На правах рукописи

СИРОТА Юрий Наумович

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДИСКРЕТНО - ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2004

Работа выполнена на кафедре математического анализа Санкт-Петербургского государственного педагогического университета им А.И. Герцена.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Зайцев Валентин Федорович.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Казаков Александр Яковлевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Андрианов Сергей Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор
Деревенский Владислав Павлович

Ведущая организация: **Санкт-Петербургский институт информатики РАН**

Защита состоится 16 декабря 2004 года в 15^{00} часов на заседании диссертационного совета К 212.081.06 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, 17, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 12 ноября 2004 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Работа посвящена разработке алгоритма решения обратной задачи дискретно-группового анализа и исследованию свойств преобразования, задающего образующую дискретной группы преобразований бесконечного порядка, допускаемую линейными уравнениями второго порядка.

Актуальность темы. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений известен с 1976 года[1)], когда впервые была продемонстрирована эффективность применения дискретных групп преобразований для интегрирования ряда практически важных уравнений, которые не удавалось решить классическими методами, в том числе с помощью группового анализа С.Ли. Обычно ставятся две задачи – прямая (поиск дискретной группы, допускаемой заданным классом уравнений) и обратная (по заданной структуре дискретной группы строятся классы, ее допускающие, или классы, имеющие решения, являющиеся элементами преобразований группы). Первые шаги в разработке метода обратной задачи дискретно-группового анализа были предприняты Т.В. Кормилициной, которая привела много примеров и задач, но систематизированной теории разработано не было. Выяснилось, что этот метод является дискретным аналогом обратной задачи рассеяния, так как решение линейного уравнения связи удовлетворяет нелинейному уравнению сдвига спектрального параметра. В результате реализации этого подхода получается метод поиска новых классов нелинейных дифференциальных уравнений и их решений.

Как было показано Т.В. Кормилицыной и В.Ф. Зайцевым[2)], всякое линейное уравнение 2-го порядка допускает бесконечную циклическую группу преобразований по любому существенному параметру, например, по спектральному параметру λ, а элементы преобразований, задающие это преобразование (класса Ли-Беклунда), удовлетворяют неко-

---

[1)] *Зайцев В.Ф.* К вопросу о конечных группах преобразований нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Дифференциальные уравнения. Труды мат.кафедр пединститутов РСФСР. Рязань, 1976. – Вып. 7. – С. 57-62.

[2)] *Зайцев В.Ф., Кормилицина Т.В.* Дискретно-групповой подход к спектральным и обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений // Лен.гос.пед.ин-т им. А.И. Герцена. Л.: 1986. 3 с. Деп. в ВИНИТИ 15.05.86, №3529-В86.

Зайцев В.Ф., Кормилицына Т.В. О дискретной группе преобразований вырожденного гипергеометрического уравнения // Качественная теория сложных систем. ЛГПИ, Л.: 1986, С.128–132.

Зайцев В.Ф., Кормилицына Т.В. Дискретно-групповой подход к задаче Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. Тула: Изд-во Тульского политехнического ин-та, 1987. С.11–I4.

торым нелинейным уравнениям, принадлежащим, как правило, классам, об интегрируемости которых ранее ничего не было известно.

Преобразования Беклунда содержат первую производную и находятся приемом, известным как “метод RF-пар”[3]. Он состоит в последовательном повышении и понижении порядка исходного уравнения (не эквивалентном тождественному преобразованию) с последующим вспомогательным точечным преобразованием, “возвращающим” получившееся уравнение в класс исходных. Однако, если исходное уравнение линейно, оно априорно допускает понижение порядка, которое приводит его к уравнению Риккати. Преобразование “на уровне 1-го порядка” и последующее повышение порядка приводит нас снова к линейному уравнению 2-го порядка. Совершенно очевидно, что такое преобразование значительно менее трудоемко, чем метод метод RF-пар, так как исключает появление и преобразование уравнений более высокого порядка, чем исходное. Поэтому на основе предложенного преобразования (которое в дальнейшем будем называть ***преобразованием Мёбиуса***) возможно построение реально действующего алгоритма, трудоемкость которого не превосходит возможности современных пакетов систем аналитических вычислений.

