На правах рукописи

Быченков Юрий Владимирович

ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С СЕДЛОВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

01.01.07 - Вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва - 2003

Работа выполнена на кафедре Вычислительной математики
механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент Е.В.Чижонков

Официальные оппоненты:
доктор физ.-мат. наук, профессор Е.Е.Тыртышников,
кандидат физ.-мат. наук, с.н.с Т.К.Козубская.

Ведущая организация:
Научно-исследовательский институт математики и механики
имени Н.Г.Чеботарева
Казанского государственного университета

Защита состоится " 8 " октября 2003 г в 10^{00}
на заседании диссертационного совета Д 002.045.01
в Институте вычислительной математики РАН
по адресу 119991, Москва, ГСП-1, ул. Губкина, дом 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан " 4 " сентября 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических-наук Г. А. Бочаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Основные уравнения классической гидродинамики или уравнения Навье-Стокса, описывающие математическую модель вязкой жидкости, в настоящее время являются одним из основных объектов теоретического и численного исследования. Одно из преобладающих направлений исследования в этой области связано с моделью несжимаемой вязкой жидкости. В связи с невероятной сложностью точного аналитического исследования этой модели трудно переоценить значение её численного анализа.

При численном анализе уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости важную роль играют, так называемые, системы уравнений с седловыми операторами. Такие системы возникают как в результате дискретизации исходных, по сути непрерывных, уравнений, так и при построении алгоритмов решения задач, полученных в результате аппроксимации. Кроме этого, задачи с седловыми операторами получили применение и в других областях математики, например, при исследовании проблем механики упругого тела, в математическом программировании и др. В связи с этим, построение и исследование эффективных алгоритмов решения таких систем является одной из важных задач современной вычислительной математики.

Огромное количество работ, посвященных алгоритмам решения задач с седловыми операторами, предлагает многообразные подходы к этой проблеме. Стоит отметить, что в связи со спецификой решаемых проблем, приоритетное развитие получили алгоритмы итерационного типа. Большинство из разработанных алгоритмов имеют строгое математическое обоснование сходимости и эффективно применяются на практике. Несмотря на это, проблемы, связанные с предельными и оптимальными характеристиками сходимости, в большинстве случаев оставлены в тени или недостаточно разработаны. Это, несомненно, обусловлено большой теоретической и технической сложностью подобных исследований.

Наибольший прогресс наметился в области исследования алгоритмов решения линейных седловых задач. Даже в этом случае, зачастую, бессилен существующий мощный аппарат исследования линейных итерационных процессов. Тем не менее, для некоторых, ставших уже классическими, алгоритмов (например, алгоритм Эрроу-Гурвица) получены результаты позволяющие судить о качестве их сходимости в терминах известной априорной информации об алгоритме. Однако, вопрос об оптимальных возможностях таких алгоритмов в большинстве своем остается открытым.

Целью диссертационной работы является наиболее полное, по возможности, исследование предельных и оптимальных свойств сходимости различных итерационных алгоритмов для решения задач с седловой точкой.

Научная новизна. В работе впервые подробно исследованы трех- и четырехпараметрические алгоритмы для решения, в общем случае нелинейных и нерегулярных, задач с седловой точкой. Эти алгоритмы являются обобщением известных алгоритмов Эрроу-Гурвица, Кобелькова, модифицированного метода верхней релаксации (MSOR) в случае незнакоопределенной симметричной матрицы.

Для линейных симметричных задач, как в регулярном, так и в нерегулярном случае, получены окончательные результаты о возможностях сходимости рассматриваемых алгоритмов в терминах асимптотической скорости сходимости и в разных постановках задач оптимизации, получены явные аналитические формулы для оптимальных значений итерационных параметров и скорости сходимости. Для этого разработан новый аппарат исследования специальных минимаксных задач, которые получаются из задачи асимптотической оптимизации метода. Указанный подход может быть использован для исследования алгоритмов, близких к рассматриваемым в данной работе.

В диссертации исследованы свойства сходимости алгоритмов для специальных классов нелинейных задач с седловой точкой: задач типа Навье-Стокса и задач с сильно монотонной нелинейностью. Для этих классов получены оценки скорости сходимости в терминах указанных норм и исследованы их предельные свойства.

