<1-2\beta-c\text{)},$$
$$\beta_1<\min[0,1-b]+2\beta-1\,.$$

Как и в случае задачи 2.1, единственность решения задачи 2.2 вытекает из аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе. Вопрос же разрешимости задачи 2.2, с помощью известного метода регуляризации Карлемана-Векуа, сведен к вопросу разрешимости уравнения Фредгольма второго рода. Безусловная разрешимость этого уравнения следует из единственности решения задачи 2.2.

В § 2.3 рассматривается параболо-гиперболическое уравнение

$$0=\begin{cases}U_{xx}-D_{0+,y}^{\alpha}U, & y>0,\\ (-y)^m U_{xx}-U_{yy}, & y<0, m>-1, m\neq 0,\end{cases}\tag{14}$$

которое имеет вырождение первого рода при $m>0$ и вырождение второго рода при $-1<m<0$.

Здесь $D_{0+,y}^{\alpha}$ – частная дробная производная Римана-Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$ от функции $U(x,y)$ по второй переменной:

$$\left(D_{0+,y}^{\alpha}U\right)(x,y)=\frac{d}{dy}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y\frac{U(x,t)}{(y-t)^{1-\alpha}}dt\quad(0<\alpha<1, y>0)\,.$$

Пусть $D=D^+\cup D^-$, где $D^+=\{(x,y):0\le x\le 1, y>0\}$ – полуполоса, а D^- – область, лежащая в нижней полуплоскости $(y<0)$, ограниченная характеристиками уравнения (14) и отрезком $[0,1]$ прямой $y=0$.

Задача 2.3. Найти решение $U(x,y)$ уравнения (14) при $m>0$, в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$U(0,y)=\varphi_1(y),\ U(1,y)=\varphi_2(y), \tag{15}$$

$$A_1 x^{1-2\beta+b}\left(I_{0+}^{-\beta-c,b,c}t^{2\beta-1}U[\theta_0(t)]\right)(x)+A_2\left(I_{0+}^{-c,0,-1+2\beta+c-b}U(t,0)\right)(x)+$$
$$+A_3\left(I_{0+}^{1-2\beta-c,2\beta-1,-1+2\beta+c-b}U_y(t,0)\right)(x)=g(x)\ \ \forall x\in J, \tag{16}$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}U(x,y)=\lim_{y\to 0-}U(x,y)\ \ (x\in \overline{J}), \tag{17}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}U(x,y)\right)_y=\lim_{y\to 0-}U_y(x,y)\ \ (x\in J). \tag{18}$$

Задача 2.4. Найти решение $U(x,y)$ уравнения (14) при $-1<m<0$, в области D, удовлетворяющее краевым условиям (15)-(16), а также условиям сопряжения (17)-(18).

Здесь $g(x)\in C(\overline{J})\cap C^2(J)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ – заданные функции, такие, что $y^{1-\alpha}\varphi_1(y),\ y^{1-\alpha}\varphi_1(y)\in C(\overline{D^+})$, $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$; $\beta=\dfrac{m}{2(m+2)}$, A_1, A_2, A_3, b, c – действительные числа, причем, A_1 и A_2 числа одинаковых знаков, A_1 и A_3 – противоположных знаков, а $c<0$.

Решения $U(x,y)$ поставленных задач ищутся в классе дважды дифференцируемых функций в области D, таких что

$$y^{1-\alpha}U(x,y)\in C(\overline{D^+}),\ U(x,y)\in C(\overline{D^-}),$$
$$y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}U)_y\in C(D^+\cup\{(x,y):0<x<1, y=0\}),$$
$$U_{xx}\in C^2(D^+\cup D^-),\ U_{yy}\in C^2(\overline{D^-}).$$

Единственность решений задач 2.3-2.4 вытекает из аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе. Существование решения задач 2.3-2.4 доказывается путем сведения задач 2.3-2.4 к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\nu(x)=C(x)+\frac{B_1}{\Gamma(1+2\beta)}\int_0^x \nu(t)(x-t)^{2\beta}\,dt,$$

