На правах рукописи

ЧУЕШЕВ Виктор Васильевич

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ФУНКЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРИМА НА КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОИ ПОВЕРХНОСТИ

Специальность : 01.01.01 - математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

В Чуешев

Новосибирск - 2003

Работа выполнена на кафедре математического анализа Новосибирского государственного университета

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор Медных Александр Дмитриевич

Официальные оппоненты: член-корр. РАН, профессор, доктор физико-математических наук, Тайманов Искандер Асанович,

доктор физико-математических наук, профессор Берестовский Валерий Николаевич,

доктор физико-математических наук, профессор Цих Август Карлович

Ведущая организация: Казанский государственный университет

Защита состоится "25" 09 2003 года в 15^00 часов на заседании Диссертационного Совета Д003.015.03 при Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу:
630090, Новосибирск-90, пр. академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "25" 06 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, к.ф.-м.н. Романов А.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. [1]

Данная диссертация посвящена изучению мультипликативных функций и дифференциалов Прима для произвольных характеров на переменной компактной римановой поверхности. Кроме того, исследуются проективные структуры и соответствующие им линейно-полиморфные функции, в связи со стандартными униформизациями компактных римановых поверхностей группами Кебе, и получаются вариационные формулы для групп монодромии таких функций.

Основы классической теории римановых поверхностей и абелевых дифференциалов на компактных римановых поверхностях были заложены в работах Б. Римана, Ф. Клейна, К. Вейерштрасса и А. Пуанкаре. Теория римановых поверхностей тесно связана со многими направлениями в современной математике - теорией функций на комплексных многообразиях, алгебраической геометрией, топологией и уравнениями математической физики. Она содержит три основных аспекта: топологический (двумерные поверхности и фундаментальные группы), алгебраический (дискретные группы, группы автоморфизмов поверхностей и комплексных многообразий) и аналитический (функции и дифференциальные формы на поверхности, дифференциальные уравнения и функциональный анализ).

Гармонические и голоморфные дифференциалы Прима на компактных римановых поверхностях и их периоды появились в конце 19 века в работах Ф. Прима, Г. Роста, П. Аппеля и позднее Р. Кенига, О. Хаупта, Г. Петерсона (4; 5; 32; 24; 16; 31]. Для дальнейшего изучения этих объектов было недостаточно средств из алгебры, геометрии, теории функций и дифференциальных уравнений.

К середине 50-х годов 20 века появились нужные алгебро-геометрические средства, например, теория голоморфных векторных расслоений над комплексными многообразиями в работах Н. Стинрода и Г. Грауэрта. Затем в работах М.А. Лаврентьева, Ю.Г. Решетняка, П.П. Белинского была развита теория квазиконформных отображений. С помощью этой теории была решена 22 проблема Гильберта и исследованы пространства Тейхмюллера компактных римановых поверхностей и пространства клейновых групп в работах Л. Альфорса [1], Л. Берса [1], С.Л. Крушкаля, И. Кра [25 - 27] и Б. Маскита [28 - 30].

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 98-01-00699, 99-01-00630) и грантом Сибирского отделения РАН.

Квазиконформные деформации фуксовых и других клейновых групп в настоящее время являются одним из важнейших методов в исследованиях по геометрической теории функций на компактных римановых поверхностях.

Теория краевых задач в классе аналитических функций на компактных римановых поверхностях для сложного (составного) контура была развита в работах В.Н. Монахова, Л.А. Аксентьева, Э.И. Зверовича, Л.И. Чибриковой и С.Р. Насырова. Мультипликативные интегралы Прима (интегралы от дифференциалов Прима на римановой поверхности) являются решениями специальной краевой задачи в классе мероморфных функций для составного контура на компактной римановой поверхности.

В середине 70-х годов 20 века после работ С.П. Новикова, И.М. Кричевера, Б.А. Дубровина, И.А.Тайманова, в связи с алгебро-геометрическим интегрированием уравнений математической физики (уравнения Кортвега де Фриза, Кадомцева-Петвиашвили и др.), возрос интерес к тэта-функциям Римана, многообразиям Якоби и специальным характерам для фиксированной гиперэллиптической римановой поверхности. Кроме того, в теории многообразий Прима, связанных с двулистными накрытиями, применяются дифференциалы Прима для специальных характеров, квадраты которых равны единице. Такие характеры соответствуют так называемым спинорным структурам.