Таким образом, появляется возможность в полной мере использовать замечательные свойства преобразования Мёбиуса. С его помощью решаются прямые задачи Штурма–Лиувилля, т.е. восстанавливается множество собственных значений по одному известному. Преобразование Мёбиуса позволяет также получать явные решения так называемых “***уравнений сдвига спектрального параметра***”, которые появляются при попытке решить прямую задачу восстановления множества значений параметра. Это возможно ввиду того, что решения начального и конечного уравнений связаны зависимостью, называемой “***уравнением связи***”. Оно сводится к неоднородному линейному обыкновенному дифференциальному уравнению (ЛОДУ). Оказывается, решение уравнения связи удовлетворяет уравнению сдвига спектра, которое является нелинейным уравнением 3-го порядка.

Преобразование Мёбиуса обладает очень интересными аналитическими свойствами. Как известно, основы аналитической теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) научно обоснованы в трудах Гаусса, Римана, Фукса во второй половине XIX века. В этих работах были изучены такие основные объекты, как регу-

[3] *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 1993. 462 с.

лярная и иррегулярная особые точки, решения Фробениуса, матрицы монодромии и связи. Было показано, что знание группы матриц монодромии для заданного ЛОДУ позволяет исследовать спектральные задачи для уравнения с особыми точками, не решая само уравнение. К сожалению, вычисления матриц монодромии и связи были реализованы только для гипергеометрического уравнения Гаусса–Римана–Куммера и, соответственно, для всех конфлюэнтных уравнений гипергеометрического типа. Получение аналогичной информации для более сложных уравнений является трудной задачей, которая к настоящему времени в полном объеме не решена. В связи с этим возникает необходимость искать иные возможности получения аналитической информации о матрицах монодромии (связи) для более сложных, чем гипергеометрические, уравнений, в частности, для уравнений класса Гойна. Это связано с тем, что уравнение Гойна (уравнение класса Фукса с 4 регулярными особыми точками) представляется естественным обобщением гипергеометрического уравнения (уравнения класса Фукса с тремя регулярными особыми точками).

Заметим, что теория обратных задач – активно развивающееся направление современной математики, обусловленное необходимостью решения важных классов прикладных задач, особенно в области моделирования и обработки наблюдений. Подобные задачи часто возникают при исследовании дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому новые возможности, открывающиеся при использовании алгоритмов обратной задачи дискретно-группового анализа, представляются весьма важными и актуальными.

Цель работы. Нахождение решений некоторых классов нелинейных уравнений с помощью обратной дискретно-групповой задачи, решение прямых дискретно-групповых задач по восстановлению множества значений спектральных и акцессорных параметров, разработка алгоритмов для получения дифференциальных уравнений с измененными аналитическими свойствами решений Фробениуса, применение этих алгоритмов для интегрирования уравнений в окрестности регулярной особой точки в терминах известных специальных функций, нахождение новых взаимосвязей между специальными функциями, между матрицами связи начального и конечного уравнения.

Методика исследования. В работе применяются методы дискретно-группового анализа, теории функций комплексного переменного и аналитической теории дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Все основные научные результаты являются новыми либо доказываются новыми способами. Так, преобразованием Мёбиуса обобщены и унифицированы многие существовавшие ранее способы восстановления множества параметров уравнений гипергеометрического типа. Разработан универсальный алгоритм для преобразования собственных функций уравнений Лагерра, Эрмита, Гегенбауэра, Лежандра, Чебышева, Якоби при изменении их собственных значений. Найдены решения некоторых классов нелинейных уравнений. Показано, что если преобразование Мёбиуса связывает между собой решения начального и конечного уравнения, то: 1) характеристические показатели у решений начального и конечного уравнений могут отличаться лишь на целое число, 2) уравнения могут иметь разное число ложных особых точек, 3) положение ложных особых точек можно определять произвольно с помощью подходящего выбора параметров преобразования. Установлены соотношения между матрицами связи гипергеометрического уравнения и некоторых случаев уравнения Гойна. Как частный случай, эти результаты применены к уравнению Гойна с одной ложной особой точкой, решения которого могут быть выражены в терминах гипергеометрический функций.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в дальнейших исследованиях по дискретно-групповому анализу и аналитической теории дифференциальных уравнений. Результаты первой главы могут быть включены в литературу по специальным функциям и использованы при разработке спецкурсов по специальным функциям. Материал второй главы может быть включен в литературу по аналитической теории дифференциальных уравнений и специальным функциям, использован в учебном процессе (в специальном курсе по дифференциальным уравнениям) на математических и физических факультетах университетов и педагогических институтов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались:

