На правах рукописи

ШЕГАЙ Людмила Николаевна

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2004

Работа выполнена на кафедре компьютерных технологий Чувашского государственного университета имени И.Н. Ульянова.

Научный руководитель: кандидат технических наук,
профессор **Желтов Валериан Павлович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Хромов Август Петрович**

кандидат физико-математических наук, доцент **Мокейчев Валерий Степанович**

Ведущая организация: Нижегородский государственный университет

Защита состоится 16 декабря 2004 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, 17, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени И.Н. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «___» ________________ 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико–математических наук,
доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена нахождению спектральных характеристик краевых задач, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка с точками поворота на неограниченных интервалах.

Актуальность темы. При исследовании процессов, происходящих в гидродинамике, в теории колебаний, в квантовой механике, при изучении явлений дифракции получаются математические модели, которые описываются дифференциальными уравнениями второго порядка с точками поворота. Это точки, где процесс резко меняет свой характер. Согласно классической механике, в этой точке движущаяся частица остановилась бы и начала двигаться в обратном направлении. Общеизвестны такие уравнения с точками поворота, как уравнения Бесселя, Матье, Вебера, порождающие специальные функции.

Дифференциальные уравнения с точками поворота изучались различными методами. Метод ВБК (Вентцеля, Бриллюэна, Крамера) изучения асимптотического поведения решений задач с точками поворота состоит в том, что производится замена уравнения в окрестности точки поворота уравнением, решение которого находится с помощью специальных функций. Затем это решение «склеивается» с решением в остальной части промежутка.

Другой метод основан на выходе в комплексную плоскость. Его применяли М.А. Евграфов и М.В. Федорюк. В частности, М.В. Федорюк находил асимптотику решений и асимптотику спектра в предположении, что коэффициенты уравнения – аналитические функции.

Широко известен метод эталонного уравнения, развитый в работах А.А. Дородницына и Р. Лангера. Они исследовали уравнение

$$y'' + \left[\lambda^2 q(x) + R(x)\right] y = 0, \qquad (1.1)$$

где

$$q(x) = x^{\alpha} r(x),\ \alpha > -2,\ r(x) > 0.$$

Эталонное уравнение выбирается так, чтобы оно имело точку поворота того же типа, что и исходное уравнение и имело бы наиболее простой вид. Таким образом, эталонное уравнение содержит информацию о точке поворота исходного уравнения и имеет известные решения. Р. Лангер строил первые асимптотики решений для конечных интервалов в случае простых и кратных точек поворота. Для случая простой точки поворота на конечном интервале им построены асимптотические ряды для решений. Спектр Р. Лангер не исследовал. Вопросы о спектре и асимптотике спектра для оператора Ly на конечном отрезке рассмотрены в работе А.А. Дородницына. С помощью метода эталонных уравнений А.А. Стакун рассматривал этот оператор на конечном отрезке. На бесконечном полуинтервале он исследовал случай, когда $\int_a^{\infty} \sqrt{q(x)}\, dx = \infty$.

Собственные значения различных операторов и регуляризованные следы изучались в работах И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, Л.А. Дикого, В.Б. Лидского, В.А. Садовничего, Л.Д. Фаддеева, В.С. Буслаева и др.

Исследование дифференциального уравнения (1) связано со сложными аналитическими вычислениями. Эта трудность может быть преодолена с помощью использования вычислительной техники при разработке и использовании соответствующих алгоритмов.

Целью исследования является определение характера спектра и вычисление спектральных характеристик для краевых задач, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка с точками поворота на полуоси. В соответствии с поставленной целью в работе решаются следующие задачи: нахождение асимптотических формул для решений дифференциального уравнения; определение характера спектра исследуемых краевых задач; равномерная оценка ядра резольвенты (функции Грина) краевых задач; построение алгоритма вычисления коэффициентов асимптотического ряда для спектра; нахождение алгоритма вычисления регуляризованных следов (регуляризованных сумм) для рассматриваемых краевых задач. Эти исследования производятся в двух случаях: когда одна из точек поворота находится на левом конце или внутри полуоси (для точек поворота различного порядка), а другая точка поворота находится на бесконечности.

Научная новизна. Построен алгоритм вычисления коэффициентов асимптотического ряда для решений дифференциального уравнения и дано его теоретическое обоснование; определен характер спектра; найдены асимптотические ряды по степеням n для спектра краевых задач и построен алгоритм нахождения коэффициентов этих рядов; найдены регуляризованные следы краевых задач и построен алгоритм их вычисления; найдена равномерная оценка ядра резольвенты.

Методы исследования. Поставленные в работе задачи исследовались с помощью методов эталонного уравнения, теории интегральных уравнений с использованием свойств специальных функций, методов теории функций комплексной переменной с использованием свойств целых функций специальных классов.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в работе формулы и алгоритмы могут быть использованы при вычислении спектральных характеристик краевых задач, связанных с дифференциальными уравнениями с точками поворота, которые возникают в различных задачах науки и техники, в частности, при изучении волновых процессов в атмосфере, в теории приливных волн. Спектр и регуляризованные следы имеют конкретное физическое содержание. Регуляризованные следы имеют и прикладное значение при вычислении первых собственных чисел.