Затем в наше время дифференциалы Прима снова появились в ряде работ К. Эрла, И. Кра [9; 10; 27], в связи с тэта-рядами Пуанкаре; в работах Г. Кемпфа [23], Дж. Фея [12], Дж. Ергенсона [22], в связи с приложениями к теории чисел, и недавно в работе Э. Джеблоу [21] в вариационной теории таких дифференциалов. Однако, как правило, все эти авторы изучали голоморфные дифференциалы Прима для двух специальных видов характеров фундаментальной группы компактной римановой поверхности, которые либо принимают все свои значения только на единичной окружности, либо на половине образующих группы их значения равны единице.

По-видимому к 1980 году появилась необходимость в построении общей теории дифференциалов Прима для любых характеров, хотя бы на фиксированной компактной римановой поверхности. В 1980 году Р. Ганнинг [15] начал изучение голоморфных дифференциалов Прима и их периодов относительно произвольных существенных характеров. Классы периодов голоморфных дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$ являются важными трансцендентными инвариантами, связанными с поверхностью. Он ввел векторное расслоение Прима из голоморфных дифференциалов Прима и когомологическое векторное расслоение (Ганнинга) для классов их периодов и дал явное описание таких расслоений для рода $g = 2$.

Группы монодромии для линейно-полиморфных функций на компактной римановой поверхности появились ещё в 19 веке в работах А. Пуанкаре, Э. Пикара, П. Фату [см. 6, 18, 19], в связи с проблемой униформизации компактной римановой поверхности. В 70-х годах 20 века группы монодромии появились вновь в работах К. Эрла [8], И. Кра [25; 26], Б. Маскита [28], Д.А. Хейхала [18, 19] и Р. Ганнинга [13], в связи с общей проблемой униформизации и с теорией общих пространств Тейхмюллера. В 80-х годах 20 века П.Г. Зограф, Л.А. Тахтаджян решили проблему аксцессорных параметров для линейного дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса на компактной римановой поверхности с помощью функционала действия, а А.Б. Венков нашел явные формулы для этих параметров в терминах групп монодромии, которые являются фуксовыми группами.

Цель работы. Целью представленной работы является: 1) построение общей теории дифференциалов Прима и классов их периодов для произвольных характеров на переменной компактной римановой поверхности и создание новых методов для их исследования; 2) изучение векторных расслоений Прима, образованных дифференциалами Прима, и когомологического расслоения Ганнинга, составленного из классов периодов для таких дифференциалов, над пространством Тейхмюллера рода $g \geq 2$ и над пространством групп Кебе; 3) исследование периодов замкнутых, гармонических и голоморфных дифференциалов Прима для произвольных характеров; 4) изучение проективных структур и их групп монодромии, в связи со стандартными униформизациями компактных римановых поверхностей группами Кебе; 5) получение точных вариационных формул для группы монодромии линейного дифференциального уравнения второго порядка на компактной римановой поверхности.

Методика исследования. В диссертации широко применяются современные методы геометрической теории функций на компактных римановых поверхностях, использующие универсальные многообразия Якоби, расслоенные пространства Берса, расслоенные пространства дивизоров над пространствами Тейхмюллера и стандартные по Б. Маскиту униформизации компактных римановых поверхностей группами Кебе. Существенную роль играют методы теории квазиконформных отображений и геометрические методы исследования проективных структур и их групп монодромии на компактных римановых поверхностях, включающие также вариационные методы для получения точных вариационных формул группы монодромии линейных дифференциальных уравнений второго порядка и для решений нелинейного уравнения Шварца на компактной римановой поверхности.

Кроме того, предложен новый метод построения базиса мероморфных дифференциалов Прима, кратных заданному дивизору, на переменной компактной римановой поверхности, использующий многообразия Якоби, который голоморфно зависит от характеров и от модулей компактной римановой поверхности. Создан новый метод фильтрации в многообразии Якоби для изучения мультипликативных точек Вейерштрасса, мультипликативных пробелов по Вейерштрассу и по Нетеру на компактной римановой поверхности.

Научная новизна. Основные результаты диссертации. Все основные результаты диссертации являются новыми. Они могут быть объединены в следующие группы.

1. Построена общая теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для произвольных характеров на переменной компактной римановой поверхности. Она включает доказательства теорем Абеля, Римана-Роха для характеров; нахождение таблиц размерностей основных пространств мероморфных дифференциалов Прима, кратных заданным дивизорам, на компактной римановой поверхности, и нахождение топологических и аналитических свойств группы характеров компактной поверхности и ее специальных подгрупп.

