На правах рукописи

Филиппов Альтаир Евгеньевич

ОДНОРОДНЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ ШТЕККЕЛЕВЫ ПРОСТРАНСТВА В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

01.04.02 Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск - 2003

Работа выполнена в Томском государственном педагогическом университете.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук
Осетрин Константин Евгеньевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор Эпп Владимир Яковлевич

доктор физико-математических наук
профессор Бордовицын Владимир Александрович

Ведущая организация:

Томский политехнический университет

Защита состоится 9 октября 2003 г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета К 212.266.01 при Томском государственном педагогическом университете по адресу: 634041, г. Томск, Комсомольский проспект, 75.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного педагогического университета по адресу: 634041, г. Томск, Комсомольский проспект, 75.

Автореферат разослан 9 сентября 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Е.А. Румбешта

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации

Задачей диссертации является классификация пространств (4-мерное пространство - время), допускающих, с одной стороны, интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби методом полного разделения переменных, а с другой стороны, допускающих 3-параметрическую группу движений с пространственно - подобными орбитами.

Пространства, в которых уравнение Гамильтона-Якоби допускает полное разделение переменных, называются штеккелевыми. Их изучение и классификация были начаты П. Штеккелем и завершены в трудах томских ученых (В.Н. Шаповалов, В.Г. Багров, В.В. Обухов и др.). Разделение переменных достигается в специальной системе координат, называемой привилегированной. Штеккелево пространство характеризуется наличием абелевой группы движений, а также наличием (или отсутствием) изотропных переменных, соответственно этому введено обозначение для типов штеккелевых пространств: $(N.N_0)$, где N — размерность абелевой группы, N_0 - число изотропных переменных. Интерес к изотропным штеккелевым пространствам связан с задачами о распространении гравитационных волн.

Наличие в пространстве 3-параметрической группы движений с пространственно - подобными орбитами является общековариантным признаком пространственной однородности. Роль однородных пространств в современной космологии трудно переоценить. На базе однородных пространств строят модели Большого взрыва, начальных сингулярностей, а также инфляционные модели. Однородные пространства используют в большинстве современных моделей гравитации для исследования общих закономерностей развития Вселенной.

Таким образом, актуальность поставленной задачи обусловлена, с одной стороны, развитием новых подходов к точному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных в задачах гравитации, а с другой стороны, тем что однородные пространства играют большую роль в современной космологии.

Цель работы

Целью работы является классификация изотропных штеккелевых пространств по признаку допускаемой ими 3-параметрической группы движений с пространственно - подобными орбитами, то есть классификация пространственно - однородных моделей, допускающих интегрирование уравнений движения методом полного разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби.

Научная новизна работы

обусловлена получением в диссертации следующих оригинальных результатов:

1. Найдены все классы однородных штеккелевых пространств типа (3.1), проведена классификация найденных решений по Петрову и по Бианки;
2. Найдены все классы однородных штеккелевых пространств типа (2.1), проведена классификация найденных решений по Петрову и по Бианки.

Научная и практическая значимость работы

Нахождение пересечений классов штеккелевых и однородных пространств представляет с математической точки зрения самостоятельный интерес как развитие методов математической физики в искривленном пространстве - времени.

С другой стороны, метод полного разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби являются мощным инструментом для интегрирования полевых уравнений в современных физических теориях и получения точно решаемых моделей.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Найдены все классы однородных штеккелевых пространств типа (3.1), проведена классификация найденных решений по Петрову и по Бианки;
2. Найдены все классы однородных штеккелевых пространств типа (2.1), проведена классификация найденных решений по Петрову и по Бианки.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на региональной конференции "Сибирская школа молодого ученого" (Томск, 1999), на XI международной школе-семинаре по проблемам теоретической и математической физики (Казань, 1999), на международном конгрессе "Наука, образование, культура на рубеже тысячелетий" (Томск, 2000), на V международной конференции по гравитации и астрофизике стран азиатско-тихоокеанского региона (Москва, 2001), на III международной конференции "Квантовая теория поля и гравитация" (Томск, 2002), на общегородском семинаре по теоретической физике в г. Томске.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 6 работ.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, трех приложений и списка литературы. Список литературы содержит 143 источника. Общий объем составляет 130 страниц.

Содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели работы, указаны научная новизна, научная и практическая значимость результатов работы, сделан краткий обзор по проблематике диссертации, перечислены результаты, выносимые на защиту, приведены структура и содержание диссертации.

Первая глава носит обзорный характер и и призвана обеспечить основу для дальнейшего изложения. Рассматриваются общие вопросы разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби

$$g^{ij}S_{,i}S_{,j}=m^2$$

в искривленном пространстве-времени. Приведен конструктивный алгоритм построения метрического тензора штеккелевых пространств в привилегированных системах координат (привелегированными называются системы координат, в которых достигается полное разделение переменных, таким образом, разделение переменных нековариантно). Показана связь условий полного разделения переменных с интегралами движения. Связь интегралов движения с векторными полями Киллинга, и, следовательно, с симметриями пространства, открывает возможность теоретико-группового подхода к определению штеккелева пространства на основе так называемого полного набора интегралов движения. Такое определение является общековариантным. Базовые результаты приведены для пространств произвольной размерности и сигнатуры, в параграфе 1.4 приведен явный вид метрик 4-мерных штеккелевых пространств с пространственно - временной сигнатурой.

Кроме того, в первой главе рассмотрены общековариантное определение однородного пространства и классификация однородных пространств по Бианки, а также общие свойства однородных и штеккелевых пространств.

В параграфе 1.6 приведена схема алгебраической классификации пространств по Петрову.

Во второй главе решается задача о нахождении и классификации метрик изотропных штеккелевых пространств типа (3.1) обладающих свойством пространственной однородности.

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b_2(x^0) & b_3(x^0) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2(x^0) & 0 & a_{22}(x^0) & a_{23}(x^0) \\ b_3(x^0) & 0 & a_{23}(x^0) & a_{33}(x^0) \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Пространство типа (3.1) допускает 3-параметрическую абелеву группу движений,

$$X_1, X_2, X_3; \qquad X_p = \partial_p, \qquad [X_p, X_q] = 0, \qquad p,q,r = 1,2,3, \qquad (2)$$

орбиты которой являются изотропными гиперповерхностями,

$$\det |g_{ij}\, X_p{}^i\, X_q{}^j| = 0,$$

поэтому для выполнения условия пространственной однородности группа движений расширена с помощью дополнительного генератора, не входящего в полный набор,

$$X_4 = \xi^i \partial_i, \qquad (3)$$

который должен отвечать требованию: два генератора из полного набора X_2, X_3 вместе с дополнительным X_4 образуют группу с пространственно - подобными орбитами

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_4] = \alpha_1 X_4 + \beta_1{}^m X_m + \beta_1{}^1 X_1 \\
&[X_1, X_m] = 0 \\
&[X_m, X_4] = \alpha_m X_4 + \beta_m{}^n X_n \\
&[X_2, X_3] = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(α_p, $\beta_p{}^q$ — структурные константы группы),

$$
g_{ij}\, X_a{}^i X_b{}^j\, dx^a dx^b > 0, \qquad a, b = 2, 3, 4. \tag{5}
$$

Алгебраическая классификация осуществляется на основании тождеств Якоби

$$
\begin{aligned}
&\beta_1{}^1 \alpha_m = 0 \\
&\alpha_2 \beta_3{}^n = \alpha_3 \beta_2{}^n \\
&\alpha_m \beta_1{}^n = \alpha_1 \beta_m{}^n
\end{aligned}
\tag{6}
$$