На защиту выносятся:

1. Нахождение асимптотических представлений для решений дифференциального уравнения на неограниченных интервалах.

2. Теорема о дискретном характере спектра краевой задачи.

3. Равномерная оценка ядра резольвенты (функции Грина).

4. Асимптотические представления для спектра краевой задачи с помощью рядов по степеням n и алгоритм нахождения коэффициентов этих рядов.

5. Формулы вычисления регуляризованных следов (регуляризованных сумм) для собственных чисел краевой задачи и алгоритм их вычисления.

Эти исследования производятся в двух случаях: когда одна из точек поворота находится на левом конце или внутри полуоси, а другая - на бесконечности.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на научных конференциях Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова (Чебоксары, 1982, 1987, 1997, 2003, 2004); на заседании Зимней математической школы «Алгебраические структуры теории сингулярных возмущений» в Российском государственном социальном университете при участии МЭИ (Москва, 1993); на IV международной конференции "Математика. Моделирование. Экология" (Волгоград, 1996); на научных семинарах кафедры компьютерных технологий в Чувашском государственном университете им. И.Н. Ульянова (Чебоксары, 2002, 2003, 2004); на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета (Казань, 2004); на научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Саратовского государственного университета (Саратов, 2004).

Публикации. По результатам выполненных исследований опубликовано 18 работ.

Структура и объем работы. Данная работа состоит из введения, двух глав, четырех приложений, заключения и списка литературы из 60 наименований, текст изложен на 150 страницах.

Краткое содержание работы

Во **введении** отмечается актуальность темы диссертации, приводится обзор результатов исследований по ее тематике, кратко излагается содержание работы.

В первой главе исследуется дифференциальное уравнение (1) с точкой поворота на левом конце полуоси в предположении, что

$$r(x)\in C^2[0,+\infty),\ R(x)\in C[0;+\infty), \tag{1.2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} q(x)=0,\ \int_0^{+\infty}\sqrt{q(x)}\,dx<+\infty. \tag{1.3}$$

Введем функции

$$\xi(x)=\int_0^x\sqrt{q(t)}\,dt,\ \omega(x)=[\nu\xi(x)]^{\frac{1}{\nu}},\ \nu=\frac{\alpha+2}{2},\mu=\frac{1}{\alpha+2},$$

$$R_0(x)=-\sqrt{\omega'(x)}\left[\frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}\right]''_{xx},\ F(x)=R(x)-R_0(x)$$

и будем считать, что

$$\int_0^{+\infty}\frac{|F(x)|}{\sqrt{q(x)}}\,dx<+\infty,\ q'(x)=o\left(q(x)\right) \text{ при } x\to+\infty. \tag{1.4}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$Ly\equiv y''+\left[\lambda^2 q(x)+R(x)\right]y=0, \tag{1.5}$$

$$b_1 y(0)+b_2 y'(0)=0, \tag{1.6}$$

$$B_1\hat{y}(\infty,\lambda)+B_2\hat{y}'_\xi(\infty,\lambda)=0, \tag{1.7}$$

где b_1, b_2, B_1, B_2 - постоянные, $b_2=0$ при $-2<\alpha\le -1$,

$$\hat{y}(\infty,\lambda)=\lim_{x\to+\infty}\hat{y}(x,\lambda)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\omega'(x)}\,y(x,\lambda), \tag{1.8}$$

$$\hat{y}'_\xi(\infty,\lambda)=\lim_{x\to+\infty}\left(\hat{y}(x,\lambda)\right)'_\xi=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\omega'(x)}\,y(x,\lambda)\right)'_\xi. \tag{1.9}$$

Все рассуждения проводятся сначала для краевых условий (1.6), (1.7) при $b_2=0,\ B_2=0$. При $b_2\ne 0,\ B_2\ne 0$ эти рассуждения повторяются с незначительными изменениями технического характера.

Известно, что эталонное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению

$$\upsilon''+\left[\lambda^2 q(x)+R_0(x)\right]\upsilon=0,$$

имеет при $\lambda\ne 0$ два линейно независимых решения

$$\upsilon_j(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}[\lambda\xi(x)]^\mu H_\mu^{(j)}[\lambda\xi(x)],\ j=1,2, \tag{1.10}$$

здесь $H_\mu^{(j)}$ - функции Бесселя третьего рода, функции Ганкеля.