2. Введены мультипликативные точки Вейерштрасса и построена теория мультипликативных точек Вейерштрасса на компактной римановой поверхности. Предложен новый метод фильтрации в многообразии Якоби для изучения мультипликативных пробелов по Вейерштрассу и по Нетеру на компактной римановой поверхности. С помощью этого метода доказана не инвариантность стандартной фильтрации в многообразии Якоби.

3. Предложен новый метод построения базиса мероморфных дифференциалов Прима, кратных заданному дивизору, на переменной компактной римановой поверхности, использующий многообразия Якоби, абелевы дифференциалы третьего рода и тэта-функции Римана, который голоморфно зависит от характеров и от модулей компактной римановой поверхности.

4. Изучены периоды замкнутых, гармонических и голоморфных диф-

ференциалов Прима для произвольных характеров. Найдена общая формула билинейного спаривания двух замкнутых дифференциалов Прима для произвольных характеров. Из этой формулы, как частные случаи, следуют все известные соотношения между периодами дифференциалов Прима, найденные в работах Ф. Прима, Г. Роста, Р. Ганнинга, Г. Кемпфа и Е. Джеблоу. Получены мультипликативные аналоги теорем Ходжа и де Рама для нормированных характеров. Построены канонические базисы для гармонических и голоморфных дифференциалов Прима, вещественно-аналитически и комплексно-аналитически зависящие от характеров и от модулей компактной римановой поверхности соответственно.

5. Введено гармоническое векторное расслоение Прима, из гармонических дифференциалов Прима, и доказано, что оно вещественно-аналитически изоморфно когомологическому расслоению Ганнинга над базой из нетривиальных нормированных характеров. Найдено препятствие коциклического типа к взаимной однозначности отображения периодов над базой из ненормированных характеров.

6. Введены пространства компактных римановых поверхностей с неполным отмечанием и пространства групп Кебе фиксированной сигнатуры. Найдены топологические и аналитические свойства таких пространств, для которых пространство Тейхмюллера будет универсальным накрывающим пространством.

7. Построен базис в векторном расслоении Прима, из мероморфных автоморфных форм Прима относительно групп Кебе, кратных заданному дивизору, над пространством групп Кебе.

8. Найдены необходимые и достаточные условия, чтобы проективная структура и соответствующая ей линейно-полиморфная функция на компактной римановой поверхности была стандартной униформизацией этой поверхности.

9. Получена точная вариационная формула для группы монодромии линейного дифференциального уравнения второго порядка и для решения нелинейного уравнения Шварца на компактной римановой поверхности.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Результаты работы имеют теоретическое значение и могут служить основанием для дальнейшего развития геометрической теории функций комплексного переменного, алгебраической геометрии, дифференциальной геометрии, аналитической теории чисел и уравнений математической физики. Данные результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов по теории комплексных многообразий, геометрической теории функций и теории линейных дифференциальных уравнений на компактных римановых поверхностях.

Впервые построена теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для произвольных характеров на переменной компактной римановой поверхности. С помощью нового метода фильтрации в многообразии Якоби построена теория мультипликативных точек Вейерштрасса на компактной римановой поверхности. Предложен новый метод построения базиса мероморфных дифференциалов Прима, кратных заданному дивизору, на переменной компактной римановой поверхности, который голоморфно зависит от характеров и от модулей компактной римановой поверхности. Впервые найдена общая формула билинейного спаривания двух замкнутых дифференциалов Прима для произвольных характеров. Введено гармоническое векторное расслоение Прима, из гармонических дифференциалов Прима, и доказано, что оно вещественно-аналитически изоморфно когомологическому расслоению Ганнинга над базой из нетривиальных нормированных характеров. Введены пространства компактных римановых поверхностей с неполным отмечанием и пространства групп Кебе фиксированной сигнатуры. Найдены топологические и аналитические свойства таких пространств, для которых пространство Тейхмюллера будет универсальным накрывающим пространством. Найдены необходимые и достаточные условия, чтобы проективная структура и соответствующая ей линейно-полиморфная функция на компактной римановой "поверхности была стандартной униформизацией этой поверхности. Получена точная вариационная формула для группы монодромии линейного дифференциального уравнения второго порядка на компактной римановой поверхности.

