

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ШЕФЕР

Владимир Александрович

**МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО
ДВИЖЕНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ
ФИКТИВНОГО ПРИТЯГИВАЮЩЕГО ЦЕНТРА
С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ**

Специальность 01.03.01 — астрометрия и небесная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук



Санкт-Петербург 2003

Работа выполнена в НИИ прикладной математики и механики при
Томском государственном университете

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор

Батраков Юрий Васильевич

доктор физико-математических наук,
профессор

Шапорев Сергей Дмитриевич

доктор физико-математических наук

Шевченко Иван Иванович

Ведущая организация:

Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга

Защита диссертации состоится « 20 » ноября _____ 2003 г.
в 14 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.232.15
по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при
Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504,
Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, ауд. 2143
(математико-механический факультет).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СПбГУ.

Автореферат разослан

« 3 » сентября _____ 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



В.В. Орлов

Актуальность темы

Проблема изучения движения малых тел Солнечной системы всегда занимала одно из центральных мест в прикладной небесной механике. В последние 10-15 лет интерес к этой проблеме еще более возрос. Основной причиной такого внимания стало осознание научными кругами и широкой общественностью меры той опасности, которую представляют столкновения Земли с астероидами и кометами. Другой причиной, во многом связанной с первой, послужили массовые открытия новых малых планет. Причем число открытий с каждым годом растет. Это оказалось возможным благодаря осуществлению ряда крупных проектов по обнаружению космических тел, сближающихся с Землей, а также широкому применению электронно-оптических методов наблюдений (в первую очередь **ПЗС-технологий**) и современных средств компьютерной обработки измерительной информации. Успешное выполнение программ по изучению малых тел с помощью космических аппаратов и решение проблем, связанных с **астероидно-кометной** опасностью, предъявляют особенно высокие требования к точности и оперативности определения пространственных положений интересующих нас объектов. Это делает необходимым и своевременным дальнейшее совершенствование уже имеющихся и создание новых эффективных методов исследования движения малых тел Солнечной системы по высокоточным наблюдательным данным.

Цель и основные задачи исследования

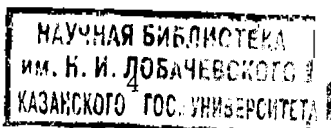
Сложный характер движения большинства малых планет и почти всех комет делает практически невозможным или крайне трудоемким применение аналитических методов исследования. Это приводит к необходимости использовать численные методы, которые, как правило, отличаются простотой и надежностью. Однако, применение последних также наталкивается на ряд трудностей, поскольку классические ньютоновские уравнения **движения** сингулярны в точках соударений гравитирующих масс, а их решения неустойчивы в смысле Ляпунова (**Штифель, Шейфеле, 1975**). Кроме того, численное интегрирование дифференциальных

уравнений небесной механики на больших интервалах изменения независимой переменной может потребовать значительных затрат машинного времени. Поэтому наиболее эффективное решение задач, связанных с изучением движения рассматриваемых небесных тел, следует искать в рациональном сочетании численного и аналитического подходов.

Целью диссертации является разработка новых эффективных методов, предназначенных для решения трех тесно связанных между собой задач — определения предварительных орбит, улучшения начальных параметров движения и высокоточного прогнозирования пространственных положений и скоростей малых тел.

Для достижения указанной цели выбирается подход, основанный на использовании фиктивного притягивающего центра с переменной массой и специальных преобразований дифференциальных уравнений движения, таких, как преобразование Энке, линеаризирующие и регуляризирующие преобразования. Реализация этого подхода включает в себя постановку и решение следующих основных задач:

- построение новых соприкасающихся с реальной возмущенной траекторией промежуточных орбит, лучше аппроксимирующих начальный участок движения, чем оскулирующая кеплеровская орбита и аналогичные орбиты других авторов;
- вывод дифференциальных уравнений в отклонениях реального движения от промежуточного опорного, обобщающих уравнения классического метода Энке вычисления возмущенной траектории;
- конструирование новых методов интегрирования дифференциальных уравнений движения, в которых решение представляется последовательностью малых дуг промежуточных орбит, и использование их в качестве опорных методов при построении экстраполяционных алгоритмов;
- разработка новых алгоритмов вычисления частных производных от текущих параметров движения по их начальным значениям (изохронные производные) на основе формул для соприкасающихся орбит;
- определение промежуточных возмущенных орбит по минимальному числу позиционных измерений;
- получение уравнений движения в регуляризирующих переменных от-



носителем подвижного фиктивного центра с переменной массой в рамках возмущенной ограниченной задачи трех тел;

— исследование эффективности новых методов в сравнении с наиболее часто применяемыми на практике алгоритмами.

Научная новизна работы

Все основные результаты, представленные в диссертации, получены впервые. Новизна исследования состоит в следующем.

1. Разработана теория промежуточного движения, опирающаяся на предложенную автором идею ввода фиктивного притягивающего центра с изменяющимся со временем гравитационным параметром.
2. На основе разработанной теории построены новые промежуточные орбиты **некеплеровского** типа с касанием первого, второго и третьего порядка к траектории реального движения (**оскулирующие** и **сверхоскулирующие** промежуточные орбиты). Теоретически и практически показано, что построенные орбиты обеспечивают в своем классе орбит, определяемом порядком касания, наивысшую точность аппроксимации возмущенного движения на начальном участке траектории.
3. Обобщен классический метод Энке специальных возмущений путем **замены** оскулирующей кеплеровской опорной орбиты на построенные **автором** промежуточные орбиты.
4. Получены простые методы решения уравнений орбитального движения первого, второго и третьего порядков точности, основанные на пошаговой аналитической аппроксимации возмущенной траектории дугами промежуточных орбит.
5. Предложены новые экстраполяционные алгоритмы с переменной длиной шага и переменным порядком, использующие полученные пошаговые аналитические методы в качестве опорных. При этом создан универсальный рекуррентный алгоритм вычисления элементов экстраполяционной таблицы, пригодный для опорного метода произвольного порядка.
6. Построены алгоритмы вычисления матрицы изохронных производных с помощью дуг **оскулирующих** и **сверхоскулирующих** промежуточных орбит. Доказано, что при использовании этих алгоритмов повышение точности вычисления изохронных производных на заданном промежутке вре-

мени путем сокращения интервала применения промежуточной орбиты возможно только в том случае, когда порядок касания промежуточной орбиты выше первого.