- на научном семинаре ПОМИ им. Стеклова в марте 2003г.,
- на научных конференциях “Герценовские чтения”, проводившихся в апреле 2003 г. и в апреле 2004 г.,
- на региональной международной конференции “Региональная информатика – 2004” в Санкт-Петербурге в июне 2004 г.,
- на “Чеботаревских чтениях” в Казани в июне 2004г.,

- на международной конференции “Дни дифракции” в июле 2004г. в Санкт-Петербурге.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в семи работах. Результаты, полученные в совместной работе [1], принадлежат авторам в равной мере.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключений к каждой из них, списка литературы, содержащего 75 наименований. Объем диссертации 94 страниц.

Нумерация предложений и уравнений в работе сквозная – в каждом предложении указаны две позиции: номер главы и номер соответствующего предложения.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении отмечается актуальность темы диссертации, приводится обзор результатов исследований по ее тематике, кратко излагается содержание работы.

В *главе 1* выполнены общие исследования обратной задачи дискретно-группового анализа.

В *разделе 1.1* главы 1 приводятся основные понятия задачи Штурма-Лиувилля, вводятся уравнения сдвига спектрального параметра и уравнение связи, формулируются прямая дискретно-групповая задача и дискретный аналог обратной задачи.

Обсуждается одно аналитическое преобразование, которое связывает между собой решения разных ЛОДУ второго порядка. Вывод формы упомянутого преобразования основан на следующих фактах: ЛОДУ второго порядка

$$v''(z) = p(z)v'(z) + q(z)v(z), \tag{1}$$

известным образом ($m(z) = v'(z)/v(z)$) связано с уравнением Риккати, $m'(z) = q(z) + p(z)m(z) - m^2(z)$, так что от решений исходного ЛОДУ можно перейти к решениям уравнения Риккати. Ключевым моментом является следующий факт: если подвергнуть решение уравнения Риккати дробно-рациональному преобразованию:

$$n(z) = \frac{\alpha(z)m(z) + \beta(z)}{\gamma(z)m(z) + \delta(z)} = \frac{\alpha(z)v'(z) + \beta(z)v(z)}{\gamma(z)v'(z) + \delta(z)v(z)}, \tag{2}$$

то вновь получается решение уравнения Риккати (с другими коэффициентами), которое опять можно связать с ЛОДУ второго порядка.

При этом последнее уравнение, которое назовем ***конечным*** ЛОДУ, будет иметь коэффициенты, отличные от коэффициентов исходного ЛОДУ. При этом получается явное соотношение между решениями исходного и конечного ЛОДУ второго порядка

$$\frac{u'(z)}{u(z)} = -\frac{M(z)}{\Delta(x)} \cdot \frac{\alpha(z)v'(z) + \beta(z)v(z)}{\gamma(z)v'(z) + \delta(z)v(z)}, \tag{3}$$

где

$$M(z) = \delta^2 + \gamma'\delta - \delta'\gamma + \gamma\delta p - \gamma^2 q, \quad \Delta(z) = \beta\gamma - \alpha\delta,$$

которое позволяет связать аналитические свойства решений исходного и конечного уравнений. В частности, получаем соотношение между матрицами связи[4)] начального и конечного ЛОДУ. Отметим, что коэффициенты конечного уравнения зависят от функциональных параметров $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\delta(z)$ упомянутого выше дробно-рационального преобразования. Выбирая эти параметры, можно изменять особые точки уравнения, их характер и их число.

Кроме того, с помощью дробно-рационального преобразования можно искать такие уравнения, форма которых остается неизменной под воздействием описанного выше преобразования.