На основе результатов численных экспериментов, представленных в работе, проведен сравнительный анализ предложенных алгоритмов и других алгоритмов этого же класса.

Практическая значимость. Полученные результаты могут быть использованы для явной оптимизации рассмотренных алгоритмов (в виде явных аналитических формул), а также других близких алгоритмов (в виде методики), в вычислительных пакетах программ.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Всероссийских молодежных школах-конференциях, г. Казань в 1999 и 2001 году, на Конференциях молодых ученых механико-математического факультета МГУ в 2000-2002 гг., на Ломоносовских чтениях 2002, на международной конференции "Workshop on Nonlinear Approximations in Numerical Analysis", г. Москва в 2003 году, а также на семинаре ИВМ РАН под руководством академика РАН Н.С.Бахвалова и профессора В.И.Лебедева.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения, заключения и списка литературы из 57 наименований. Общий объем работы - 125 страниц, включая 8 рисунков и 2 таблицы.

Краткое содержание работы

Во введении приводится общее определение задач с седловой точкой и описываются области ее применения, в общем виде формулируются алгоритмы исследуемые в диссертации, содержится обзор известных результатов касающихся вопроса исследования и оптимизации алгоритмов, наиболее близких к данным, а также цель и основной результат диссертации. В конце дается краткий обзор содержания работы.

В первой главе, центральной для данной работы, исследуется алгоритм для решения невырожденной линейной симметричной задачи с седловой точкой:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $u, f \in U$, $p, g \in P$, U и P - конечномерные эрмитовы пространства над С размерностей N_U и Np соответственно, A — $A^* \geqslant 0$ - линейный оператор в U, $B : P \to U$ - линейный оператор максимального ранга. Задача (1) называется регулярной, если $\ker A = \{0\}$ и нерегулярной в противном случае.

Исследуемый итерационный алгоритм имеет следующий вид

$$\begin{cases} Q\dfrac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + (A + \beta BC^{-1}B^*)\, u^k + Bp^k = f + \beta BC^{-1}g \\ -\alpha C\dfrac{p^{k+1} - p^k}{\tau} + B^*u^{k+1} = g \end{cases} \tag{2}$$

где $Q : U \to U$ C '. $P \to P$ - линейные симметричные положительно определенные операторы, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ - номер итерации, $u^0 \in U, p^0 \in P$ - заданные начальные приближения, а $a > 0$, $\tau > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ - итерационные параметры.

В §1.1 вводится определение класса оптимизации алгоритма (2) и связанные с ним понятия: *классом оптимизации (или постановкой оптимизации)* алгоритма (2) называется некоторое множество четверок (A, B, Q, C), где

$$A : U \to U, \quad B : P \to U, \quad Q : U \to U, \quad C : P \to P$$

являются линейными операторами, которые удовлетворяют следующим свойствам

$$A = A^* \geqslant 0, \quad Q = Q^* > 0, \quad C = C^* > 0, \tag{3}$$
$$\ker B = \{0\}, \quad \ker A \bigcap \ker B^* = \{0\}.$$

Последнее условие является необходимым и достаточным для существования и единственности решения (1) для любой правой части. *Задачей асимптотической оптимизации* алгоритма (2) на классе оптимизации K называется следующая вариационная задача

$$q_{\mathbb{K}} = \inf_{\substack{\alpha,\tau>0,\\ \beta\in\mathbb{R}}} \sup_{(A,B,Q,C)\in\mathbb{K}} \rho(T(\alpha, \beta, \tau;\ A, B, Q, C)). \tag{4}$$

где $T(\alpha, \beta, \tau;\ A, B, Q, C)$ - оператор перехода в (2), $\rho(\cdot)$ - спектральный радиус оператора. Здесь же вводятся основные классы оптимизации:

- класс $\mathbb{K}(\gamma, \Gamma)$ состоит из всех четверок (A, B, Q, C), которые удовлетворяют условиям

$$Q = A > 0; \quad 0 < \gamma C \leqslant B^* A^{-1} B \leqslant \Gamma C, \tag{5}$$

где $0 < \gamma \leqslant \Gamma$ - фиксированные числа.