Используемые при доказательстве теорем специальные и новые методы могут быть применены в дальнейших исследованиях по геометрической теории функций комплексного переменного.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на следующих семинарах и конференциях : Всесоюзной конференции по теории функций, посвященной 100-ю со дня рождения Н. Н. Лузина (10-19 сентября 1983 г., Кемерово); Всесоюзном семинаре "Актуальные вопросы комплексного анализа" (16-23 сентября 1985 г., Ташкент); Всесоюзном семинаре "Актуальные вопросы комплексного анализа"(5-10 июня 1989 г., Ташкент); Всесоюзной конференции по геометрии и анализу (14-16 ноября 1989 г., Новосибирск);

Международной конференции по геометрии, посвященной Н. И. Лобачевскому (август 1992 г., Казань); Всесоюзной школе "Алгебра и анализ"(1993г., Байкал); International conference on discrete groups and 3-manifolds (Bielefeld State University, Germany, June 1996 г.); Второй Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, ИНПРИМ-96); Третий Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, ИНПРИМ-98); Международной конференции по анализу и геометрии, посвященной 70-летию академика Ю. Г. Решетняка (Новосибирск, 1999 г.); Международной конференции по геометрии, посвященной 70-летию профессора В. А. Топоногова (Новосибирск, 2000 г.); Четвертый Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, ИНПРИМ-2000); Международной конференции, посвященной 100-летию академика М. А. Лаврентьева (Новосибирск, 2001 г.); Second Russian-German Geometry Meeting dedicated to 90-anniversary of A. D. Alexandrov, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, June 2002; Всероссийской конференции "Математические методы в механике", посвященной 70-летию член-корр. РАН В. Н. Монахова (8-13 августа, 2002 г., Барнаул); Ben-Gurion University, Beer-Sheva, Israel (семинар под руководством профессора В. М. Гольдштейна) - 1999 г.; Bar-Пап University, Tel-Aviv, Israel (объединенный семинар Института математики) - 1999 г.; Институт математики СО РАН (семинар по геометрии, топологии и их приложениям под руководством член-корр. РАН, профессора И. А. Тайманова) - 2002 г.; Омский государственный университет (геометрический семинар под руководством профессора В. Н. Берестовского) - 2002 г.; Красноярский государственный университет (семинар по комплексному анализу под руководством профессора А. К. Циха) - 2002 г.; Казанский государственный университет (городской семинар по геометрической теории функций под руководством профессоров Л.А. Аксентьева и С.Р. Насырова) - 2002 г.; Институт математики СО РАН (объединенный семинар отдела геометрии и анализа под руководством академика Ю. Г. Решетняка) - 2002 г.; Кроме того, все результаты работы в различное время докладывались в Институте математики СО РАН (семинар отдела теории функций под руководством профессоров П. П. Белинского, С. Л. Крушкаля; семинар по геометрическим структурам на многообразиях и орбифолдах под руководством профессора А. Д. Медных).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 24 работы [33-56]. Основные результаты диссертации содержатся в монографии [56].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка цитированной литературы. Объем работы - 260 страниц, библиография - 113 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Каждая глава в свою очередь разбита на параграфы. Нумерация каждого утверждения состоит из трех цифр, первая из которых обозначает номер главы, вторая - номер параграфа, третья - номер утверждения.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, дается обзор современного состояния изучаемых проблем и приводится краткое изложение диссертации.

Первая глава посвящена построению общей теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима для произвольных характеров фундаментальной группы компактной римановой поверхности.

Параграф 1.1 имеет вспомогательный характер и содержит сведения по теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима, полученные в работах Ф. Прима [32], П. Аппеля [4-6] в конце 19 века и в начале 20 века, и изложенные в книге Х. Фаркаша, И. Кра [11, p.126-134]. Обозначим через F компактную риманову поверхность рода $g \geq 2$, $Hom(\pi_1(F), \mathbf{C}^*)$ группу всех характеров (одномерных представлений) ρ из $\pi_1(F)$ в $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\setminus\{0\}$. Характер ρ на $\pi_1(F)$ называется несущественным характером на $\pi_1(F)$, если существует $c = (c_1, ..., c_g) \in \mathbf{C}^g$ такой, что :

$$\rho(a_j) = \exp 2\pi i c_j, \rho(b_j) = \exp 2\pi i \sum_{k=1}^{g} \pi_{jk} c_k, j = 1, ..., g,$$

где

$$\pi_1(F, O) = \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g : \prod_{k=1}^{g} [a_k, b_k] = 1 \rangle,$$

$\Omega = (\pi_{jk})$ - матрица порядка g из $b-$ периодов для канонического базиса $\zeta_1, ..., \zeta_g$ голоморфных абелевых дифференциалов на F, двойственного с $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$ (т.е. $\int_{a_k} \zeta_j = \delta_{jk}, \int_{b_k} \zeta_j = \pi_{jk}, j, k = 1, ..., g$) [11, c. 129]. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$. Характеры $\rho \in Hom(\pi_1(F), \mathbf{C}^*)\setminus L_g$ называются существенными характерами.