В *разделе 1.2* анализируются уравнения связи (3) и уравнение сдвига спектрального параметра (УССП):

$$\begin{gathered}
-2(p^4\gamma' - \gamma p^3 p' + p^4)\gamma''' + 3\gamma''^2 p^4 - 6p^2[pp'\gamma' + (pp'' - p'^2)\gamma]\gamma'' + \\
+ p^2(4r\nu p + p'^2 + 4pp'')\gamma'^2 + 4r\nu p^3 + \\
+ [2p(-p'^3 + p^2 p''' - pp'p'' - 4pr\nu p')\gamma + 2p^2(2pp'' + 4r\nu p - p'^2)]\gamma' + \\
+ (p'^4 - 2p^2 p' p''' + 3p''^2 p^2 - 2p'^2 pp'' + \\
+ 4r\nu pp'^2)\gamma^2 + 2p(p^2 p''' + p'^3 - 2pp'p'' - 4pr\nu p')\gamma = 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

появляющееся при попытке решить прямую дискретно-групповую задачу – задачу восстановления множества спектрального параметра. При этом структура исходного уравнения должна остаться неизменной, а только лишь спектральный параметр изменяется под действием элемента группы преобразований.

В *разделе 1.3* решается прямая дискретно-групповая задача по восстановлению множества значений параметров уравнения Бесселя и уравнения Бесселя мнимого аргумента, Ломмеля, Вебера. В уравнениях Уиттекера и уравнении для присоединенных функций Лежандра восстанавливается множество значений двух параметров.

4) *Славянов С.Ю., Лай В.* Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей. СПб.: Невский диалект, 2002. 312 с.

В *разделе 1.4* решается обратная дискретно-групповая задача для уравнений гипергеометрического типа. Доказан следующий факт:

Преобразование Мёбиуса связывает собственные функции операторов Штурма-Лиувилля для уравнений Лежандра, Эрмита, Чебышева первого и второго рода, Лагерра, Гегенбауэра, Якоби при изменении значений спектрального параметра.

Все приведенные уравнения относятся к уравнению гипергеометрического типа. Для уравнений гипергеометрического типа справедлива теорема, доказанная в *заключении 1.5*:

Теорема 1.10. *Пусть $v(x)$ – решение начального уравнения:*

$$[v'p]' + r\lambda v = 0,$$

а $u(x)$ – решение преобразованного уравнения:

$$[u'p]' + r\nu u = 0.$$

Если один из параметров преобразования $\delta(x) = 1$, а значение спектрального параметра начального уравнения $\lambda = 0$, то уравнение связи (3) имеет решение вида

$$\gamma(x) = c_1 p(x) \int^x \frac{1}{u^2(t)p(t)}\,dt + p(x)c_2 - p(x)u^2(x) \int^t \frac{1}{u^2(t)p(t)}\,dt + \\ + 2p(x) \int^x u(t)u'(t) \int^t u^{-2}(y)p^{-1}(y)\,dy\;dt,$$

удовлетворяющее уравнению сдвига спектрального параметра (4).

Можно констатировать, что методом обратной задачи удалось решить целый класс уравнений сдвига спектрального параметра, получить произвольное изменение значения спектрального параметра в рамках множества значений собственных чисел, при этом собственная функция преобразовывалась в собственную функцию, т.е. краевые условия при решения обратной задачи не изменялись.

Дискретный аналог обратной задачи обобщен следующей теоремой:

Теорема 1.12. *Пусть преобразование Мёбиуса трансформирует уравнение*

$$v''(x) + p(x)v'(x) = 0$$

в уравнение

$$u''(x) + A(x)u'(x) + B(x)u(x) = 0,$$

фундаментальная система решений которого первоначально известна. Тогда "условие трансформации"

$$
\begin{gathered}
2(1+\gamma'+p\gamma)\gamma'''-3\gamma''^2-6(p\gamma)'\gamma''+(-4B-6p^2+6p'+2A'+A^2)\gamma'^2+\\
+2[(p''-2p^3+pA^2-4Bp+2A'p)\gamma+2A'-2p^2-4B+A^2+4p']\gamma'+\\
+(A^2p^2+2p''p-4Bp^2-p^4+2A'p^2-3p'^2)\gamma^2+\\
+2(2A'p+pp'-p^3-4Bp+p''+pA^2)\gamma-p^2+2p'-4B+2A'+A^2=0,
\end{gathered}
\tag{5}
$$