- класс $\mathbb{K}_1(\delta, \Delta, \gamma, \Gamma)$ состоит из всех четверок (A, B, Q, C), которые удовлетворяют неравенствам

$$\delta Q \leqslant A \leqslant \Delta Q, \quad 0 < \gamma C \leqslant B^* A^{-1} B \leqslant \Gamma C, \tag{6}$$

где $0 < \delta \leqslant \Delta$, $0 < \gamma \leqslant \Gamma$ - фиксированные числа.

- класс $\mathbb{K}_2(\delta, \Delta, \bar{\gamma}, \bar{\Gamma})$ состоит из всех четверок (A, B, Q, C), которые удовлетворяют неравенствам

$$\delta Q \leqslant A \leqslant \Delta Q, \quad 0 < \bar{\gamma} C \leqslant B^* Q^{-1} B \leqslant \bar{\Gamma} C, \tag{7}$$

где $0 < \delta \leqslant \Delta$, $0 < \bar{\gamma} \leqslant \bar{\Gamma}$ - фиксированные числа.

Следующий §1.2 посвящен оптимизации алгоритма (2) на классе $\mathbb{K}(\gamma, \Gamma)$, $\gamma < \Gamma$. Основной результат формулируется в виде теоремы

Теорема 1.2.4. *В классе $\mathbb{K}(\gamma, \Gamma)$ задача асимптотической оптимизации алгоритма (2) имеет единственное решение следующего вида*

$$q_0 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \qquad \tau_0 = \frac{4\sqrt{\xi}}{(1 + \sqrt{\xi})^2}, \qquad \alpha_0 = \frac{4\gamma}{(1 + \sqrt{\xi})^2}, \qquad \beta_0 = 0,$$

где $\xi = \gamma / \Gamma$.

§1.3 носит вспомогательный характер. В нем вводятся и исследуются специальные классы вещественнозначных функций на прямой. Потребность во введении этих классов связана со сложностью исследования минимаксных задач, получающихся при исследовании задач асимптотической оптимизации.

Далее, в §1.4 с использованием результатов предыдущего параграфа решена задача асимптотической оптимизации (2) в классе $\mathbb{K}_1(\delta,\Delta,\gamma,\Gamma)$, $\delta<\Delta$, $\gamma<\Gamma$, о чем свидетельствует следующая теорема:

Теорема 1.4.6. *Задача асимптотической оптимизации метода (2) в классе* $\mathbb{K}_1(\delta,\Delta,\gamma,\Gamma)$, *где* $0<\delta<\Delta$, $0<\gamma<\Gamma$, *имеет единственное решение*

$$\alpha_0=\frac{\Gamma+\gamma}{2\delta}\frac{(1-q_0^2)^2}{(2\omega-1)+q_0^2}>0,\ \beta_0=0,\ \tau_0=\frac{1-q_0^2}{\delta}>0,$$

где $\xi=\gamma/\Gamma$, $\omega=\delta/\Delta$, *а* q_0 *является единственным на интервале* $(0,1)$ *корнем уравнения*

$$\frac{1-\xi}{1+\xi}q^3-(1+\omega)q^2+\frac{1-\xi}{1+\xi}(2\omega-1)q+(1-\omega)=0.$$

Отметим, что формулы, полученные в теореме, могут быть выписаны в явном виде, так как величину до можно явно записать по формулам корней кубического уравнения. Качественные характеристики оптимального показателя сходимости выявлены в следствии:

Следствие 1.4.1. *Пусть* $q_0=q_0(\omega,\xi)$ *- величина определённая в теореме 1.4.6, тогда имеют место асимптотики*

$$q_0=1-\omega+O(\omega^2)\qquad \text{при } \omega\to 0,\ \xi=\text{const},$$
$$q_0=1-\sqrt{\frac{4\omega}{2-\omega}\xi}+O(\xi)\quad \text{при } \xi\to 0,\ \omega=\text{const}.$$

Аналогичный результат получен в §1.5 для класса оптимизации $\mathbb{K}_2(\delta,\Delta,\bar\gamma,\bar\Gamma)$, $\delta<\Delta$, $\bar\gamma<\bar\Gamma$:

Теорема 1.5.6. *Задача асимптотической оптимизации метода (2) в классе* $\mathbb{K}_2(\delta,\Delta,\bar\gamma,\bar\Gamma)$, *где* $0<\delta<\Delta$, $0<\bar\gamma<\bar\Gamma$, *имеет* *единственное решение*

$$\alpha_0 = \frac{\bar{\Gamma} + \bar{\gamma}}{2\delta\Delta} \frac{(1 - q_0^2)^2}{(2\omega - 1) + q_0^2} > 0, \ \beta_0 = 0, \ \tau_0 = \frac{1 - q_0^2}{\delta} > 0,$$

где $\bar{\xi} = \bar{\gamma}/\bar{\Gamma}$, $\omega = \delta/\Delta$, *а* q_0 *является единственным на интервале* $(0,1)$ *корнем уравнения*

$$\frac{1 - \bar{\xi}}{1 + \bar{\xi}} q^3 - (1 + \omega) q^2 + \frac{1 - \bar{\xi}}{1 + \bar{\xi}} (2\omega - 1) q + (1 - \omega) = 0.$$

Следствие 1.5.1. *Пусть* $q_0 = q_0(\omega, \bar{\xi})$ *- величина определённая в теореме 1.5.6. тогда имеют место асимптотики*

$$\begin{aligned} &q_0 = 1 - \omega + O(\omega^2) && \text{при } \omega \to 0, \ \bar{\xi} = \text{const}, \\ &q_0 = 1 - \sqrt{\frac{4\omega}{2 - \omega} \bar{\xi}} + O(\bar{\xi}) && \text{при } \bar{\xi} \to 0, \ \omega = \text{const}. \end{aligned}$$

Отметим то, что указанные результаты не могут быть сведены к результатам предыдущего параграфа и наоборот.

В §1.6 проанализирована нерегулярная задача с седловой точкой, предложен следующий метод ее регуляризации: вместо исходной нерегулярной задачи (1) рассматривается задача с седловой точкой, эквивалентная исходной

$$\begin{pmatrix} A_\nu & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ g \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $A_\nu \equiv A + \nu B C^{-1} B^*, \bar{f} \equiv f + \nu B C^{-1} g$, $\nu > 0$. Использование алгоритма (2) для решения (8) приводит к идее четырехпараметрического алгоритма для решения исходной нерегулярной задачи с параметрами $\alpha, \beta, \nu > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. В качестве класса оптимизации для нерегулярного случая предлагается рассмотреть класс оптимизации $\mathbb{K}_{2s}(\delta, \Delta, \bar{\gamma}, \bar{\Gamma})$ состоящий из четверок (A, B, Q, C), которые удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{gathered} 0 \le A \le \Delta Q\,, \quad \delta(Qu, u) \leqslant (Au, u) \ \ \forall u \in \ker B^*, \\ \bar{\gamma} C \le B^* Q^{-1} B \le \bar{\Gamma} C. \end{gathered} \tag{9}$$

В этом случае указанный четырехпараметрический алгоритм эквивалентен исходному трехпараметрическому и в терминах последнего решение задачи оптимизации дает теорема

Теорема 1.6.1. *Задача асимптотической оптимизации метода (2) в классе $\mathbb{K}_{2s}(\delta, \Delta, \bar{\gamma}, \bar{\Gamma})$, где $0 < \delta \leqslant \Delta$, $0 < \bar{\gamma} < \bar{\Gamma}$, имеет единственное решение*

$$\alpha_0 = \frac{\bar{\Gamma} + \bar{\gamma}}{2\delta\Delta_0} \frac{(1 - q_0^2)^2}{(2\omega_0 - 1) + q_0^2} > 0, \ \beta_0 = \frac{\delta}{\bar{\gamma}}, \ \tau_0 = \frac{1 - q_0^2}{\delta} > 0, \tag{10}$$