7. Разработан метод определения промежуточной орбиты по двум векторам положения и интервалу времени между ними. Доказано, что предельные значения параметров этой орбиты при стремящемся к нулю опорном временном интервале задают сверхоскулирующую орбиту с касанием третьего порядка.

8. Предложен метод определения промежуточной возмущенной орбиты по трем положениям малого тела на небесной сфере, разработанный по аналогии со схемой классического метода Лагранжа–Гаусса.

9. Обобщен подход В.Себехея (1976) к линеаризации и регуляризации динамических систем с помощью интегралов движения посредством введения дополнительно к временному преобразованию преобразования зависимых переменных.

10. Выведены уравнения движения возмущенной ограниченной задачи трех тел в регуляризирующих переменных с использованием в качестве центра регуляризации фиктивного притягивающего центра с переменной массой. И. Получены оценки эффективности разработанных методов и алгоритмов в задачах исследования движения ряда малых планет и комет. Показано, что новые алгоритмы и методы отличаются более высокой точностью и оперативностью по сравнению с существующими аналогами.

Теоретическая и практическая значимость

Развитая в работе теория промежуточного движения может быть использована при создании новых методов и алгоритмов численного или аналитического моделирования движения небесных тел. Она дает большую свободу в выборе параметров промежуточного движения и закона изменения массы фиктивного центра, что позволяет конструировать и другие семейства орбит, отличные от рассмотренных в диссертации.

Построенный автором рекуррентный алгоритм вычисления элементов экстраполяционной таблицы можно применить для разработки экстраполяционных методов решения широкого класса **обыкновенных** дифференциальных уравнений при условии, что опорный метод удовлетворяет

определенным требованиям (Хайрер и др., 1990).

Предложенный в работе метод линеаризации и регуляризации уравнений движения может быть применен и к некоторым другим системам дифференциальных уравнений, обладающих интегралами.

Разработанный автором алгоритмический аппарат и его программная реализация могут быть успешно применены для решения разнообразных задач, связанных с определением, уточнением и прогнозированием орбит астероидов, комет и искусственных небесных тел. Результаты исследования эффективности алгоритмов и программ можно использовать в аналогичных исследованиях при выявлении практических преимуществ той или иной методики.

Параметры движения астероидов (145) Адеона, (1566) Икар и (4179) Тугатис, полученные в результате применения процедуры улучшения орбит, могут быть приняты за основу при подготовке рабочих эфемерид для дальнейших наблюдений данных объектов и обработки результатов этих наблюдений.

Полученные в работе методы и алгоритмы могут найти применение во всех научных учреждениях, где занимаются изучением движения малых тел Солнечной системы и динамикой космического полета, а также в учебном процессе вузов, где преподаётся небесная механика и динамическая астрономия.

Результаты диссертационной работы успешно применялись и продолжают применяться в отделе астрометрии и небесной механики НИИ прикладной математики и механики при Томском госуниверситете в соответствии с планами выполнения госбюджетных тем "Исследование движения, распределения и эволюции орбит малых тел Солнечной системы по наблюдениям с Земли и из космоса" и "Математическое моделирование движения, распределения и орбитальной эволюции малых тел Солнечной системы по результатам **измерений**", грантов РФФИ N 96-02-17999 "Разработка аналитических и численных методов исследования возмущений сложной природы в движении малых тел Солнечной **системы**", N 98-02-16491 "Разработка численных и полуаналитических методов исследования эволюции орбит малых тел Солнечной системы" и N 01-02-17266 "**Реше-**

ние ряда сложных задач динамики малых тел Солнечной системы", а также НИР "Численные алгоритмы исследования орбитальной эволюции малых тел Солнечной системы и фрагментов космического мусора" в рамках ГНТП "Астрономия".

Апробация работы

- Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на
- всесоюзной конференции "Методы исследования движения, физика и динамика малых тел Солнечной системы" (Душанбе, август 1989 г.);
 - всесоюзном совещании "Эфемеридная астрономия и позиционные наблюдения" (Ленинград, август 1991 г.);
 - научных конференциях, проводившихся в рамках II и III съездов Астрономического общества (Москва, октябрь-ноябрь 1991 г., май 1993 г.);
 - всесоюзном совещании (с международным участием) "Астероидная опасность" (Санкт-Петербург, октябрь 1992 г.);
 - комплексной конференции (с международным участием) "Астероидная опасность-93" (Санкт-Петербург, май 1993 г.);
 - международной конференции "Проблемы защиты Земли от столкновения с опасными космическими объектами" (Снежинск, сентябрь 1994 г.);
 - международной конференции "Сопряженные задачи механики и экологии" (Томск, сентябрь-октябрь 1996 г.);
 - международной конференции "Всесибирские чтения по математике и механике" (Томск, июнь 1997 г.);
 - международной научной школе-семинаре НАТО "The Dynamics of Small Bodies in the Solar System: A Major Key to Solar System Studies" (Маратезя, Италия, июнь-июль 1997 г.);
 - научной конференции "Новые теоретические результаты и практические задачи небесной механики" (Москва, декабрь 1997 г.);
 - всероссийских научных конференциях "Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики" (Томск, июнь 1998 г., июнь 2000 г., октябрь 2002 г.);
 - весенней конференции Астрономического и Немецкого геологического обществ "Asteroids, Meteorites, Impacts and their Consequences (AMICO

2000)" (Нердлинген, Германия, май 2000 г.);

— совместной конференции Европейского и Евро-Азиатского астрономических обществ "JENAM-2000" (Москва, май июнь 2000 г.);

— Всероссийской астрономической конференции (Санкт-Петербург, август 2001 г.);

— международной конференции "Asteroids, Comets, Meteors" (Берлин, Германия, июль-август 2002 г.);

— международной конференции "Небесная механика - 2002: результаты и перспективы" (Санкт-Петербург, сентябрь 2002 г.);

— семинарах отдела небесной механики и астрометрии НИИ ПММ при ТГУ (Томск, 1991-2003 гг.);

— семинаре кафедры небесной механики СПбГУ (Санкт-Петербург, июнь 2003 г.).