где $B_1=const$, $C(x)\in L[a,b]$, $L[a,b]$ - пространство действительных функций $\varphi(x)$ с конечной нормой $\|\varphi\|_0=\int_a^b|\varphi(t)|dt$, и последующим использованием теоремы, приведенной в книге М.М. Джрбашяна «Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области»

Теорема 2.1. Пусть функция $f(x)\in L[a,b]$. Тогда интегральное уравнение

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(1/\rho)} \int_a^x (x-t)^{1/\rho - 1} u(t)dt ,$$

где $\rho > 0$, λ – произвольный комплексный параметр, имеет единственное решение

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x (x-t)^{1/\rho-1} E_\rho \left[\lambda (x-t)^{1/\rho}; 1/\rho\right] f(t)dt ,$$

принадлежащее $L[a,b]$.

Здесь

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)} \equiv E_{1/\rho,\mu}(z)$$

функция типа Миттаг-Леффлера, которая является целой функцией (комплексной) переменной $z = x + iy$ порядка $\rho > 0$. При $\mu = 1$ эта функция совпадает с функцией Миттаг-Леффлера $E_{1/\rho}(z) \equiv E_\rho(z;1)$.

Приведенная теорема, позволяет записать решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода в явном виде:

$$\nu(x) = C(x) + B_1 \int_0^x (x-t)^{2\beta} E_{\frac{1}{1+2\beta}} \left[B_1 (x-t)^{1+2\beta}; 1+2\beta\right] C(t)dt .$$

Используя функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из параболической и гиперболической частей области D, находим функцию $\tau(x)$ в каждой из областей D^+ и D^-, и получаем решение задач 2.3-2.4 в каждой из областей, а значит, и их решение в заданном классе функций в области D.

В § 2.4 поставлены и исследованы две нелокальные краевые задачи 2.5 и 2.6 для уравнения (14).

Пусть $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x,y): -\infty < x < \infty, y > 0\}$ – верхняя полуплоскость, D^- – область, лежащая в нижней полуплоскости $(y < 0)$ и ограниченная характеристиками уравнения (14) и отрезком $[0,1]$ прямой $y = 0$; $g(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$ – заданная функция, $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$, A_1, A_2, A_3, b, c – действительные числа, причем, A_1 и A_2 числа одинаковых знаков, A_1 и A_3 – противоположных знаков, а $c < 0$.

Задача 2.5. Найти решение $U(x,y)$ уравнения (14) при $m > 0$, в области D, удовлетворяющее краевым условиям (16) и

$$\lim_{y \to 0} y^{1-\alpha} U(x,y) = 0 , \; -\infty < x \le 0 , \; 1 \le x < \infty , \tag{19}$$

а также условиям сопряжения (17)-(18).

Задача 2.6. Найти решение $U(x,y)$ уравнения (14) при $-1<m<0$, в области D, удовлетворяющее краевым условиям (16) и (19), а также условиям сопряжения (17)-(18).

Для доказательства единственности и существования решений задач 2.5-2.6 применяется методика решения задач 2.3-2.4.