где $\bar{\xi} = \bar{\gamma}/\bar{\Gamma}$, $\omega_0 = \delta/\Delta_0$, $\Delta_0 = \delta(\omega^{-1} + \bar{\xi}^{-1})$, а q_0 является единственным на интервале $(0, 1)$ корнем уравнения

$$\frac{1 - \bar{\xi}}{1 + \bar{\xi}} q^3 - (1 + \omega_0) q^2 + \frac{1 - \bar{\xi}}{1 + \bar{\xi}} (2\omega_0 - 1) q + (1 - \omega_0) = 0.$$

Следствие 1.6.1. *Пусть $q_0 = q_0(\omega, \bar{\xi})$ - величина определённая в теореме 1.6.1 $\big(\omega - \delta/\Delta,\ \bar{\xi} = \gamma/\Gamma\big)$, тогда имеют место асимптотики*

$$\begin{aligned} q_0 &= 1 - \omega \ + \ o(\omega) \quad \text{при } \omega \to 0, \ \bar{\xi} = \text{const}\,, \\ q_0 &= 1 - \bar{\xi} \ + \ o(\bar{\xi}) \quad \text{при } \bar{\xi} \to 0, \ \omega = \text{const}. \end{aligned}$$

Вторая глава посвящена алгоритму для решения практически важных систем алгебраических уравнений с седловой точкой – системам типа Навье-Стокса:

$$\left\{ \begin{array}{ll} Au + Ku + N(u)u + Bp & = f \\ B^* u & = g \end{array} \right., \tag{11}$$

где $u, f \in U$, $p, g \in P$, U и P - конечномерные евклидовы пространства размерностей N_U и N_P соответственно, $A : U \to U$ - линейный симметричный положительно-определенный оператор, $K : U \to U$ - линейный кососимметричный оператор, а $N : U \times U \to U$ - билинейный оператор обладающий следующим свойством кососимметрии

$$(N(u)v, v) = 0 \quad \forall u, v \in U. \tag{12}$$

Исследуемый алгоритм носит вид

$$\begin{cases} Q\dfrac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + \left(A + K + \beta BC^{-1}B^*\right) u^k + N(u^k)u^k + \ Bp^k &= \tilde{f} \\ -\alpha C \left(p^{k+1} - p^k\right) + B^*u^{k+1} &= g \end{cases} \tag{13}$$

где $Q : U \to U$ $C : P \to P$ - линейные симметричные положительно определенные операторы, $\tilde{f} = f + \beta BC^{-1}g$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ - номер итерации. $u^0 \in U$, $p^0 \in P$ - заданные начальные приближения, а $\alpha > 0$, $\tau > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ - итерационные параметры.

В §2.1 формулируется указанный алгоритм и определяется набор информации необходимой для его исследования:

$$0 < \delta Q \leqslant A \leqslant \Delta Q, \tag{14}$$

$$0 < \bar{\gamma} C \leqslant B^* Q^{-1} B \leqslant \bar{\Gamma} C, \tag{15}$$

$$|(Ku, v)| \leqslant c_K \|u\|_Q \|v\|_Q, \quad \forall u, v \in U, \tag{16}$$

$$|(N(u)v, w)| \leqslant c_N \|u\|_Q \|v\|_Q \|w\|_Q, \quad \forall u, v, w \in U, \tag{17}$$

где $0 < \delta \leqslant \Delta$, $0 < \bar{\gamma} \leqslant \bar{\Gamma}$, $c_K \geqslant 0$, $c_N \geqslant 0$ - известные фиксированные величины.

В §2.2 вводится параметрическая норма в пространстве $Z = U \times P \ni z = (u, p)^T$:

$$\|z\|_Z = \sqrt{((Q - \tau(\varkappa(A + (N(\cdot)\tilde{u})_s) + \beta BC^{-1}B^*)u, u) + \alpha\tau(Cp, p)},$$

где $0 < \varkappa \leqslant 1$, $0 < \tau < (\varkappa(\Delta + c_N \|\tilde{u}\|_Q) + \beta\bar{\Gamma})^{-1}$, $(\cdot)_s$ - симметричная составляющая линейного оператора, $z = (\tilde{u}, \tilde{p})^{T}$ - решение задачи (11). Далее выводится оценка показателя скорости сходимости алгоритма в этой норме:

Теорема 2.2.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$c_N \|\tilde{u}\|_Q < \delta, \quad 0 < \varkappa < 1,$$

$$\tau < \min\left\{\frac{1}{\varkappa\tilde{\Delta} + \beta\bar{\Gamma}}, \frac{2(1-\varkappa)\tilde{\delta}(1-\tau(\varkappa\tilde{\Delta}+\beta\bar{\Gamma}))^3}{2((1-\varkappa)(1-\tau(\varkappa\tilde{\Delta}+\beta\bar{\Gamma})))^2\tilde{\delta}\tilde{\Delta} + R_0^2}\right\},$$

$$\beta \geqslant 0, \quad \varkappa\tilde{\delta} + (\beta - \alpha^{-1})\bar{\Gamma} \geqslant 0,$$

где $z = (\tilde{u}, \tilde{p})^{T}$ - решение задачи (11),

$$\tilde{\delta} = \delta - c_N \|\tilde{u}\|_Q, \quad \tilde{\Delta} = \Delta + c_N \|\tilde{u}\|_Q,$$

$$R_0 = \left(c_K + c_N\left(\|\tilde{u}\|_Q + \frac{\|z^0\|_Z}{1-\tau(\varkappa\tilde{\Delta}+\beta\bar{\Gamma})}\right)\right),$$

а $z^0 = (v^0, q^0)^T$ - вектор начальной ошибки приближения. Тогда алгоритм (13) сходится в норме $\|\cdot\|_Z$ со скоростью геометрической прогрессии с показателем q таким, что

$$q \leqslant \max_{\substack{s\in[\tilde{\delta},\tilde{\Delta}],\\ t\in[\gamma,\bar{\Gamma}]}} \left\{|1-\tau\varkappa s|, \tau\left|\theta - \frac{t}{2\alpha}\right| + \sqrt{1 - 2\tau\theta + \tau^2\left(\theta - \frac{t}{2\alpha}\right)^2}\right\} < 1,$$

где $\theta = \frac{1}{2}(\varkappa s + \beta t)$.

Исследование полученных оценок трудоемко, а использование затруднительно, однако об их качестве можно судить по следующему утверждению

Следствие 2.2.2. (Асимптотика оценки). *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.2, тогда*

$$\min_{\substack{\alpha,\tau>0,\\ \beta\geqslant 0}} \frac{\|T(z)-\tilde{z}\|_Z}{\|z-\tilde{z}\|_Z} \leqslant 1 - c_1\bar{\xi}, \quad \forall\bar{\xi}\in(0,1),$$

где $c_1 = c_1(\delta,\Delta,c_K,c_N,u^0,p^0,f,g)$ *и не зависит от* $\bar{\xi} = \bar{\gamma}/\bar{\Gamma}$. *Если, кроме того,* $c_K, c_N = O(\delta)$ *при* $\delta\to 0$, *то*

$$\min_{\substack{\alpha,\tau>0,\\ \beta\geqslant 0}} \frac{\|T(z)-\tilde{z}\|_Z}{\|z-\tilde{z}\|_Z} \leqslant 1 - c_2\tilde{\omega}\bar{\xi}, \quad \forall\bar{\xi},\tilde{\omega}\in(0,1),$$

где $c_2 = c_2(c_K,c_N,u^0,p^0,f,g)$ *не зависит от* $\bar{\xi}$ *и* $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega} = \tilde{\delta}/\tilde{\Delta}$, $T(\cdot)$ *- оператор перехода в алгоритме.*

В третьей главе исследуется задача с седловой точкой с сильно монотонной нелинейной частью и алгоритм для ее решения.

В §3.1 дается постановка задачи. Пусть U, P - евклидовы пространства размерностей N_U, *Np* соответственно $N_U \geqslant N_P$, Ω - некоторая область в U, оператор *Л(u)* : $\Omega \to U$ определен всюду в Ω и удовлетворяет условию сильной монотонности:

$$\delta\,\|u_1-u_2\|_Q^2 \leqslant (A(u_1)-A(u_2), u_1-u_2) \qquad \forall u_1,u_2\in\Omega, \tag{18}$$

а также условию Липшица:

$$\|A(u_1)-A(u_2)\| \leqslant \Delta\,\|u_1-u_2\|_Q \qquad \forall u_1,u_2\in\Omega, \tag{19}$$