и линейных преобразований

$$
X_m = S_m{}^n \tilde{X}_n.
$$

Уравнения Киллинга

1. $\xi^0{}_{,1} + b_2 \xi^0{}_{,2} + b_3 \xi^0{}_{,3} = 0$
2. $\xi^0{}_{,0} + \xi^1{}_{,1} + b_2 \xi^1{}_{,2} + b_3 \xi_{,3} = 0$
3. $b_2 \xi^0{}_{,0} + \xi^2{}_{,1} + a_{22} \xi^0{}_{,2} + a_{23} \xi^0{}_{,3} + b_2 \xi^2{}_{,2} + b_3 \xi^2{}_{,3} - \xi^0 b_2{}' = 0$
4. $b_3 \xi^0{}_{,0} + \xi^3{}_{,1} + a_{23} \xi^0{}_{,2} + a_{33} \xi^0{}_{,3} + b_2 \xi^3{}_{,2} + b_3 \xi^3{}_{,3} - \xi^0 b_3{}' = 0$
5. $\xi^1{}_{,0} = 0$
6. $\xi^2{}_{,0} + a_{22} \xi^1{}_{,2} + a_{23} \xi^1{}_{,3} = 0$
7. $\xi^3{}_{,0} + a_{23} \xi^1{}_{,2} + a_{33} \xi^1{}_{,3} = 0$
8. $b_2 \xi^2{}_{,0} + a_{22} \xi^2{}_{,2} + a_{23} \xi^2{}_{,3} - \xi^0 a_{22}{}' = 0$
9. $b_3 \xi^2{}_{,0} + b_2 \xi^3{}_{,0} + a_{23} (\xi^2{}_{,2} + \xi^3{}_{,3}) + a_{22} \xi^3{}_{,2} + a_{33} \xi^2{}_{,3} - \xi^0 a_{23}{}' = 0$
10. $b_3 \xi^3{}_{,0} + a_{23} \xi^3{}_{,2} + a_{33} \xi^3{}_{,3} - \xi^0 a_{33}{}' = 0$

позволяют найти явный вид метрики пространства и дополнительного оператора. В результате ограничений, накладываемых на дополнительный вектор Киллинга коммутационными соотношениями (4), уравнения Киллинга представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Найдено 12 типов пространств. В таблице приведена классификация найденных решений по Бианки

Тип	Тип по Бианки								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
a1.1	+				+	+			
a1.2		+				+			
a1.3				+					
a2.1		+		+					
a2.2				+					
a3							+		
b1.1					+	+			
b1.2			+						
b1.3	+								
b2.1				+					
b2.2		+							
b3							+		

Пустые клетки означают отсутствие пересечений. Как видно из таблицы, в полученной классификации отсутствуют метрики VIII и IX типов по Бианки.

Согласно алгебраической классификации Петрова все найденные пространства относятся к типам *N* и *D,* типы I, II и III отсутствуют. Тип пространства по Петрову и скалярная кривизна пространства *R* связаны с видом функций b_2, b_3:

1. $b_2 = b_3 = 0$, тип *N,* $R = 0$;
2. иначе: тип *D,* $R \neq 0$.

В третьей главе решается задача о нахождении и классификации метрик изотропных штеккелевых пространств типа (2.1)

$$g^{ij} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(x^1) & 1 \\ 0 & f(x^1) & c_0(x^0) + c_1(x^1) & b(x^0) \\ 0 & 1 & b(x^0) & a(x^0) \end{pmatrix} \tag{7}$$

где $\Delta = d_0(x^0) + d_1(x^1) > 0$.

$$g = -\frac{D}{\Delta^4}, \qquad D = a\,f^2 - 2\,b\,f + c > 0, \tag{8}$$

обладающих свойством пространственной однородности. Полный набор пространства типа (2.1) содержит два вектора Киллинга,

$$X_1 = \partial_3, \quad X_2 = \partial_2 \quad [X_1, X_2] = 0, \tag{9}$$

для выполнения условия пространственной однородности необходимо ввести два дополнительных

$$X_3 = \xi^i \partial_i, \qquad X_4 = \eta^i \partial_i, \tag{10}$$

оторые должны отвечать требованию: один оператор из полного набора X_2 вместе с двумя дополнительными X_3, X_4 образуют группу с пространственно - подобными орбитами

$$\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0 \\
&[X_1, X_a] = \alpha_a X_1 + \beta_a{}^b X_b + \beta_a{}^2 X_2, \qquad a, b = 3, 4 \\
&[X_2, X_a] = \gamma_a{}^2 X_2 + \gamma_a{}^b X_b \\
&[X_3, X_4] = \gamma_5 X_3 + \gamma_6 X_4 + \gamma_7 X_2
\end{aligned} \tag{11}$$

(α, β, γ — структурные константы группы),

$$g_{ij} X_p{}^i X_q{}^j dx^p dx^q > 0, \qquad p, q = 2, 3, 4. \tag{12}$$

Методика решения аналогична той, что применялась для пространства типа (3.1), однако уравнения Киллинга