Публикации

По теме диссертационной работы имеются 22 публикации, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка использованных литературных источников (135 наименований) и пяти приложений, содержит 14 рисунков и 35 таблиц. Общий объём работы составляет 203 страницы машинописного текста, из них 11 страниц занимают приложения.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы, формулируются цель и основные задачи исследования, определяется новизна работы, ее теоретическая и практическая значимость, излагаются структура и краткое содержание диссертации, перечисляются результаты, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена теории промежуточного движения и построению оскулирующих и сверхоскулирующих промежуточных орбит.

Фиктивный притягивающий центр с постоянной массой, помещенный

на начальном векторе ускорения, был впервые использован Н.А.Шайхом (1966) для построения простой промежуточной орбиты с касанием второго порядка в рамках ограниченной задачи трех тел. В.И.Скрипниченко (1970) повысил точность аппроксимации движения в методе Шайха, допустив возможность прямолинейного и равномерного движения фиктивного центра. Дальнейшее развитие этот подход получил в работах Ю.В. Батракова (1981а, б), в которых построены промежуточные орбиты с касанием первого, второго и третьего порядка применительно к задачам с силами более общего вида. Промежуточное движение, аппроксимирующее реальное возмущенное движение малого тела, рассматривается как комбинация двух движений: движения фиктивного притягивающего центра и движения относительно фиктивного центра. Первое в общем случае допускается прямолинейным и равномерным, а второе описывается уравнениями невозмущенного кеплеровского движения. Кроме условий касания соответствующего порядка используется условие минимума главной части отклонения промежуточного движения от реального.

Излагаемая в главе теория промежуточного движения обобщает и развивает идеи и подходы вышеназванных авторов. В основу теории положена концепция, впервые предложенная и примененная автором в публикациях (Шефер, 1998а, б), согласно которой масса фиктивного центра выбирается не постоянной величиной, а ищется в виде функции времени. Движение по промежуточной траектории относительно фиктивного центра при этом не является кеплеровским и описывается уравнениями возмущенной задачи Гюльдена–Мещерского с касательными возмущениями специального вида.

Рассмотрим построение промежуточного движения более подробно.

Движение малого тела под действием ньютоновского притяжения системы точечных масс и других сил произвольной природы задается уравнениями относительного движения и начальными условиями:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{K}{r^3}\mathbf{x} + \mathcal{F} \equiv \mathbf{G}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0, \quad (1)$$

где \mathbf{x} — вектор положения малого тела, $\dot{\mathbf{r}} = |\dot{\mathbf{x}}|$, $K = k^2 M = \text{const}$ (k^2 — гравитационная постоянная, M — масса центрального тела),

\mathcal{F} — вектор возмущающего ускорения.

Нижний индекс i ($i = 0, 1, 2$) повсюду в тексте автореферата, если это не оговаривается отдельно, означает, что данная величина определена при $t = t_i$.

Вводится фиктивный притягивающий центр с гравитационным параметром μ , расположенный на конце вектора

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 + \dot{\mathbf{Z}}_0(t - t_0). \quad (2)$$

Уравнения движения малого тела относительно фиктивного центра тогда примут вид

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{Z}. \quad (3)$$

В той же системе координат, в которой рассматривается реальное движение (3), задается промежуточное движение

$$\ddot{\mathbf{q}}^* = -\frac{\mu}{R^{*3}}\mathbf{q}^* + \lambda\dot{\mathbf{q}}^*, \quad \mathbf{q}^*(t_0) = \mathbf{q}_0^*, \quad \dot{\mathbf{q}}^*(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0^*. \quad (4)$$

Здесь $R^* = |\mathbf{q}^*|$. Параметры μ и λ предполагаются функциями, непрерывно изменяющимися со временем.

Пусть поведение гравитационного параметра μ подчиняется закону Эддингтона-Джинса, который можно представить в виде

$$\dot{\mu} = \phi\mu_0^{1-n}\mu^n, \quad (5)$$

а параметр λ задается формулой

$$\lambda = \phi \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{n-1} \left[\frac{L\mu_0^N - (2-n)C\mu^N}{2L\mu_0^N - C\mu^N} \right] \quad \text{для } n \neq \frac{3}{2}, \quad (6)$$

где

$$\phi = 2\lambda_0 + C, \quad C = \dot{\mu}_0/\mu_0 - 2\lambda_0, \quad L = (2-n)\phi - \lambda_0, \quad N = (3-2n)/2.$$

Введенное таким образом промежуточное движение описывается замкнутыми аналитическими выражениями, поскольку с помощью координатно-временного преобразования

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\eta^2}\mathbf{q}^*, \quad d\theta = \frac{1}{\eta^3}\sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}}dt, \quad \eta = 1 - \frac{C}{2N\phi} \left[\left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^N - 1 \right], \quad \mu_0 \neq 0$$

уравнения (4) приводятся к уравнениям движения классической задачи двух тел с постоянными массами.

Следовательно, промежуточное движение, представленное уравнениями (2), (4)–(6), полностью определяется векторами и скалярами

$$\mathbf{z}_0, \dot{\mathbf{z}}_0, \mathbf{q}_0^*, \dot{\mathbf{q}}_0^*, \mu_0, \lambda_0, C, n. \quad (7)$$

Выбор значений постоянных (7) в главе осуществляется из условий, задающих касание определенного порядка к реальной траектории, и ряда дополнительных требований, обеспечивающих наилучшую аппроксимацию возмущенного движения. Строятся новые классы промежуточных орбит с касанием первого, второго и третьего порядка. Эти орбиты лучше аппроксимируют возмущенное движение на начальном участке траектории, чем оскулирующая кеплеровская орбита. Они точнее и аналогичных орбит других авторов, поскольку в промежуточном движении нами учитываются возмущающие силы, которые можно интерпретировать как эффект переменности массы фиктивного центра в соответствии с законом Эддингтона–Джинса и эффект действия дополнительной касательной силы. Показывается, что среди множества промежуточных орбит с определенным порядком касания построенные орбиты являются самыми точными. Чем больше порядок касания к возмущенной траектории и меньше угол наклона орбитальной плоскости исследуемого тела к плоскости, в которой действуют основные возмущающие силы, тем выше точность аппроксимации нашими орбитами реального движения. В случае плоского возмущенного движения порядок касания промежуточных орбит автоматически повышается на одну или две единицы.