где $0<\delta\leqslant\Delta$, $Q=Q^*>0$ - линейный оператор в U. Исследуемая задача имеет вид

$$\begin{cases} A(u) + Bp = f \\ B^*u = g \end{cases} \tag{20}$$

где $B : U \to P$ - линейный оператор. Для решения задачи (20) предлагается рассмотреть следующий алгоритм

$$\begin{cases} Q\dfrac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + A(u^k) + \beta BC^{-1}B^* u^k + \ Bp^k & = f + \beta BC^{-1}g \\ -\alpha C\left(p^{k+1} - p^k\right) + B^* u^{k+1} & = g \end{cases} \tag{21}$$

где $C : P \to P$ - линейный симметричный положительно определенный оператор, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ - номер итерации, $u^0 \in \Omega, p^0 \in P$ - заданные начальные приближения, а $\alpha > 0$, $\tau > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ - итерационные параметры. При исследовании (21) предполагаются известными величины $0 < \bar{\gamma} \leqslant \bar{\Gamma}$ из неравенств

$$0 < \bar{\gamma} C \leqslant B^* Q^{-1} B \leqslant \bar{\Gamma} C, \tag{22}$$

а также существование решения задачи (20).

В §3.2 показывается, что для исследуемой задачи выполнена теорема единственности и существования при достаточно большой Ω (например $\Omega = U$), что дает основание надеятся на достаточно большую область сходимости (по начальным приближениям) исследуемого алгоритма, что подтверждается основным результатом главы: введем норму в $Z = U$ x P следующим образом

$$\|z\|_Z \equiv \sqrt{(Qu, u) + \alpha\tau(Cp, p)}, \quad z = (u, p)^T \in Z,$$

тогда для некоторого $R \in (0, \Delta]$, зависящего только от $A(\cdot)$, справедлива

Теорема 3.2.3. *Пусть* $\mu \in (0, 1)$ *и*

$$\beta \geqslant 0,\ \alpha > \frac{\bar{\Gamma}}{\delta},\ 0 < \tau < \min\left\{\frac{\alpha}{2\bar{\Gamma}},\ 2\mu\left(\delta - \frac{\bar{\Gamma}}{\alpha}\right)R^{-2},\ \frac{2(1-\mu)}{\delta + \Delta + \beta\bar{\Gamma}}\right\},$$

тогда для любого начального приближения $z_0 = (u^0, p^0)^T \in \Omega \times P$ *такого, что*

$$M_0 \equiv \{z \in Z : \|z - \tilde{z}\|_Z \leqslant \|z_0 - \tilde{z}\|_Z\} \subseteq \Omega \times P,$$

где $\tilde{z} \in \Omega$ - решение задачи (20), алгоритм (21) корректно определен и сходится к $\tilde{z}$ со скоростью геометрической прогрессии в норме $\|\cdot\|_Z$ с показателем q таким, что

$$q \leqslant \max\left\{\left(1+\frac{\tau\bar{\Gamma}}{\alpha}\right)\left(1-\tau\delta+\frac{1}{2}\mu^{-1}\tau^2R^2\right),\right.$$
$$\left.\sqrt{1-\frac{\tau\bar{\gamma}}{\alpha}+2\left(\frac{\tau\bar{\gamma}}{\alpha}\right)^2},\ \sqrt{1-\frac{\tau\bar{\Gamma}}{\alpha}+2\left(\frac{\tau\bar{\Gamma}}{\alpha}\right)^2}\right\} < 1.$$

Качественное представление о полученной оценке можно получить из

Следствие 3.2.1. (Асимптотика оценки). *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.3, тогда для некоторой константы* $c_1 \geqslant 1/16$

$$\min_{\substack{\alpha,\tau>0,\\ \beta\in\mathbb{R}}} \frac{\|T(z)-\tilde{z}\|_Z}{\|z-\tilde{z}\|_Z} \lesssim 1-c_1\omega^2\bar{\xi} \quad \text{при } \bar{\xi}\to+0,\ \omega=\mathrm{const}.$$

Если же оператор $A(u)$ симметричный, то имеет место оценка

$$\min_{\substack{\alpha,\tau>0,\\ \beta\in\mathbb{R}}} \frac{\|T(z)-\tilde{z}\|_Z}{\|z-\tilde{z}\|_Z} \lesssim 1-c_2\omega\bar{\xi} \quad \text{при } \bar{\xi}\to+0,\ \omega=\mathrm{const},$$

где $c_2 \geqslant 1/16$ - некоторая константа.