при выполнении которого данное преобразование возможно, имеет решение

$$
\begin{gathered}
\gamma(x)=e^{-\int^x p(t)\,dt}\Big[c_2\int^x e^{-\int^t A(y)\,dy}u^{-2}(t)\,dt+c_1-\int^x e^{-\int^t A(y)dy}u^{-2}(t)\,dt\cdot\\
\cdot\int^x(2u'(t)+u(t)p(t)+u(t)A(t))e^{\int^t A(y)dy+u(t)\int^t p(y)\,dy}\,dt+\\
+\int^x(2u'(t)+u(t)p(t)+u(t)A(t))e^{\int^t A(y)dy+u(t)\int^t p(y)\,dy}\cdot\\
\cdot\int^t e^{-\int^y A(z)\,dz}u^{-2}(y)dy\;dt\Big]
\end{gathered}
$$

Условием трансформации называется уравнение, по смыслу эквивалентное УССП. Его решение позволяет получить такие параметры преобразования Мёбиуса, при которых указанная в теореме трансформация возможна. Этот алгоритм позволяет находить решение нелинейных обыкновенных уравнений третьего порядка (5) – условия трансформации, решая линейные неоднородные уравнения (3) – уравнения связи.

В *главе 2* выполнены исследования аналитических свойств преобразования Мёбиуса, найдены решения некоторых уравнений в терминах известных специальных функций и получены данные монодромии для некоторых уравнений класса Фукса.

Основным сведениям аналитической теории и описанию локальных свойств преобразования Мёбиуса посвящены *разделы 2.1* и *2.2* второй главы соответственно[5)]. Будем рассматривать ситуацию, когда коэф-

[5)] Основные понятия (регулярная и ложная особая точка, характеристические показатели, решения Фробениуса и Томе) мы черпаем из книг:

1) *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1941. 398 с.

2) *Чибрикова Л.И.* Избранные главы аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Казань: Казанский фонд "Математика", 1996. 312 с.

фициентами ЛОДУ (1) являются рациональные функции независимого переменного z. Если функциональные параметры $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\delta(z)$ дробно-рационального преобразования (3) (как и коэффициенты исходного ЛОДУ) являются рациональными функциями независимой переменной, то и коэффициенты конечного ЛОДУ будут рациональными функциями независимой переменной.

В *разделе 2.2* второй главы доказаны следующие теоремы:

Теорема 2.1. *Ложная регулярная точка порядка $k = 1$ – устранимая особая точка уравнения (1).*

Теорема 2.2. *Пусть z_* – регулярная особая точка исходного уравнения* (1), *причем эта точка не является ни точкой вырождения дробно-рационального преобразования* ($\Delta(z_*) \neq 0$), *ни нулем функции $M(z)$. Тогда z_* – регулярная особая точка для конечного уравнения, преобразование* (3) *переводит решения Фробениуса начального уравнения в решения Фробениуса конечного уравнения, причем разность соответствующих характеристических показателей равна p_{-1}.*

Здесь p_{-1} является вычетом коэффициента при первой производной начального уравнения, разложенного в ряд

$$p(z) = \frac{p_{-1}^{(z_*)}}{z - z_*} + p_0^{(z_*)} + \ldots .$$

Теорема 2.3. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *исходное уравнение имеет в окрестности точки $z = z_*$ только голоморфные в этой точке решения;*

2) *параметры дробно-рационального преобразования голоморфны в окрестности этой точки;*

3) *разность характеристических показателей конечного уравнения в точке $z = z_*$ – целое число.*

Тогда решения Фробениуса конечного уравнения не содержат слагаемого с логарифмическим поведением в окрестности точки z_*, а разность их характеристических показателей в точке z_* является целым числом.

Теорема 2.4. *Если точка $z = z_*$ является нулем кратности k функции $M(z)$, не совпадает с особыми точками исходного уравнения и $\Delta(z_*) \neq 0$, то конечное уравнение имеет в точке $z = z_*$ ложную регулярную особую точку порядка $k + 1$.*

Теорема 2.5. *Если точка $z = z_*$ – (простая) точка вырождения дробно-рационального преобразования, т.е. $\Delta(z_*) = 0$, не совпадает с нулями функции $M(z)$ и с особыми точками исходного уравнения, то конечное уравнение имеет в точке $z = z_*$ устранимую регулярную особую точку.*