Уравнение (1.5) представимо в виде

$$y''+\left[\lambda^2 q(x)+R_0(x)\right]y=-F(x)y. \tag{1.11}$$

Для решений уравнения $Ly=0$ введем обозначения:

$y_0(x,\lambda)$ - решение, удовлетворяющее условиям

$$y_0(0,\lambda)=0,\ y_0'(0,\lambda)=1, \tag{1.12}$$

$Y_0(x,\lambda)$ - решение, удовлетворяющее условиям

$$\hat{Y}_0(\infty,\lambda)=0,\ \hat{Y}'_{0\xi}(\infty,\lambda)=c\ne 0. \tag{1.13}$$

Изучим решения $y_0(x,\lambda)$ этого уравнения. Перейдем от (1.11), (1.12) к соответствующему интегральному уравнению

$$y_0(x,\lambda)=\upsilon_0(x,\lambda)+\int_0^x K(x,t,\lambda)F(t)\,y_0(t,\lambda)\,dt, \tag{1.14}$$

где

$$\upsilon_0(x,\lambda)=\frac{1}{C_0\lambda^{\frac{1}{\upsilon}}}\left[\upsilon_2(0,\lambda)\upsilon_1(x,\lambda)-\upsilon_1(0,\lambda)\upsilon_2(x,\lambda)\right],$$

$$K(x,t,\lambda)=\frac{1}{C_0\lambda^{\frac{1}{\upsilon}}}\left[\upsilon_1(x,\lambda)\upsilon_2(t,\lambda)-\upsilon_2(x,\lambda)\upsilon_1(t,\lambda)\right]$$

Исследуем поведение $y_0(x,\lambda)$ при фиксированном λ, отличном от нуля, и $x\to+\infty$. Доказывается, что решение $y_0(x,\lambda)$ существует, существуют пределы (1.8), (1.9). При этом $y_0(x,\lambda)$ является целой функцией при фиксированном x и пределы $\hat{y}_0(\infty,\lambda)$, $\hat{y}'_{0\xi}(\infty,\lambda)$ являются целыми функциями по λ. Пределы (1.8), (1.9) существуют и для произвольного решения $y(x,\lambda)$ уравнения (1.5). Отсюда следует, что краевое условие на бесконечности можно задавать в виде (1.7).

Для решения $Y_0(x,\lambda)$ уравнения (1.11) рассмотрим соответствующее интегральное уравнение

$$Y_0(x,\lambda)=V_0(x,\lambda)-\int_x^{+\infty}K(x,t,\lambda)F(t)Y_0(t,\lambda)\,dt, \qquad (1.15)$$

где

$$V_0(x,\lambda)=\frac{\hat{\upsilon}_2(\infty,\lambda)\upsilon_1(x,\lambda)-\hat{\upsilon}_1(\infty,\lambda)\upsilon_2(x,\lambda)}{C_0\lambda^{\frac{1}{\upsilon}}}.$$

При фиксированном x решение $Y_0(x,\lambda)$ - аналитическая функция по λ в комплексной плоскости C.

Чтобы определить характер спектра краевой задачи (1.5) - (1.7), рассмотрим её резольвенту

$$L^{-1}f=\int_0^{+\infty}G(x,t,\lambda)\,f(t)\,dt,$$

здесь ядро $G(x,t,\lambda)$ резольвенты (функция Грина) находится по формуле

$$G(x,t,\lambda)=\frac{1}{W[y_0;Y_0]}\begin{cases}y_0(x,\lambda)Y_0(t,\lambda), & x\le t,\\ y_0(t,\lambda)Y_0(x,\lambda), & x>t.\end{cases}$$

Спектром краевой задачи называют совокупность точек λ, в которых резольвента имеет особенности. Так как функции $y_0(x,\lambda)$ и $Y_0(x,\lambda)$ являются аналитическими по λ в комплексной плоскости C, то особенности может дать только определитель Вронского

$$W[y_0;Y_0]=\Delta(\lambda),$$

который называется характеристическим определителем. При этом

$$\Delta(\lambda)=\hat{y}_0(\infty,\lambda)=-Y_0(0,\lambda). \qquad (1.16)$$

Теорема 1.1. Если выполняются условия (1.2), (1.3), (1.4), то спектр краевой задачи (1.5) - (1.7) является дискретным.

Для получения асимптотики спектра и оценки ядра резольвенты всю полуось $[0,+\infty)$ разобьем на части, где $|\lambda\xi(x)|\le N$ и $|\lambda\xi(x)|>N$, $N>0$ - достаточно большое число. На каждой из этих частей анализируем интегральные уравнения (1.14), (1.15) и для решений $y_0(x,\lambda)$ и $Y_0(x,\lambda)$ находим равномерную оценку по модулю сверху и равномерные асимптотические формулы при $|\lambda|\to\infty$ и $|\arg\lambda|\le\pi-\delta$ ($\delta>0$ - достаточно малое число).

Используя полученные асимптотические формулы и формулу (1.16), получим асимптотическое представление для $\Delta(\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty$

$$\Delta(\lambda) \cong \frac{e^{i\lambda\xi(\infty)}P_1(\lambda)+e^{-i\lambda\xi(\infty)}P_2(\lambda)}{C_0\lambda^{\frac{1}{\nu}}\lambda^{-a}}, \qquad (1.17)$$

где $P_j(\lambda)= p_{0j} + O\left(\frac{1}{\lambda^{\varepsilon}}\right)$, $j=1,2$, $\varepsilon = min(1,2\mu)$, $a=\mu-\frac{1}{2}$

причем $p_{0j}\neq 0$, числа p_{0j} выражаются через $\upsilon_j(0,\lambda)$, $\hat{\upsilon}_j(\infty,\lambda)$,.