Дается вывод всех необходимых формул для решения уравнений промежуточного движения, пригодных как для положительных, так и для отрицательных значений гравитационного параметра фиктивного центра. Практическая ценность полученных формул повышена, благодаря использованию преобразований, позволяющих избежать потери значащих цифр при вычислении разностей почти равных величин в окрестности эпохи оскуляции. Рассматриваются частные случаи сверхоскулирующих промежуточных орбит, построение которых требует применения формул эллиптического движения с минимально возможным значением эксцен-

триситета эллиптической орбиты. Использование полученных формул на практике не связано ни с какими ограничениями в выборе действующих на малое тело сил, кроме требования **дифференцируемости** выражений для них.

Материал данной главы является основной теоретической базой для методов, представляемых в следующих четырех главах.

Во второй главе описываются обобщенные методы Энке специальных возмущений. Эти методы основаны на следующих дифференциальных уравнениях для вектора отклонения реального движения от опорного промежуточного:

$$\ddot{\rho} = \mathcal{F} + \frac{\mu}{r^3}(Q\mathbf{q}^* - \mathbf{Z} - \rho) - \frac{\delta\mu}{r^3}\mathbf{x} - \lambda\dot{\mathbf{q}}^*, \quad (8)$$

где

$$Q = \left(\frac{r^2 + rR^* + R^{*2}}{r + R^*} \right) \left\{ \frac{(\mathbf{Z} + \rho)^2 + 2[(\mathbf{Z} + \rho) \cdot \mathbf{q}^*]}{R^{*3}} \right\},$$

$$\delta\mu = K - \mu = \delta\mu_0 + \mu_0 - \mu,$$

$$\delta\mu_0 = \left\{ [(\mathcal{F}_0 - \lambda_0\dot{\mathbf{q}}_0) \cdot \mathbf{q}_0] + \frac{K}{r_0^3} [Q_0R_0^2 - (\mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{q}_0)] \right\} R_0, \quad R_0 = |\mathbf{q}_0|,$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \rho = \mathbf{Z} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{Z} + \mathbf{q}^*, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^* + \rho.$$

Уравнения (8) выведены с использованием основных формул для построенного в первой главе промежуточного движения. В качестве **опорных** решений применяются как оскулирующие, так и **сверхоскулирующие** орбиты. При выводе уравнений (8) использовался прием (Рой, 1981), с помощью которого полностью или частично разрешается разностная неопределенность, имеющая место при вычитании в правых частях уравнений в отклонениях двух почти равных векторов. Указываются приемы и приводятся соотношения, позволяющие решить аналогичную проблему, возникающую при вычислении разности $\mu - \mu_0$ в окрестности начального момента времени. Если в (8) задать $\mu = \mu_0 = K$, $\mathbf{Z}_0 = \dot{\mathbf{Z}}_0 = \mathbf{0}$, то мы получим дифференциальные уравнения, соответствующие классическому методу Энке.

Решая уравнения (8) с начальными условиями $\rho_0 = \dot{\rho}_0 = \mathbf{0}$ каким-либо подходящим методом численного интегрирования и зная координа-

ты и компоненты вектора скорости малого тела на промежуточной орбите, найдем в любой заданный момент времени t векторы положения и скорости малого тела для возмущенного движения в исходной системе координат. Значительное уменьшение шага в процессе интегрирования служит признаком того, что использование данной опорной орбиты становится неэффективным и необходимо приступить к построению новой (спрямить орбиту). Показывается, что более высокая эффективность этой процедуры по сравнению с классическим алгоритмом Энке обеспечивается существенно меньшими численными значениями правых частей уравнений в отклонениях (8) в окрестности эпохи спрямления опорной орбиты. Отмечается, что, если в процессе вычислений необходима частая смена опорной орбиты, то при выборе метода интегрирования предпочтение следует отдать **одношаговым** алгоритмам. Даются рекомендации по упрощению алгоритма построения опорной промежуточной орбиты в случае сложной структуры возмущений.

Описываются численные эксперименты, выполненные на примерах вычисления орбит особой малой планеты (4179) Тоутатис и короткопериодической кометы Хонды-Мркоса-Пайдушаковой. Движение этих объектов рассматривается на интервалах времени, включающих моменты тесных сближений с Землей и Юпитером. Уравнения промежуточного движения решаются с использованием универсальных переменных, применимых для любых типов возмущенных кеплеровских орбит. Изменение гравитационного параметра фиктивного центра подчиняется первому закону Мешерского ($n = 2$). В качестве метода численного интегрирования дифференциальных уравнений выбран неявный одношаговый алгоритм Эверхарта 15-го порядка.

Эксперименты подтверждают теоретические выводы о высокой эффективности построенных нами промежуточных орбит при аппроксимации возмущенного движения. Точность аппроксимации с помощью промежуточных орбит в ближайшей окрестности эпохи оскуляции существенно (до нескольких порядков) выше по сравнению с оскулирующей кеплеровской орбитой. При этом точность аппроксимации возрастает с увеличением порядка касания промежуточной орбиты. Результаты исследования

показывают, что применение построенных орбит в методе Энке особенно выгодно при изучении движения малого тела вблизи больших возмущающих масс (планет, их спутников). Использование уравнений в отклонениях (8) в этих и других случаях возмущенного движения позволяет не только увеличить интервал времени между спрямлениями орбиты, но и избежать быстрого накопления ошибок округления в процессе численного интегрирования. Это в свою очередь приводит к повышению точности вычислений и экономии машинного времени. Так сравнение обобщенных методов, использующих сверхоскулирующие орбиты, с классическим методом Энке на примере прогнозирования сильновозмущенного движения указанной выше кометы на интервале 20000 суток показывает, что первые дают результаты, точность которых почти на порядок лучше. Затраты машинного времени при этом на 20-40% меньше.

Третья глава содержит новые численно-аналитические методы решения уравнений орбитального движения.