В параграфе 1.2 дается топологическая и аналитическая характеризация группы характеров $Hom(\pi_1(F,O),\mathbf{C}^*)$и ее специальных подгрупп L_g и $\overline{L}_g$ ($\overline{L}_g$ - множество всех комплексно-сопряженных характеров К L_g).

В параграфе 1.3 доказываются теорема Абеля для характеров, теоремы Римана-Роха для мероморфных q-дифференциалов Прима и для строго двойственных q-дифференциалов Прима относительно любых характеров на компактной римановой поверхности рода *д,* где $q \in \mathbf{Z}, g > 0$. С помощью этих теорем получаются шесть таблиц размерностей пространств мероморфных q-дифференциалов Прима для характера *р,* кратных дивизорам степеней $m(2g-2)$, $m \geq$О, $m, q \in$ Z, и им обратным дивизорам. Оказывается, что эти размерности зависят от того, выполняются или нет достаточное условие в теореме Абеля для характеров и некоторое равенство в многообразии Якоби для компактной римановой поверхности.

Определение 1.3.1. Мероморфным q-дифференциалом Прима на *F* для *р* называется однозначная мероморфная дифференциальная q-форма $\phi - \phi(z)dz^q$на $U = \{z \in$ С : $|z| < 1\}$ такая, что

$$\phi(Tz)(dTz)^q = \quad \rho(T)\phi(z)dz^q\, T \in \Gamma, z \in U, q \in \mathbf{Z}.$$

Здесь

$$\Gamma = \langle A_1, ..., B_g : [A_1, B_1]...[A_g, B_g] = 1\rangle$$

- фуксова группа первого рода на *U* такая, что $F = U/\Gamma$, и группа Г изоморфна группе $\pi_1(F)$.

Теорема (Абеля для характеров) [11, р.134]. Пусть *D* - дивизор на отмеченной компактной римановой поверхности $[F, \{a_j, b_j\}_{j=1}^g]$ рода $g \geq 1$ и *р* - характер на $\pi_1(F)$. Тогда *D* будет дивизором мультипликативнойфункции f на *F* для характера *р,* если и только если *degD* = О и

$$\varphi(D) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\log\rho(b_j)e^{(j)} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\log\rho(a_j)\pi^{(j)} \equiv \psi(\rho)$$

в многообразии Якоби $J(F)$,т.е. $\mathbf{C}^g$ по модулю целочисленной решетки *L(F),* порожденной столбцами $e^{(1)}, ..., e^{(g)}, \pi^{(1)}, ..., \pi^{(g)}$ матрицы а-периодов и b-периодов, где φ - отображение Якоби для *F.*

Обозначим через $\Omega^q_\rho(D)$ пространство мероморфных q-дифференциалов $\phi = \phi(z)dz^q$ на *F* для характера *р* таких, что $(\phi) \geq D$, где $q \in$ Z. Его комплексная размерность есть число $i_{\rho,q}(D)$ и $i_{\rho,0}(D) = r_\rho(D)$.

Теорема 1.3.1 (Римана-Роха для q-дифференциалов и характеров). Для любых $g > 0$ и $q \in Z$ верно равенство

$$i_{\rho,q}(D) = (g - 1)(2q - 1) - degD + i((f)Z^q/D)$$

при любом характере ρ на компактной римановой поверхности F рода g, где f - любая мультипликативная функция для ρ, $f \neq O$, и Z - канонический класс дивизоров абелевых дифференциалов на F.

Классические q–точки Вейерштрасса играют большую роль в геометрической теории функций на компактных римановых поверхностях. В параграфе 1.4 вводятся мультипликативные точки Вейерштрасса и строится теория мультипликативных точек Вейерштрасса для мультипликативных мероморфных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности. Оказывается, что свойства мультипликативных точек Вейерштрасса для существенных характеров сильно отличаются от свойств классических точек Вейерштрасса. Предлагается новый метод исследования пробелов Вейерштрасса и Нетера, и мультипликативных точек Вейерштрасса через фильтрации в многообразии Якоби на компактной римановой поверхности.