Так как в уравнение (1.5) входит λ^2, все рассуждения достаточно провести для λ, принадлежащих некоторой полуплоскости

$$C_\delta : \{-\delta \le arg\,\lambda \le \pi-\delta\},$$

$\delta>0$ – достаточно малое число. С помощью формулы (1.17) находится асимптотическая формула для положительных корней характеристического определителя $\lambda_n=\lambda_n^0+o(1)$ при $n\to\infty$,

$\lambda_n^0 = d\,n\left(1+\frac{r_1}{n}\right), d=\frac{\pi}{\xi(\infty)}$, r_1 выражается через p_{01}, p_{02}.

Вышесказанное позволяет доказать теорему.

Теорема 1.2. Если выполняются условия (1.2), (1.3), (1.4), то при $|\lambda|>M$ ($M>0$ - достаточное большое), $\lambda\in C_\delta$ вне кружков фиксированного малого радиуса с центром в точках λ_n^0, имеет место неравенство

$$|\,G(x,t,\lambda)\,| \le \frac{C}{|\lambda|^{\varepsilon}\sqrt{\omega'(x)}\sqrt{\omega'(t)}},$$

$\varepsilon=min(2\mu,1)$.

Чтобы найти асимптотические ряды для спектра и регуляризованные следы краевой задачи построим асимптотические ряды (длинные асимптотики) для решений уравнения $Ly=0$. Повысим требования гладкости для

функций $R(x)$ и $q(x)$. Степень гладкости зависит от порядка вычисляемого следа. Предположим, что

$$q(x)\in C^\infty[0,+\infty),\ R(x)\in C^\infty[0,\infty).$$

$$F^{(n)}(0)=0,$$

$$\frac{q^{(n+1)}(x)}{q(x)} = o(1),\ x\to+\infty,\ n=0,1,2,...$$

и построим, следуя работе Р. Лангера[1], асимптотический ряд на $[l,+\infty)$, $l>0$,

$$Y_0(x,\lambda)=V_0(x,\lambda)A(x,\lambda)+V_0'(x,\lambda)\frac{B(x,\lambda)}{\lambda^2}, \qquad (1.18)$$

где $V_0(x,\lambda)$ – решение эталонного уравнения, удовлетворяющее

условиям: $\hat{V}_0(\infty,\lambda)=0$, $\hat{V}'_{0\xi}(\infty,\lambda)=1$;

$$A(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(x)}{\lambda^k},\ B(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k(x)}{\lambda^k},$$

$$a_0\equiv 1,\ a_1=0,\ b_1=0,\ b_0=-\frac{1}{2\sqrt{q}}\int_x^{+\infty}\frac{F}{\sqrt{q}}\,dt,$$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}\left(b''_{k-2}+b_{k-2}F\right)dt, \qquad (1.19)$$

$$b_k=-\frac{1}{2\sqrt{q}}\int_x^{+\infty}\frac{a''_k+Fa_k-b_{k-2}R'_0-2b'_{k-2}R_0}{\sqrt{q}}\,dt,$$

$k=2,3,\ldots$.

---

[1] Langer R.E. The asymptotic solution of ordinary linear differential equations with an application to the Bessel functions of large order // Trans. Amer. Math. Soc. 1931. V.33. P. 23-64.

Будем считать, что все введенные интегралы сходятся. Для этого достаточно, например, чтобы

$$\frac{F^{(n)}}{\left[q^{(k)}\right]^{m+1}} = o(1),\ x \to +\infty,\ n,k,m = 0,1,2,\ldots.$$

Построенная функция $Y_0(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению $Ly = 0$. Рассмотрим отрезок асимптотического ряда (1.18)

$$u_m(x,\lambda) = V_0(x,\lambda)\,A_m(x,\lambda) + V_0'(x,\lambda)\frac{B_m(x,\lambda)}{\lambda^2},$$

тогда для решения $Y_0(x,\lambda)$ получается интегральное уравнение

$$Y_0(x,\lambda) = u_m(x,\lambda) - \int_x^{+\infty} K_m(x,t,\lambda)\frac{F_m(t,\lambda)}{\lambda^{m+1}}Y_0(t,\lambda)\,dt,$$

где K_m, F_m выражаются через R_0, F, функции (1.10) и коэффициенты (1.19).