Глава начинается с изложения простых методов, основанных на пошаговой аналитической аппроксимации возмущенной траектории дугами оскулирующих и сверхоскулирующих промежуточных орбит. Построение каждой последующей дуги опирается на данные, полученные в конце предыдущей, что соответствует стандартной схеме явного одношагового метода. Применение построенных нами промежуточных орбит в рамках этой схемы позволяет получить методы, порядок точности которых равен порядку касания используемой орбиты. Решение задачи (1) на примере первого шага представляется с помощью формул

$$\mathbf{y}_1^* = \mathbf{x}_1^* + \mathbf{e}_s h^s, \quad \dot{\mathbf{y}}_1^* = \dot{\mathbf{x}}_1^* + s\mathbf{e}_s h^{s-1}, \quad (9)$$

где $h = t_1 - t_0$, $\mathbf{e}_s = [\mathbf{G}_0^{(s-2)} - \mathbf{x}_0^{*(s)}]/s!$, $s = p + 1$, p — порядок касания промежуточной орбиты. Индекс в скобках обозначает порядок производной по времени t . Формулы (9) имеют порядок точности p . В нашем случае $p = 1, 2, 3$.

Используя оценку локальной погрешности методов (9) по правилу Рунге, строятся методы второго, третьего и четвертого порядков с переменной длиной шага.

На примерах вычисления возмущенных орбит ряда малых планет и комет показывается, что перечисленные методы обладают целым рядом преимуществ по сравнению с классическим методом Рунге-Кутты четвертого порядка и методом Рунге-Кутты-Фельберга четвертого (пятого) порядков.

Далее в главе конструируются новые экстраполяционные алгоритмы с переменной длиной шага и переменным порядком, использующие полученные пошаговые методы первого, второго и третьего порядков в качестве опорных методов.

В соответствии с определением экстраполяционного метода (Хайрер и др., 1990) выбирается последовательность шагов $h_i = H/n_i$; $i = 1, 2, \dots, m$; $m \geq 3$, где H — основной шаг интегрирования, $\{n_i\}$ — целые положительные числа, расположенные в порядке возрастания. Применяя метод (9), имеющий порядок p , с шагами $\{h_i\}$, получим в конце основного шага набор решений

$$\mathbf{U}_i^*(t_0 + H) = \{y_i^*(t_0 + H), \dot{y}_i^*(t_0 + H)\} \equiv \mathbf{T}_{i,1}; \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad 2 \leq k \leq m.$$

С помощью этих решений строится интерполяционный полином

$$\mathbf{P}(h) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 h^p + \mathbf{E}_2 h^{p+1} + \dots + \mathbf{E}_{k-1} h^{p+k-2},$$

для которого

$$\mathbf{P}(h_i) = \mathbf{T}_{i,1}; \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad 2 \leq k \leq m.$$

Значения полинома при $h = 0$

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}_0 = \mathbf{T}_{j,k}; \quad k \leq j \leq m \quad (10)$$

принимаются в качестве окончательного решения на момент $t = t_0 + H$.

Для получения решения (10) нами строится следующий рекуррентный алгоритм:

$$\mathbf{T}_{j,k} = \mathbf{T}_{j,k-1} + \frac{\mathbf{T}_{j,k-1} - \mathbf{T}_{j-1,k-1}}{(\alpha_{j-k+1,k-1}/\alpha_{j-k+2,k-1}) - 1}; \quad j = k, \dots, m; \quad k = 2, 3, \dots, m;$$

где

$$\alpha_{i,1} = 1/n_i^p; \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\alpha_{i,l+1} = b_{i,1,l}; \quad i = 1, 2, \dots, m-l; \quad l = 1, 2, \dots, m-2;$$

$$b_{i,j,1} = \beta_i \left[\left(\frac{1}{n_i} \right)^j - \left(\frac{1}{n_{i+1}} \right)^j \right]; \quad i = 1, 2, \dots, m-1; \quad j = 1, 2, \dots, m-2;$$

$$\beta_i = \frac{\alpha_{i,1}\alpha_{i+1,1}}{\alpha_{i,1} - \alpha_{i+1,1}}; \quad i = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$b_{i,j,l} = \frac{b_{i,j+1,l-1}\alpha_{i+1,l} - b_{i+1,j+1,l-1}\alpha_{i,l}}{\alpha_{i,l} - \alpha_{i+1,l}}; \quad i = 1, 2, \dots, m-l;$$

$$j = 1, 2, \dots, m-l-1; \quad l = 2, 3, \dots, m-2.$$

Погрешность полиномиальной экстраполяции на основном шаге имеет вид

$$\mathbf{U}(t_0 + \mathbf{Я}) - \mathbf{T}_{j,k} = (-1)^k \alpha_{j-k+1,k} \mathbf{E}_k(t_0 + H) H^{p+k-1} + \mathbf{O}(H^{p+k}), \quad (11)$$

где

$$\mathbf{U}(t_0 + \mathbf{Я}) = \{\mathbf{x}(t_0 + H), \dot{\mathbf{x}}(t_0 + H)\}. \quad (12)$$

Первый член правой части (11) имеет порядок $p+k$, поскольку $\mathbf{E}_k(t_0) = 0$. Отсюда следует, что точность аппроксимации решения (12) векторной величиной $\mathbf{T}_{j,k}$ соответствует методу порядка $p+k-1$.

Данная процедура экстраполяции применима для любого численного метода произвольного порядка p , лишь бы этот метод удовлетворял условиям теоремы Грэгга (Хайрер и др., 1990).

Для оптимизации работы экстраполяционных алгоритмов осуществляется комбинированное управление порядком и длиной шага по заданной допустимой относительной погрешности метода на шаге. Приводятся все необходимые формулы.

С помощью численных примеров показывается, что при высоких требованиях к точности решения новые экстраполяционные алгоритмы по эффективности сравнимы с методом Рунге-Кутты-Фельберга седьмого (восьмого) порядков. С понижением требований к точности преимущество экстраполяционных методов растет.

В четвертой главе речь идет об алгоритмах вычисления частных производных от текущих параметров движения по их начальным значениям и о применении этих производных в задаче улучшения орбит.