Как и ранее, в следствии: $\bar{\xi} \equiv \bar{\gamma}/\bar{\Gamma}$, $\omega \equiv \delta/\Delta$, а $T(\cdot)$ - оператор перехода в алгоритме. Под симметричностью $A(u)$ понимается симметричность всех существующих дифференциалов.

В приложении приведены результаты численных исследований показателей сходимости алгоритмов на примере двух модельных задач гидродинамики: задачи о каверне и задачи обтекания тела, основные выводы которых таковы: трехпараметрический алгоритм существенно более эффективен при решении уравнений Навье-Стокса, чем алгоритмы того же класса (например, алгоритм Эрроу-Гурвица) при больших $\mathrm{cond}_2(Q^{-1}A)(\approx 1)$ и больших (по меркам рассматриваемых алгоритмов) характерных числах Re (≈ 1000).

Заключение содержит основные результаты диссертации.

Основные результаты работы

1. В случае регулярных систем с седловыми операторами для каждой из трех классических постановок получена в явном виде задача асимптотической оптимизации исследуемого алгоритма и при помощи специально разработанной методики найдено ее точное аналитическое решение.

2. В случае нерегулярных систем с седловыми операторами предложена новая постановка задачи оптимизации и найдено точное аналитическое решение задачи асимптотической оптимизации исследуемого алгоритма в этой постановке.

3. Исследован случай задач с седловыми операторами типа Навье-Стокса, доказана глобальная сходимость алгоритма и получена оценка скорости сходимости и ее предельные характеристики.

4. Исследован случай задач с седловыми операторами с сильно монотонной нелинейной частью, доказана сходимость в широкой области начальных приближений и получена оценка скорости сходимости и ее предельные характеристики.

Список публикаций по теме диссертации

1. BYCHENKOV Yu.V., CHIZHONKOV E.V. Optimization of one three-parameter method of solving an algebraic system of the Stokes type. // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling,* 1999, vol. 10, №1, p. 33 – 40.

2. БЫЧЕНКОВ Ю.В. Трехпараметрический метод для решения уравнения Навье-Стокса. // *Четвертый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике, посвященный памяти М.А.Лаврентьева (1900-1980): Тез.докл., ч.II.* - Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000, с. 77.

3. БЫЧЕНКОВ Ю.В. Асимптотическая оптимизация одного трехпараметрического алгоритма для решения задач с седловой точкой. // *Труды мат. центра им. Н. И. Лобачевского.* – Казань: Издательство "ДАС", 2001, том 13: Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач, с. 155 – 161.

4. БЫЧЕНКОВ Ю.В. Об одном трехпараметрическом методе решения уравнений Навье-Стокса. // *ЖВМ и МФ,* 2002, том 42, №9, с. 1420 – 1427.

5. БЫЧЕНКОВ Ю.В. Оптимизация трехпараметрических алгоритмов для решения седловых задач. // *Доклады Академии Наук,* 2002, том 384, №4, с. 439 - 441.

6. BYCHENKOV Yu.V., CHIZHONKOV E.V. On optimization of one symmetric algorithm for saddle point problem. // *Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics. Edited by G.A.Mikhailov, V.P.Win, Y.M.Laevsky.* – Novosibirsk: ICM&MG Publisher, 2002, p. 97 - 103.

7. БЫЧЕНКОВ Ю.В., ЧИЖОНКОВ Е.В. Об одном подходе к регуляризации задач с седловой точкой. // *Материалы Четвертого Всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения".* - Казань: Изд-во Казанского мат. общества, 2002, с. 40 - 42.

8. BYCHENKOV Yu.V. Optimization of one class of nonsymmetrizable algorithms for saddle point problems. // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling,* 2002, vol. 17, № 6, p. 521 – 546.