Из анализа интегрального уравнения следует, что для решения $Y_0(x,\lambda)$ уравнения $Ly = 0$ (при достаточно больших $|\lambda|$) на промежутке $[\,l,+\infty)$, $l > 0$, справедливо асимптотическое представление

$$Y_0^{(\tau)}(x,\lambda) = u_m^{(\tau)}(x,\lambda) + \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}\ O\left[\frac{e^{|Im\,\lambda|[\xi(\infty)-\xi(x)]}}{\lambda^{m+1-\tau}}\right],$$

$\tau = 0,1$, $|\,arg\,\lambda\,| \le \pi - \delta$, $\delta > 0$ - сколь угодно малое число.

Можно получить асимптотические ряды для фундаментальной системы решений $y_j(x,\lambda)$, $j = 1,2$, на промежутке $[0,l]$. Такие асимптотические ряды строятся аналогично тому, как построен асимптотический ряд для $Y_0(x,\lambda)$. «Склеивая» $Y_0(x,\lambda)$ с $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$, получим асимптотические представления для $Y_0(x,\lambda)$ на всей полуоси $[0,+\infty)$.

Используя найденные асимптотические представления для решений и свойства функций Ганкеля в нуле и на бесконечности, получим, что в асимптотической формуле (1.17) для характеристического определителя функции $P_j(\lambda)$ - это многочлены по отрицательным степеням λ, коэффициенты которых $p_k^{(j)}$ выражаются через значения коэффициентов асимптотического ряда для $Y_0(0,\lambda)$.

Получен алгоритм нахождения коэффициентов $p_k^{(j)}$ многочленов $P_j(\lambda)$.

Далее применяются методы, разработанные В.Б. Лидским и В.А. Садовничим для целых функций специального класса[2].

На лучах Γ_j' находится асимптотика логарифмической производной характеристического определителя

$$\frac{\Delta'(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \cong -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega_k^{(j)}}{\lambda^k},$$

где коэффициенты $\omega_k^{(j)}$ выражаются через коэффициенты $p_k^{(j)}$,

$$\Gamma_j' : arg\,\lambda = (-1)^j\varphi_0,\ 0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2},\ j = 1,2.$$

Получен алгоритм вычисления коэффициентов $\omega_k^{(j)}$.

Коэффициенты логарифмической производной используются для нахождения коэффициентов асимптотического ряда для спектра. Справедлива теорема.

Теорема 1.3. Для спектра краевой задачи (1.5) - (1.17) справедливы асимптотические формулы при $n \to \infty$

$$\lambda_n \cong dn\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k}{n^k}\right],$$

[2] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функц. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. Вып. 2. С. 52-59.

$$r_{k+1}=d^{-k}\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi ik}\left(\omega_{k+1}^{(2)}-\omega_{k+1}^{(1)}\right)-\frac{1}{k}\sum_{m=2}^{k}\binom{k}{m}\sum_{k_1+\ldots+k_m=k+1}r_{k_1}...r_{k_m}\ .$$

Построен алгоритм нахождения коэффициентов асимптотических рядов для спектра краевой задачи.

Знание коэффициентов r_k спектра позволяет найти регуляризованные следы краевой задачи. Регуляризованным следом краевой задачи порядка t называется ряд вида

$$\sum_n\left[\lambda_n^{2t}-f_t(n)\right]=\sum_n\lambda_n^{2t}\ ,$$

где $t=1,2,\ldots,\ f_t(n)$ - многочлен по степеням $\frac{1}{n}$ минимальной степени, который подбирается так, чтобы этот ряд сходился.

Теорема 1.4. Регуляризованные следы краевой задачи (1.5) - (1.7) вычисляются по формуле

$$\sum_n{}'\ \lambda_n^{2t}=-\frac{1}{2}\omega_{(2t+1)}^{(j)}-d^{2t}\left[\zeta(-2t)+\Omega_t+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{2t}\binom{2t}{m}\sum_{p=m}^{2t}\zeta(p-2t)\sum_{k_1+\ldots+k_m=p}r_{k_1}\ldots r_{k_m}\right],$$

$$\Omega_t=\lim_{\sigma\to-2t}\zeta(\sigma+2t+1)\sum_{m=1}^{2t+1}\binom{-\sigma}{m}\sum_{k_1+\ldots+k_m=2t+1}r_{k_1}\ldots r_{k_m}=$$

$$=\frac{d}{d\sigma}\left[\sum_{m=1}^{2t+1}\binom{-\sigma}{m}\sum_{k_1+\ldots+k_m=2t+1}r_{k_1}\ldots r_{k_m}\right]_{|\sigma=-2t},$$

$d=\dfrac{\pi}{\xi(\infty)}$, $\zeta(\sigma)$ - дзета-функция Римана, $t=1,2,\ldots$.

Построен алгоритм вычисления регуляризованных следов краевой задачи с точкой поворота в конце полуоси.

Замечание. Аналогичные результаты получаются, если рассматривать краевые условия (1.6), (1.7) при $b_2\neq 0,\ B_2\neq 0$. Только здесь нужно при $b_2\neq 0$ различать является ли $\frac{1}{\nu}$ целым числом, рациональной дробью, или $\frac{1}{\nu}$ - иррациональное число. В двух последних случаях функции $P_j(\lambda)$ в асимптотическом представлении $\Delta(\lambda)$ есть многочлены по отрицательным дробным степеням λ. Дробные степени присутствуют и в асимптотических формулах для логарифмической производной характеристического определителя, в асимптотических рядах для спектра, в формулах для вычисления регуляризованных следов.