1. $2\Delta \xi^0{}_{,0} + \Delta_{,0} \xi^0 + \Delta_{,1} \xi^1 = 0$
2. $\xi^1{}_{,0} + f \xi^0{}_{,2} + \xi^0{}_{,3} = 0$
3. $\xi^2{}_{,0} + f \xi^0{}_{,1} + c \xi^0{}_{,2} + b \xi^0{}_{,3} = 0$
4. $\xi^3{}_{,0} + \xi^0{}_{,1} + b \xi^0{}_{,2} + a \xi^0{}_{,3} = 0$
5. $f \xi^1{}_{,2} + \xi^1{}_{,3} = 0$
6. $c \xi^1{}_{,2} + f(-2\xi^0{}_{,0} + \xi^1{}_{,1} + \xi^2{}_{,2}) + b \xi^1{}_{,3} + \xi^2{}_{,3} - f' \xi^1 = 0$
7. $-2\xi^0{}_{,0} + \xi^1{}_{,1} + b \xi^1{}_{,2} + f \xi^3{}_{,2} + a \xi^1{}_{,3} + \xi^3{}_{,3} = 0$
8. $2(f \xi^2{}_{,1} + c(-\xi^0{}_{,0} + \xi^2{}_{,2}) + b \xi^2{}_{,3}) - c_0{}' \xi^0 - c_1{}' \xi^1 = 0$
9. $\xi^2{}_{,1} + f \xi^3{}_{,1} + c \xi^3{}_{,2} + a \xi^2{}_{,3} + b(-2\xi^0{}_{,0} + \xi^2{}_{,2} + \xi^3{}_{,3}) - b' \xi^0 = 0$
10. $2(\xi^3{}_{,1} + b \xi^3{}_{,2} + a(-\xi^0{}_{,0} + \xi^3{}_{,3})) - a' \xi^0 = 0$

представляют собой функциональные уравнения и имеют собственную классификацию решений, что несколько затрудняет алгебраическую классификацию на основе линейных преобразований и тождеств Якоби.

Найдено 29 типов пространств, удовлетворяющих поставленным требованиям.

Согласно классификации однородных пространств Бианки найденные решения относятся к типам I — VII, типы VIII и IX отсутствуют.

Согласно алгебраической классификации Петрова, все найденные решения относятся к типу *D,* типы I, II, III и *N* отсутствуют.

Скалярная кривизна R найденных пространств постоянна и неположительна, ее значение связано с функциональным видом конформного фактора Δ:

1. $\Delta = \Delta(x^0), \quad R = 0;$

2. $\Delta = \Delta(x^1), \quad R = \text{const} < 0.$

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в ра ботах:

[1] В.В. Обухов, К.Е. Осетрин, А.Е, Филиппов. Метрики однородных пространств, допускающие полные наборы типа (3.1)// Известия ВУЗов, 2002, N1, С. 42-50.

[2] Филиппов А.Е. Пространственно-однородные модели, допускающие интегрирование уравнений Гамильтона-Якоби // Международный конгресс "Наука, образование, культура на рубеже тысячелетий": Труды "Второй Сибирской школы молодого ученого". Том II. Математика. Физика. Информационные технологии. - Томск: Издательство Томского государственного педагогического университета, 2000. - С. 6-9

[3] Обухов В.В., Осетрин К.Е., Филиппов А.Е. Однородные пространства, допускающие интегрирование уравнений Гамильтона-Якоби // Gravitation & Cosmsology. - Vol 5. No 4(20), Supplement, 1999. - С. 20-27.

[4] Багров В.Г., Обухов В.В., Осетрин К.Е., Филиппов А.Е. Штеккелевы пространства с дополнительными симметриями // Gravitation & Cosmology. - Vol 5. No 4(20), Supplement, 1999 . - С. 10-16.

[5] Осетрин К.Е., Филиппов А.Е. Однородные штеккелевы пространства типа (2.1) // Новейшие проблемы теории поля. Труды Международной летней школы-семинара по современным проблемам теоретической и математической физики. Под ред. А.В. Аминовой. - Казань, 2000. - С. 244-250.

[6] Филиппов А.Е. Однородные штеккелевы пространства в теории гравитации // Труды региональной научно- практической конференции

студентов, аспирантов и молодых ученых "Сибирская школа молодого ученого". Том IV. Физика, математика, информационные технологии. - Томск: Издательство Томского государственного педагогического университета, 1999. - С. 3.