Отметим, что решения исследуемых задач 2.3-2.6 найдены в явном виде.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Репину Олегу Александровичу за поддержку и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Ефимов А.В. Некоторые краевые задачи для вырождающегося уравнения гиперболического типа. / А.В. Ефимов // Тезисы докладов XXVII самарской областной студенческой научной конференции. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2001. – С. 79.
2. Ефимов А.В. Аналог задачи А.М. Нахушева для уравнения Геллерстедта. / А.В. Ефимов, О.А. Репин // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т.8. Вып.1. – М.: Научное изд-во «ТВП», 2001. – С. 169.
3. Ефимов А.В. Нелокальная краевая задача для уравнения Геллерстедта в характеристической области. / А.В. Ефимов // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 11. – Казань: Изд-во «Унипресс», 2001. – С. 83-87.
4. Ефимов А.В. Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения Геллерстедта. / А.В. Ефимов // Актуальные проблемы современной науки. Труды 3-й международной конференции молодых ученых. Самара, 30 сентября - 2 октября, 2002. Ч.1. Математика. Механика. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2002. – С. 13-14.
5. Ефимов А.В. Краевая задача для уравнения смешанного типа второго рода. / А.В. Ефимов // Дифференциальные уравнения и их приложения. Сборник трудов международной научной конференции. Самара, 26-31 мая, 2002. – Самара: Изд-во СамГАСА, 2002. – С. 113-116.
6. Ефимов А.В. Две нелокальные краевые задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа с дробной производной. / А.В. Ефимов // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 21. – Казань: Изд-во «Унипресс», 2003. – С. 108-110.
7. Ефимов А.В. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с дробной производной. / А.В. Ефимов // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды тринадцатой межвузовской конференции. Самара, 29-31 мая, 2003. Ч.3. Секция «Дифференциальные уравнения и краевые задачи». – Самара: Изд-во СамГТУ, 2003. – С. 60-66.
8. Ефимов А.В. О задаче со смещением для уравнения смешанного типа первого рода. / А.В. Ефимов // Вестник СамГТУ. Серия «Физико-математические науки». Вып. 19. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2003. – С. 29-33.

9. Ефимов А.В. О нелокальной задаче для параболо-гиперболического уравнения с дробной производной. / А.В. Ефимов // Труды международной научной конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 25-28 октября, 2003. – Душанбе: Изд-во «Нодир», 2003. – С. 76-79.
10. Ефимов А.В. О постановке и разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с дробной производной. / А.В. Ефимов // Современные проблемы математической физики и информационной технологии. Труды международной научной конференции. Ташкент, 26-29 ноября, 2004. Т.1. – Ташкент: Изд-во НУУ им. М.Улугбека, 2003. – С. 27-33.
11. Ефимов А.В. О краевых задачах с операторами М. Сайго для уравнения смешанного типа с дробной производной. / А.В. Ефимов // Вестник СамГТУ. Серия «Физико-математические науки». Вып. 26. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2004. – С. 16-20.
12. Ефимов А.В. Задача со смещением для уравнения Бицадзе-Лыкова. / А.В. Ефимов // Материалы десятой международной научной конференции им. академика М. Кравчука. Киев, 13-15 мая, 2004. – Киев: Изд-во НТУУ «КПИ», 2004. – С. 105-107.
13. Ефимов А.В. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения Бицадзе-Лыкова. / А.В. Ефимов // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики. Материалы международного российско-казахского симпозиума. Нальчик – Эльбрус, 22-26 мая, 2004. – Пятигорск: Изд-во ООО «Рекламно-информационное агентство на КМВ», 2004. – С. 76-78.
14. Ефимов А.В. О краевой задаче с обобщенными дробными операторами для гиперболического уравнения Бицадзе-Лыкова / А.В. Ефимов // Современные проблемы физики и математики. Труды Всероссийской научной конференции. Стерлитамак, 16-17 сентября, 2004. Т.1. – Уфа: Изд-во «Гилем», 2004. – С. 136-142.
15. Ефимов А.В. Нелокальная краевая задача для уравнения влагопереноса при $a = -1$. / А.В. Ефимов // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Всероссийской научной конференции. Самара, 26-28 мая, 2004. Ч.3. Секция «Дифференциальные уравнения и краевые задачи». – Самара: Изд-во СамГТУ, 2004. – С. 101-105.
16. Ефимов А.В. Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа второго рода. / А.В. Ефимов // Актуальные проблемы современной науки. Труды 5-й международной конференции молодых ученых. Самара, 7-9 сентября, 2004. Ч.1, 2. Математика. Математическое моделирование. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2004. – С. 38-42.

Заказ №665. Тираж 100 экз. Отпечатано на ризографе.
Самарский государственный технический университет.
Отдел типографии и оперативной полиграфии.
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.