Дается описание новых аналитических методов вычисления частных производных с помощью дуг промежуточных орбит. Применяются орбиты с касанием первого, второго и третьего порядка при $n = 2$ (первый закон Мещерского вариации массы). Методы основаны на формулах, получаемых непосредственным дифференцированием выражений для решений уравнений промежуточного движения. Формулы для параметров промежуточного движения и частных производных от этих параметров применимы для любых типов возмущенных кеплеровских орбит. Они применимы также и в тех случаях, когда масса притягивающего центра отрицательна. Вычисление частных производных на больших интервалах времени производится с помощью пошаговой процедуры в сочетании с обобщенными методами Энке или численно-аналитическими методами, изложенными в предыдущих главах. Если заданный временной интервал $[t_0, t]$ произвольным образом разбит на N подынтервалов последовательными промежуточными моментами t_1, t_2, \dots, t_{N-1} , то приближенное решение для матрицы частных производных на конечный момент $t = t_N$ представляется в виде

$$\hat{\Phi}(t, t_0) = \hat{\Phi}(t, t_{N-1})\hat{\Phi}(t_{N-1}, t_{N-2}) \cdots \hat{\Phi}(t_2, t_1)\hat{\Phi}(t_1, t_0).$$

Разработанные нами алгоритмы точнее существующих аналогов, основанных на формулах для оскулирующей кеплеровской орбиты (Медведев, 1986) и оскулирующей промежуточной орбиты с одним дополнительным параметром (Батраков, Мирмахмудов, 1990).

Для глобальной погрешности метода получена приближенная формула

$$\Phi(t, t_0) - \hat{\Phi}(t, t_0) \cong C\Phi(t, t_0)(t - t_0)h^{p-1}, \quad (13)$$

справедливая при малых фиксированных значениях шага h . Здесь $\Phi(t, t_0)$ — точное решение для матрицы частных производных, \overline{C} — матрица, компоненты которой выражаются через коэффициенты погрешности на рассматриваемом временном интервале, p — порядок касания промежуточной орбиты. Таким образом, только в том случае, когда промежуточная орбита имеет касание выше первого порядка, точность вычисления матрицы $\Phi(t, t_0)$ всегда может быть улучшена путем увеличения числа разбиений интервала $[t_0, t]$ на подынтервалы до тех пор, пока ошибки

округления, неизбежные при машинных расчетах, не превзойдут ошибки метода.

Исследуется эффективность новых методов в сравнении с алгоритмом, использующим оскулирующую кеплеровскую орбиту. На практических примерах показывается, что численное поведение погрешности определения частных производных находится в хорошем согласии с формулой (13). Приводятся результаты решения задачи дифференциального исправления орбит астероидов (1566) Икар, (4179) Тоутатис и (145) Адеона по данным наблюдений. Делается вывод о том, что даже в самых сложных случаях возмущенного движения алгоритмы, использующие сверхоскулирующие орбиты, позволяют определить дифференциальные коэффициенты условий уравнений с необходимой точностью. При этом затраты машинного времени по сравнению с численным интегрированием дифференциальных уравнений движения и уравнений в вариациях сокращаются в несколько раз.

Методы определения промежуточных **возмущенных** орбит по граничным условиям рассматриваются в пятой главе.

Излагается метод определения промежуточной орбиты по двум заданным векторам положения и соответствующему интервалу времени. Здесь мы, как и в предыдущей главе, ограничиваемся случаем, когда гравитационный параметр фиктивного центра изменяется в соответствии с первым законом Мещерского вариации массы. Строится промежуточная орбита, для которой векторы положения и ускорения в опорные моменты времени t_1 и t_2 совпадают с заданными векторами положения \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 и вычисленными на их основе суммарными векторами ускорения \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 соответственно. Кроме того требуется, чтобы положения фиктивного центра на векторах \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 (или на их продолжениях) в опорные моменты времени были на минимальном удалении друг от друга. Простые преобразования сводят задачу определения возмущенной орбиты к вычислению кеплеровской траектории в параметрическом координатном пространстве. Приводится доказательство того, что предельные значения параметров построенной орбиты при стремящемся к нулю опорном временном интервале задают **сверхоскулирующую** орбиту с касанием треть-

его порядка к реальной траектории. Отсюда следует, что скорость сходимости к точному решению при сокращении опорного интервала времени в новом методе на два порядка выше, чем в традиционных методах, использующих невозмущенную кеплеровскую орбиту. Выполнено сравнение точности аппроксимации реальной траектории Икара с помощью орбит, построенных нашим алгоритмом и методом Гаусса. Для малых опорных дуг траектории полученные оценки точности в нашем алгоритме на несколько порядков лучше, чем в методе Гаусса.

Описывается новый метод определения предварительной орбиты по трем положениям малого тела на небесной сфере и соответствующим им моментам времени с учетом основной части возмущений. При разработке метода мы придерживались схемы, заложенной в основу классического метода Лагранжа-Гаусса, там, где это позволял выбранный нами подход. Основное и принципиальное отступление от классической схемы заключается в том, что вместо невозмущенной кеплеровской орбиты строится промежуточная возмущенная орбита. Для построения последней используется описанный выше алгоритм определения орбиты по двум векторам положения. Обсуждаются результаты численных экспериментов по сравнению нового метода и метода Лагранжа-Гаусса. На примерах аппроксимации движения Икара по трем предварительно вычисленным точным угловым положениям показывается, что погрешности методов, основанных на формулах невозмущенной задачи двух тел, становятся фиксированными и не уменьшаются с сокращением опорной дуги траектории. Методические ошибки предложенного автором способа определения орбиты в этих случаях уменьшаются прямо пропорционально квадрату опорного интервала времени. Точность построенных новым способом орбит существенно выше, чем точность орбит классического метода. Рассмотрены также примеры определения орбит по реальным наблюдениям Икара и его фиктивным угловым положениям, отягощенным погрешностями. В частности показано, что, если бы точность наблюдений Икара при его открытии в 1949 г. оценивалась величинами $0''.1$, $0''.01$ и $0''.001$, то эфемериды астероида, вычисленная на 1950 г. по параметрам нашей промежуточной орбиты, была бы точнее эфемериды, полученной по результатам приме-

нения метода Лагранжа–Гаусса, соответственно в 2, 10 и 100 раз. Использование в классическом методе наблюдений, точности которых выше 1'', становится формальным, поскольку методическая ошибка в этих случаях превышает по величине указанные точности.