Во второй главе исследуется дифференциальное уравнение (1) с точкой поворота внутри полуоси $[-1,+\infty)$. Изучается краевая задача

$$Ly=y''+\left[\lambda^2q(x)+R(x)\right]y=0\,, \tag{2.1}$$

$$y(-1)=0,\ \hat{y}(\infty)=0\,, \tag{2.2}$$

где $q(x)=x^\alpha r(x)$, $\alpha>0$, α - нечетное число, $r(x)>0$, выполняются условия (1.3) и

$$r(x)\in C^2[-1,+\infty),\ R(x)\in C[-1,+\infty). \tag{2.3}$$

Все рассуждения проводятся по аналогии с главой 1. Общие обозначения сохраняются. Разобьем промежуток $[-1,+\infty)$ на две части $[-1,0]$ и $[0,+\infty)$. При $x<0$ считаем, что

$$arg\,q(x)=\alpha\pi\ ,\ arg\,\omega(x)=\pi\ ,\ arg\,\xi(x)=\nu\pi\ .$$

Фундаментальную систему решений при $x\le 0$ эталонного уравнения образуют функции

$$W_j(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}[\lambda\xi(x)]^{\mu}H_{\mu}^{(j)}[\lambda|\,\xi(x)\,|(-i)],\ j=1,2.$$

Обозначим через $U_0(x,\lambda)$ решение уравнения $Ly=0$ на отрезке $[-1,0]$, удовлетворяющее условиям

$$U_0(-1,\lambda)=0,\ U_0'(-1,\lambda)=1.$$

Так же, как в первой главе, получим асимптотические представления на отрезке $[-1,0]$ для $U_0(x,\lambda)$ и для фундаментальной системы решений $U_1(x,\lambda)$, $U_2(x,\lambda)$ уравнения $Ly=0$. Затем решение $U_0(x,\lambda)$ продолжим на промежуток $[0,+\infty)$. Решение $Y_0(x,\lambda)$, удовлетворяющее граничному условию при $x\to+\infty$, введенное в первой главе, также продолжается на $[-1,0]$. Характеристический определитель в этом случае имеет вид

$$\Delta(\lambda)\cong\frac{1}{C\lambda}\sum_{\tau=1}^{4}e^{\gamma_\tau\lambda}P_\tau(\lambda), \tag{2.4}$$

где $\gamma_{1,2}=|\,\xi(-1)\,|\mp i\xi(\infty)$, $\gamma_{3,4}=-\gamma_{1,2}$, $P_\tau(\lambda)=p_0^{(\tau)}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $p_0^{(\tau)}\neq 0$, $|\lambda|\to\infty$.

Справедливы теоремы.

Теорема 2.1. Если выполняются условия (2.3), (1.3), (1.4), то спектр краевой задачи (2.1) - (2.2) есть дискретное множество, распадающееся, за исключением, быть может, конечного числа точек, на две серии точек $\lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_n^{(2)}$, асимптотика которых определяется формулами:

$$\lambda_n^{(j)}=\tilde{\lambda}_n^{(j)}+o(1)=d_j n\left(1+r_1^{(j)}\right)+o(1),\qquad n\to\infty,\qquad j=1,2,$$

$d_1=\dfrac{\pi}{\xi(\infty)}$, $d_2=\dfrac{\pi i}{|\xi(-1)|}$, $r_1^{(j)}$ - выражаются через $p_0^{(\tau)}$.

Теорема 2.2. Если выполняются условия (2.3), (1.3), (1.4), то при $|\lambda|>M$, $\lambda\in C_\delta$, вне кружков достаточно малого фиксированного радиуса с центром в точках $\tilde{\lambda}_n^{(j)}$, $j=1,2$, имеет место неравенство

$$|\,G(x,t,\lambda)\,|\le\frac{C}{|\lambda|^{\varepsilon}}\rho(x)\rho(t),\ \varepsilon=min\,(2\mu,1),$$

$\rho(x)$ - непрерывная положительная функция, $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}$ при $x>0$.

Далее находятся асимптотические ряды для решений дифференциального уравнения и асимптотические представления для характеристического определителя. Из равенства $\Delta(\lambda)=-Y_0(-1,\lambda)$ следует, что в асимптотической формуле (2.4) $P_\tau(\lambda)$ - многочлены по отрицательным степеням λ с коэффициентами $p_k^{(\tau)}$, которые выражаются через коэффициенты асимптотического ряда для $Y_0(-1,\lambda)$.