Теорема 2.6. *Если точка $z = z_*$ – одновременно простой ноль функции $M(z)$ и регулярная особая точка исходного уравнения, и не является точкой вырождения дробно-рационального преобразования ($\Delta(z_*) \neq 0$), то эта точка будет регулярной особой точкой конечного уравнения, причем дробно-рациональное преобразование переводит решения Фробениуса исходного уравнения в решения Фробениуса конечного уравнения и разность характеристических показателей либо изменяется на 2, либо не изменяется.*

Теорема 2.7. *Пусть точка $z = z_*$ – простой ноль функции $M(z)$ и простая точка вырождения дробно-рационального преобразования, т.е. $\Delta(z_*) = 0$ и обыкновенная точка исходного уравнения. Тогда эта точка будет либо обыкновенной точкой конечного уравнения, либо ложной особой точкой.*

Теорема 2.8. *Преобразование Мёбиуса сохраняет принадлежность уравнения классу Фукса, если параметры преобразования $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\delta(z)$ суть линейные функции.*

Теорема 2.9. *Преобразование Мёбиуса переводит решения Томе начального уравнения в решения Томе конечного уравнения, при этом характеристические множители не меняются.*

Теорема 2.10. *Ни точка кратного вырождения преобразования, ни ее совпадения с исходной особенностью начального уравнения или кратными нулями $N(z)$ не образуют иррегулярной точки в конечном уравнении.*

В *разделе 2.3* преобразование Мёбиуса обобщается: показывается, что уравнение Риккати является инвариантным относительно дробно-квадратичного преобразования с одним ограничением на параметры преобразования. Дробно-квадратичное преобразование обладает 4 независимыми параметрами преобразования, т.е. на один больше, чем дробно-линейное.

В *разделе 2.4* обсуждается глобальное поведение решений Фробениуса, а именно, устанавливается изменение матриц связи под воздействием преобразования Мёбиуса. Рассматриваются две пары решений

Фробениуса в окрестности двух регулярных особых точек z_1 и z_2:

$$V_k(z) = \begin{pmatrix} v_{1k}(z) \\ v_{2k}(z) \end{pmatrix}; \quad U_k(z) = \begin{pmatrix} u_{1k}(z) \\ u_{2k}(z) \end{pmatrix}; \qquad k := 1,\, 2.$$

где $v_{1,1}(z)$ и $v_{2,1}(z)$ – решения начального уравнения в окрестности особой точки z_1, а $v_{1,2}(z)$ и $v_{2,2}(z)$ – в окрестности другой особой точки z_2. При этом решения $v_{1,1}(z)$ и $v_{1,2}(z)$ голоморфны в точке z_1. Тогда $u_{1,k}(z)$ и $u_{2,k}(z)$ $\quad (k := 1,\, 2)$ – решения конечного уравнения в окрестностях точек z_1 и z_2 соответственно.

Определяются матрицы связи

$$\Gamma(L) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Xi(L) = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix}$$

для решений Фробениуса в точке z_1 и z_2 для начального и конечного уравнения соответственно

$$\begin{aligned} V_1(z) &\implies \Gamma(L)V_2(z), \\ U_1(z) &\implies \Xi(L)U_2(z). \end{aligned}$$

Следующие теоремы выявляют соотношения для матриц связи $\Gamma(L)$ и $\Xi(L)$ в двух случаях:

Теорема 2.11. *Пусть регулярная особая точка z_2 не является ни точкой вырождения дробно-рационального преобразования ($\Delta(z_*) \neq 0$), ни нулем функции $M(z)$. Тогда*

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)\frac{\Xi_{12}}{\Xi_{11}} = \mu_2 \left\{ \frac{\alpha(z_2)}{\alpha(z_2)\kappa + \beta(z_2)} - \frac{\gamma(z_2)}{\gamma(z_2)\kappa + \delta(z_2)} \right\} \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{11}},$$

где ρ_2, ρ_1 – показатели ветвления решений Фробениуса конечного уравнения; μ_2 – показатель ветвления неголоморфного решения Фробениуса исходного уравнения, решения Фробениуса соответствуют точке z_2, κ – значение производной $v_{1,2}(z_2)$ голоморфного в точке $z = z_2$ решения Фробениуса.