И, наконец, шестая глава касается проблемы, которой отводится не-маловажное место в современной небесной механике. Это проблема устранения особенностей дифференциальных уравнений движения.

Обобщается подход В.Себехея (1976) к линеаризации и регуляризации уравнений движения задачи двух тел с помощью интегралов путем ввода дополнительно к временному преобразованию преобразования координат. В процедуру линеаризации и регуляризации включаются все независимые интегралы движения задачи двух тел. В качестве примеров преобразований рассматриваются временное преобразование Сундмана и координатное KS-преобразование (Штифель, Шейфеле, 1975), а также их обобщения, приводящие к уравнениям орбитального движения в трехмерном и четырехмерном параметрических пространствах. Предложенная процедура преобразования дифференциальных уравнений применяется как к уравнениям невозмущенного, так и возмущенного кеплеровского движения. Приведенные системы дифференциальных уравнений не имеют особенностей при соударении с центральным телом.

Рассматривается движение малого тела в рамках возмущенной ограниченной задачи трех тел. Дифференциальные уравнения движения относительно центра масс основных тел с массами M и m_i записываются в виде

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\frac{k^2 M}{r^3} \mathbf{x} - \frac{k^2 m_i}{r_i^3} \mathbf{x}_i + \mathbf{F}, \quad (14)$$

где \mathbf{y} — вектор положения малого тела относительно начала координат, \mathbf{x} и \mathbf{x}_i — векторы положения малого тела относительно основных тел, $r = |\mathbf{x}|$, $r_i = |\mathbf{x}_i|$, \mathbf{F} — вектор возмущающего ускорения. Вводится фиктивный центр с гравитационным параметром μ , расположенный на конце вектора Z . Уравнения движения малого тела относительно фиктивного центра представляются в форме

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\mu}{R^3} \mathbf{q} + \Phi, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{q} = \mathbf{y} - \mathbf{Z}, \quad R = |\mathbf{q}|, \quad \Phi = \frac{\mu}{R^3} \mathbf{q} - \frac{k^2 M}{r^3} \mathbf{x} - \frac{k^2 m_l}{r_l^3} \mathbf{x}_l + \mathbf{F} - \ddot{\mathbf{Z}},$$

$$\mu = \left(\frac{k^2 M}{r} + \frac{k^2 m_l}{r_l} \right) R, \quad \mathbf{Z} = u \mathbf{x}_l^*, \quad u = \nu \nu_l \frac{a - b}{\nu_l a + \nu b},$$

$$\nu = \frac{M}{M + m_l}, \quad \nu_l = \frac{m_l}{M + m_l}, \quad a = 2.92 m_l^{1/3} r^4, \quad b = M^{1/3} r_l^4,$$

\mathbf{x}_l^* — известный вектор положения тела с массой m_l по отношению к телу с массой M . Параметр μ и вектор \mathbf{Z} выбраны таким образом, чтобы при соударении малого тела с любым из основных тел фиктивный центр совмещался с центром инерции тела, с которым происходит соударение, а масса центра становилась равной массе этого тела. При подборе величин a и b использовано определение гравитационной сферы влияния. Уравнения движения (15) дополняются дифференциальным уравнением

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\nu \nu_l (\ddot{a}b - a\ddot{b})}{(\nu_l a + \nu b)^2} - 2 \frac{\nu_l \dot{a} + \nu \dot{b}}{\nu_l a + \nu b} \dot{\mathbf{u}}, \quad (16)$$

с помощью которого находятся параметры движения фиктивного центра.

В результате применения регуляризирующего KS-преобразования и преобразования Сундмана $dt = R d\tau$ к уравнениям (15) и (16) получается система дифференциальных уравнений движения, которые являются квазилинейными в ближайшей окрестности любого из основных притягивающих тел. Эти уравнения характеризуются существенно лучшим численным поведением при сближениях малого тела с основными телами, чем исходные уравнения движения (14). Вводятся дополнительные масштабирующие функции, с помощью которых осуществляется аналитическое выравнивание длины шага интегрирования при смене системы координат и при изменении массы притягивающего центра.

На примерах моделирования движения тел Солнечной системы показывается, что применение полученных уравнений в численных исследованиях дает целый ряд преимуществ по сравнению с классическими ньютоновскими уравнениями. Эти преимущества особенно велики в задачах

вычисления орбит с большими эксцентриситетами и при изучении движения малого тела в окрестности соударения с массивными телами и выражаются в повышении точности и быстродействия расчетов на ЭВМ.

В заключении перечисляются основные результаты, представленные в диссертационной работе.

В приложениях помещены таблица, два рисунка и формулы, дополняющие материалы отдельных глав.

РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Концепция фиктивного притягивающего центра с переменной массой и разработанная на ее основе теория промежуточного движения.
2. Новые промежуточные орбиты с касанием первого, второго и третьего порядка.
3. Обобщенные методы Энке специальных возмущений.
4. Численно-аналитические методы интегрирования дифференциальных уравнений движения, основанные на пошаговой аналитической аппроксимации возмущенной траектории дугами промежуточных орбит и экстраполяции по Ричардсону.
5. Универсальный рекуррентный алгоритм вычисления элементов экстраполяционной таблицы.
6. Аналитические алгоритмы вычисления матрицы изохронных производных с помощью дуг оскулирующих и **сверхоскулирующих** промежуточных орбит.
7. Методы определения промежуточных возмущенных орбит по двум векторам положения и трем измерениям угловых координат.
8. Обобщенный подход к линеаризации и регуляризации дифференциальных уравнений движения с помощью интегралов.
9. Вывод уравнений движения возмущенной ограниченной задачи трех тел в **регуляризирующих KS-переменных** с использованием фиктивного притягивающего центра с переменной массой как центра регуляризации.
10. Результаты исследования эффективности разработанных алгоритмов и программ.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Шефер В.А.* Линеаризация и регуляризация уравнений кеплеровского движения с помощью интегралов // Астрон. журн. 1991. Т. 68. С. 197-205.
2. *Шефер В.А.* Комплекс программ для исследования движения астероидов и комет, сближающихся с большими планетами // Труды всесоюзного совещания (с международным участием) "Астероидная опасность". 10-11 окт. 1991 г. С.-Петербург, 1992. С. 126-128.
3. *Shefer V.A.* Equations of perturbed Keplerian motion in a quasi-linear form // Astron. and Astrophys. Trans. 1993. V. 4. P. 39-40.
4. *Шефер В.А.* Линеаризация и регуляризация уравнений кеплеровского движения в четырехмерном параметрическом пространстве // Астрон. журн. 1993. Т. 70. С. 1113-1119.
5. *Shefer V.A.* Numerical algorithms and programs for investigation of motion of asteroids and comets closely approaching major planets // Astron. and Astrophys. Trans. 1995. V. 8. P. 319-321.
6. *Шефер В.А.* **Сверхоскулирующие** промежуточные орбиты для аппроксимации возмущенного движения. Касание второго порядка // Астрон. журн. 1998а. Т. 75. С. 945-953.
7. *Шефер В.А.* Сверхоскулирующие промежуточные орбиты для аппроксимации возмущенного движения. Касание третьего порядка // Астрон. журн. 1998б. Т. 75. С. 954-960.
8. *Шефер В.А.* Обобщенные алгоритмы Энке для вычисления возмущенных орбит // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (доклады всероссийской научной конференции). Томск. 2-4 июня, 1998 г. Изд-во Томского университета. 1998. С. 175-176.
9. *Шефер В.А.* Обобщенные методы Энке для исследования возмущенного движения // Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ. 1998. Вып. 16. С. 149-171.
10. *Shefer V.A.* Superosculating intermediate orbits and their application in the problem of investigation of the motion of asteroids and comets // The Dynamics of Small Bodies in the Solar System: A Major Key to Solar System Studies (NATO ASI Series) / Eds. A.E.Roy and B.Steves. Dordrecht: Kluwer

Acad. Publ. 1999. P. 71-76.

11. *Шефер В.А.* Промежуточные орбиты с двумя параметрами для аппроксимации возмущенного движения // *Астрон. вестн.* 2000. Т. 34. С. 94-103.

12. *Шефер В.А.* Фиктивный притягивающий центр как центр регуляризации в возмущенной ограниченной задаче трех тел // *Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (доклады II всероссийской научной конференции)*. Томск. 6-8 июня, 2000 г. Изд-во Томского университета. 2000. С. 133-134.

13. *Schäfer W.A.* High-accuracy simulation of the motion of asteroids and comets. Numerical aspects // *Planetary and Space Science*. 2001. V. 49. N. 8. P. 799-802.

14. *Shefer V.A.* Osculating and superosculating intermediate orbits and their applications // *Celest. Mech. and Dyn. Astr.* 2002. V. 82. P. 19-59.

15. *Shefer V.A.* Osculating and superosculating intermediate orbits: theory and applications // *Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy* / Ed. T.B.Omarov. N.Y.: Nova Science Publ., Inc., 2002. P. 173-219.

16. *Shefer V.A.* Superosculating intermediate orbits and their applications to study the perturbed motion // *Труды ИПА РАН*. 2002. Вып. 8. Небесная механика. С. 155-156.

17. *Shefer V.A.* Determination of preliminary orbits including perturbations // *Труды ИПА РАН*. 2002. Вып. 8. Небесная механика. С. 157-158.

18. *Шефер В.А.* Новые численно-аналитические методы решения уравнений орбитального движения // *Астрон. вестн.* 2002. Т. 36. С. 565-576.

19. *Schäfer W.A.* Determination of perturbed orbits from two positions and three observations // *Proc. of the Conf. "Asteroids, Comets, Meteors (ACM 2002)"*, 29 July - 2 August 2002, Berlin, Germany (ESA SP-500) / Ed. B.Warmbein. Noordwijk: ESA Publ. Div. 2002. P. 339-343.

20. *Schäfer W.A.* Semy-analytical methods for computing the orbits of asteroids and comets // *Proc. of the Conf. "Asteroids, Comets, Meteors (ACM 2002)"*, 29 July - 2 August 2002, Berlin, Germany (ESA SP-500) / Ed. B.Warmbein. Noordwijk: ESA Publ. Div. 2002. P. 345-349.

21. *Шефер В.А.* Определение дифференциальных коэффициентов услов-

ных уравнений методом дуг сверхоскулирующих орбит // *Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики (доклады III всероссийской научной конференции)*. Томск. 2-4 октября, 2002 г. Изд-во Томского университета. 2002. С. 267–268.

22. *Шефер В.А.* Определение промежуточной возмущенной орбиты по двум векторам положения // *Астрон. вестн.* 2003. Т. 37. С. 265-272.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Батраков Ю.В. Промежуточные орбиты для начального участка движения // *Определение координат небесных тел*. Рига: Изд-во Латв. ГУ, 1981а. С. 3-10.

Батраков Ю.В. Промежуточные орбиты, аппроксимирующие начальный участок возмущенного движения // *Бюлл. ИТА АН СССР*. 1981б. Т. 15. С. 1-5.

Батраков Ю.В., Мирмахмудов Э.Р. Промежуточные орбиты с одним параметром в задаче определения движения малого тела по наблюдениям // *Аналитическая небесная механика*. Казань: Изд-во **Казан.** ун-та, 1990. С. 36-43.

Медведев Ю.Д. Об улучшении орбит комет, сближающихся с большими планетами, с учетом негравитационных эффектов // **Л.:** 1986. 9 с. / *Деп. в ВИНТИ* 20.03.1986. N 2298-B86.

Рой А.Е. Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544 с.

Себехей (Szebehely V.). Linearization of dynamical systems using integrals of the motion // *Celest. Mech.* 1976. V. 14. P. 499-508.

Скрипниченко В.И. О методе Шайка для расчета траекторий, допускающих тесное сближение с возмущающим телом // *Материалы симпозиума "Динамика малых тел Солнечной системы"*, Баку, 12-14 июня 1968. Баку: "ЭЛМ", 1970. С. 9-10.

Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

Шаих (Shaikh N.A.). A new perturbation method for computing Earth-Moon trajectories // *Astronaut. Acta*. 1966. V. 12. P. 207-211.

Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.