Это позволяет найти асимптотические ряды для логарифмической производной характеристического определителя на лучах

$$\Gamma'_1: arg\,\lambda=\varphi_1;\ \Gamma'_2: arg\,\lambda=\varphi_2;\ \Gamma'_4: arg\,\lambda=\varphi_4;$$

где $0<\varphi_1<\frac{1}{2}\pi$, $-\delta<\varphi_2<0$, $\frac{1}{2}\pi<\varphi_4<\pi$.

Коэффициенты $\omega_k^{(\tau)}$ этих рядов выражаются через $p_k^{(\tau)}$ по рекуррентным формулам.

Получаются теоремы.

Теорема 2.3. Для спектра краевой задачи (2.1) - (2.2) справедливы асимптотические представления при $n\to\infty$

$$\lambda_n^{(1)}\cong d^{(1)}n\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k^{(1)}}{n^k}\right],\ \lambda_n^{(2)}\cong d^{(2)}n\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k^{(2)}}{n^k}\right],$$

$r_{k+1}^{(1)}$ и $r_{k+1}^{(2)}$ находятся по формулам

$$r_{k+1}^{(1)} = -\sum_{m=2}^{k} \sum_{k_1+\ldots+k_m=k+1} \frac{1}{k}\binom{k}{m} r_{k_1}^{(1)} \ldots r_{k_m}^{(1)} + \frac{d_1^{-k}(-1)^{k+1}}{k} \frac{\omega_{k+1}^{(2)} - \omega_{k+1}^{(1)}}{2\pi i},$$

$$r_{k+1}^{(2)} = -\sum_{m=2}^{k} \sum_{k_1+\ldots+k_m=k+1} \frac{1}{k}\binom{k}{m} r_{k_1}^{(2)} \ldots r_{k_m}^{(2)} + \frac{d_2^{-k}(-1)^{k+1}}{k} \frac{\omega_{k+1}^{(1)} - \omega_{k+1}^{(4)}}{2\pi i}.$$

Теорема 2.4. Регуляризованные следы краевой задачи (2.1) - (2.2) находятся по формуле

$$\sum_l{}' \lambda_l^{2t} = -\frac{1}{2}\omega_{2t+1} - \sum_{s=1}^{2}\left(d^{(s)}\right)^{2t}\Big[\zeta(-2t) +$$

$$+\sum_{m=1}^{2t}\binom{2t}{m}\sum_{p=m}^{2t}(\zeta - 2t + p)\sum_{k_1+\ldots+k_m=p} r_{k_1}^{(s)} \ldots r_{k_m}^{(s)} + \Omega_t^{(s)}\Big],$$

где $\Omega_t^{(s)} = \lim_{\sigma\to -2t} \zeta(\sigma + 2t + 1)\sum_{m=1}^{2t+1}\binom{-\sigma}{m}\sum_{k_1+\ldots+k_m=2t+1} r_{k_1}^{(s)} \ldots r_{k_m}^{(s)} =$

$$= \frac{d}{d\sigma}\left[\sum_{m=1}^{2t+1}\binom{-\sigma}{m}\sum_{k_1+\ldots+k_m=2t+1} r_{k_1}^{(s)} \ldots r_{k_m}^{(s)}\right]_{|\sigma=-2t},$$

$\zeta(\sigma)$ - дзета-функция Римана, $t = 1, 2\ldots$

Построен алгоритм нахождения коэффициентов асимптотических рядов для спектра и алгоритм вычисления регуляризованных следов для краевой задачи.

В **заключении** излагаются основные результаты.

Основные результаты.

Для случая, когда одна из точек поворота в рассматриваемых дифференциальных уравнениях находится на левом конце полуоси, а другая точка поворота – на бесконечности, получены следующие основные результаты:

1. Найдены асимптотические представления для решений дифференциальных уравнений на неограниченных интервалах.
2. Решен вопрос о характере краевых условий и дана постановка соответствующих краевых задач.
3. Показано, что спектр рассматриваемых краевых задач является дискретным.
4. Получена равномерная оценка ядра резольвенты (функции Грина) краевых задач.
5. Найдены асимптотические ряды для решений дифференциальных уравнений.
6. Найдены асимптотические представления для характеристического определителя и для его логарифмической производной.
7. Получены асимптотические ряды для собственных чисел краевой задачи и эффективная методика нахождения их коэффициентов.
8. Вычислены регуляризованные следы различных порядков.

В четырех последних пунктах найдены соответствующие алгоритмы.

Для случая, когда одна из точек поворота в рассматриваемых дифференциальных уравнениях находится внутри полуоси, а другая точка поворота – на бесконечности, получены следующие основные результаты:

1. Найдены асимптотические представления для решений дифференциальных уравнений на неограниченных интервалах.
2. Показано, что спектр рассматриваемых краевых задач является дискретным.
3. Получена равномерная оценка ядра резольвенты (функции Грина) краевых задач.
4. Найдены асимптотические ряды для решений дифференциальных уравнений.
5. Найдены асимптотические представления для характеристического определителя и для его логарифмической производной.
6. Получены асимптотические ряды для собственных чисел краевой задачи и методика нахождения их коэффициентов.