Теорема 2.12. *Пусть точка z_2 – одновременно регулярная особая точка уравнения и нуль функции $M(z)$ и не является точкой вырождения дробно-рационального преобразования ($\Delta(z_*) \neq 0$). Тогда выполняется соотношение:*

$$\frac{\Xi_{12}}{\Xi_{11}} = \frac{\delta(z_2) + \gamma'(z_2)[1 + \operatorname{Res} q(z_2)]}{\delta(z_2)} \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{11}}.$$

Здесь $\operatorname{Res} q(z_2)$ означает вычет функции $q(z)$, вычисленный в точке z_2.

В *разделе 2.5* приводятся приложения преобразования Мёбиуса – отталкиваясь от известных и хорошо изученных уравнений (например, гипергеометрического класса, уравнения Эйри и Вебера), строятся более сложные уравнения, исследуются их аналитические свойства. Как следствие, исследуется связь таких объектов, как особые точки, наборы решений Фробениуса, матрицы связи и пр., исходного уравнения и тех уравнений, которые можно из него получить с помощью описанной процедуры, добывается аналитическая информация об этих объектах. В том числе:

1. На основе гипергеометрического уравнения Гаусса строится уравнение Гойна с ложной точкой 2-го и 3-го порядков, уравнения класса Фукса с 5 и 6 особыми точками; доказывается, что на основе гипергеометрического уравнения с помощью преобразования Мебиуса можно построить уравнение класса Фукса, отличающееся от исходного наличием любого количества произвольно расположенных ложных особых точек.

2. На основе конфлюэнтного гипергеометрического уравнения строится конфлюэнтное уравнение Гойна с ложной точкой 2-го порядка, показывается алгоритм для получения конфлюэнтного уравнения Гойна с ложной точкой любого порядка. Приводятся вычисления, в результате которых получаем уравнение, отличающееся от начального вырожденного уравнения Гаусса наличием двух ложных особых точек; показывается возможность менять набор особых точек за счет увеличения (уменьшения) количества произвольно расположенных ложных особых точек.

3. На основе уравнения Гойна и его конфлюэнтной версии строются уравнения, отличающиеся от начальных наличием двух произвольно расположенных особых точек; акцессорный параметр при этом меняется контролируемым образом и зависит от расположения новых ложных точек.

4. С помощью преобразования Мебиуса меняем набор особых точек уравнений Эйри и Вебера за счет добавления ложных особых точек.

В заключение приношу глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Зайцеву Валентину Федоровичу и научному консультанту доктору физико-

математических наук, профессору Казакову Александру Яковлевичу за постоянное внимание к моей работе и помощь в ее выполнении.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

[1] *Сирота Ю.Н.* Преобразование Мёбиуса для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / *Ю.Н.Сирота*, *А.Я.Казаков* // Труды научных семинаров ПОМИ РАН.– 2004.– Т.308.– С.67-88.

[2] *Сирота Ю.Н.* Обратная дискретно-групповая задача для линейных дифференциальных уравнений / *Ю.Н.Сирота* // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения 2004. – СПб.: Издательство БАН, 2004. – С.96-101.

[3] *Сирота Ю.Н.* Преобразование Мёбиуса линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка / *Ю.Н.Сирота* // Труды математического центра имени Н.Л.Лобачебского.– 2004. – Т.24. – С.98-105.

[4] *Сирота Ю.Н.* О дискретном аналоге обратной задачи / *Ю.Н.Сирота* // Тезисы конференции "Региональная информатика–2004". СПб, 2004. – С.403-404.

[5] *Сирота Ю.Н.* Приложения преобразования Мёбиуса / *Ю.Н.Сирота* // 13 с. Деп. в ВИНИТИ, 24.06.2004, №1078-В2004.

[6] *Сирота Ю.Н.* Дискретно-групповая задача для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка / *Ю.Н.Сирота* // 8 с. Деп. в ВИНИТИ, 24.06.2004, №1079-В2004.

[7] *Сирота Ю.Н.* Обратная дискретно-групповая задача уравнений гипергеометрического типа / *Ю.Н.Сирота* // 24 с. Деп. в ВИНИТИ, 24.06.2004, №1080-В2004.

Подписано к печати 04.11.04. Формат 60×90 /16.
Бумага офсетная. Печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ №
Отпечатано в ООО "Томас Петербург"
199004, Санкт-Петербург, В.О., Средний пр. 28.