7. Вычислены регуляризованные следы различных порядков.

В двух последних пунктах найдены соответствующие алгоритмы.

В **приложениях** приведены формулы справочного характера и рассмотрен модельный пример.

Публикации

Основные результаты, связанные с содержанием диссертации, отражены в следующих работах.

1. Шегай Л.Н. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальным оператором второго порядка, имеющим точку поворота внутри интервала / Л.Н. Шегай // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький, 1980. Вып. 4.- С. 120.

2. Шегай Л.Н. Разложение по собственным функциям, связанное с дифференциальным оператором второго порядка, имеющим точку поворота / Л.Н. Шегай // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Чебоксары, 1982.- С. 118-127.

3. Шегай Л.Н. Разложение по собственным функциям, асимптотика спектра и регуляризованные следы для одного сингулярного дифференциального оператора второго порядка. Чебоксары, 1983.- С. 30. Деп. в ВИНИТИ, 1983, № 479-83.

4. Шегай Л.Н. О спектре одного сингулярного дифференциального оператора с точкой поворота. Чебоксары, 1983.- С. 18. Деп. в ВИНИТИ 1983, № 959-83.

5. Шегай Л.Н. Оценка резольвенты несамосопряженного дифференциального оператора с точкой поворота на полуоси. Чебоксары, 1984.- С. 16. Деп. в ВИНИТИ 1984, № 7388-84.

6. Шегай Л.Н. Регуляризованные следы одного несамосопряженного сингулярного дифференциального оператора. Чебоксары, 1984.- С. 11. Деп. в ВИНИТИ 1984, № 7390-84.

7. Шегай Л.Н. Некоторые спектральные свойства несамосопряженного дифференциального оператора с точкой поворота на полуоси / Л.Н. Шегай // Качественные и асимптотические методы интегрирования возмущенных дифференциальных уравнений: Саранск, 1987.- С. 99-109.

8. Шегай Л.Н. О спектральных задачах, связанных с дифференциальным уравнением с точкой поворота / Л.Н. Шегай // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький, 1987.- С. 32-37.

9. Шегай Л.Н. О спектральных свойствах одного оператора. / А.А. Стакун, Р.В. Разумейко, Л.Н. Шегай Чебоксары, 1992. С. 7. Деп. в ВИНИТИ 1992, № 2567-В 92.

10. Шегай Л.Н. Об оценке ядра резольвенты оператора с двумя точками поворота / Р.В. Разумейко, Л.Н. Шегай // Алгебраические структуры теории сингулярных возмущений: Материалы Зимней математической школы. Рос. гос. социальный институт при участии МЭИ Москва, 1993.- С. 149-150.

11. Шегай Л.Н. О некоторых свойствах сингулярного оператора Дирака. / А.А. Стакун, Р.В. Разумейко, Л.Н. Шегай Чебоксары, 1994., С. 13. Деп. в ВИНИТИ 1994. № 1217-В 94.

12. Шегай Л.Н. О спектре и резольвенте дифференциального оператора 2-го порядка с точкой поворота на полуоси. / Р.В. Разумейко, Л.Н. Шегай Чебоксары, 1995. С. 12. Деп. в ВИНИТИ 1995, № 6353-95.

13. Шегай Л.Н. О сингулярном операторе Дирака / Р.В. Разумейко, Л.Н. Шегай // Тез. IV Международной конференции женщин–математиков. Волгоград, 1996. С. 107.

14. Шегай Л.Н. О свойствах сингулярного оператора Дирака с комплекснозначным потенциалом. / А.А. Стакун, Р.В. Разумейко, Л.Н. Шегай Чебоксары, 1996. С. 17. Деп. в ВИНИТИ 1996, № 1895-В 96.

15. Шегай Л.Н. Свойства одного сингулярного оператора / Р.В. Разумейко, Л.Н. Шегай // Тез. Докл. юбилейной итоговой научной конференции ЧГУ. Чебоксары, 1997. С. 15.

16. Шегай Л.Н. О сингулярном операторе Дирака / Р.В. Разумейко, Л.Н. Шегай // Тр. IV Междунар. конф. женщин–математиков. Н. Новгород, 1997. Т. 4. Вып. 2. С. 52-57.

17. Шегай Л.Н. Алгоритмы вычисления спектральных характеристик для дифференциальных операторов, связанных с моделированием волновых процессов в атмосферной

среде. / Л.Н. Шегай // Математика, компьютер, образование: Тезисы IX Международной конференции. Дубна, 2004. С. 174.

18. Шегай Л.Н. Об алгоритме вычисления регуляризованных следов для одной краевой задачи с точками поворота / Л.Н. Шегай // Математика в высшем образовании: Тезисы докладов XII Международной конференции. Чебоксары, 2004. С. 152.

Формат 60x84 1/16. Уч.-изд. л. 1,32 Тираж 100 экз. Заказ №
Типография Чувашского государственного университета.
428015, Чебоксары, Московский проспект, 15