Теорема 1.4.5 (о мультипликативных пробелах Вейерштрасса). Для любого существенного характера ρ и любой точки P на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$ существует точно $g - 1$ чисел (мультипликативных пробелов Вейерштрасса) n_i, удовлетворяющих неравенствам

$$O < n_1 < \ldots < n_{g-1} < 2g,$$

которые определяются так, что для каждого $i, i = 1, \ldots, g - 1$, не существует мероморфной мультипликативной функции для ρ на F, имеющей в качестве единственной особенности полюс в P точно порядка n_i.

Определение 1.4.2. Точка P на компактной римановой поверхности F рода $g > 1$ называется мультипликативной точкой Вейерштрасса для существенного характера ρ, если в ней можно задавать единственный полюс, мероморфной мультипликативной функции для ρ, порядка не превышающего $g - 1$.

Теорема 1.4.7 (о мультипликативных пробелах Вейерштрасса). Для любого существенного характера ρ и любой точки P на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ верны следующие утверждения:

1) натуральное число $j, 1 \leq j \leq g$, будет мультипликативным не

пробелом в P для ρ на F тогда и только тогда, когда

$$j\varphi(P)+\psi(\rho)\in W_j\setminus(W_{j-1}+\varphi(P));$$

2) точка P не будет мультипликативной точкой Вейерштрасса на F для ρ тогда и только тогда, когда выполняются условия :

$$j\varphi(P)+\psi(\rho)\notin W_j\setminus(W_{j-1}+\varphi(P)), 1\le j\le g-1,$$

где $Wj=\varphi(F_j), Fj$ - симметрическое $j-$**кратное** произведение поверхности F, а φ- отображение Якоби для F.

Теорема 1,4.15. На компактной **римановой** поверхности F рода $g\geq 2$ для любого характера ρ и при $q>1$ $(q,\rho)-$**каноническая** линейная система $|Z^q_\rho\setminus$ дивизоров не имеет базисных точек на F.

Теорема 1.4.19. На компактной римановой поверхности F рода $g\geq 2$ для любого существенного характера ρ число $N(\rho)$ мультипликативных точек Вейерштрасса для ρ *на* F удовлетворяет неравенству

$$g-1\le N(\rho)\le(g-1)^2g.$$

Теорема 1.4.20. При фиксированной точке P на компактной римановой поверхности F рода $g\geq 2$ для существенного характера ρ $P-$**фильтрация** для ρ в группе $J(F)$

$$0\subset W_1-\varphi(P)\subset W_2-2\varphi(P)\subset\ldots\subset W_k-k\varphi(P)\subset\ldots$$

$$\subset W_{g-1}-(g-1)\varphi(P)\subset W_g-g\varphi(P)=J(F)$$

будет отделимой исчерпывающей фильтрацией длины g в $J(F)$.

Эта фильтрация позволяет определять мультипликативные пробелы и не пробелы Вейерштрасса для существенного характера ρ в фиксированной точке P среди чисел $\{1,2,\ldots,g\}$ через расположение $\psi(\rho)$в $J(F)$.

Пусть теперь фиксирован существенный характер ρ. Тогда получаем последовательность подпространств :

$$0\neq-\psi(\rho)\subset W_1-\psi(\rho)\subset W_2-\psi(\rho)\subset\ldots\subset W_{g-1}-\psi(\rho)\subset W_g-\psi(\rho)=J(F)_1$$

так называемую $\rho-$**фильтрацию** для P в $J(F)$,хотя она не будет фильтрацией в $J(F)$, как в теореме 1.4.20. Она позволяет определять точки P и мультипликативные пробелы и не пробелы Вейерштрасса в точке P для фиксированного существенного характера p среди чисел $\{1, 2, ..., g\}$ через расположение $\varphi(P), 2\varphi(P), ..., g\varphi(P)$ в $J(F)$.

Кроме того, в теореме 1.4.21 показано, что подмножества $Wk = \varphi(F_k)$, $1 \leq k \leq g - 1$, не инвариантны относительно сдвига на любой ненулевой элемент в многообразии Якоби *J(F)* компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$.

Во второй главе строятся базисы мероморфных дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности, которые голоморфно зависят и от модулей компактной римановой поверхности и от характеров.

В параграфе 2.1, который носит вспомогательный характер, дается краткий обзор по пространствам Тейхмюллера, по расслоенным пространствам Берса и по расслоениям дивизоров над пространством Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$.

В параграфе 2.2 строится базис голоморфных дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности с помощью абелевых дифференциалов третьего рода. Для $p \in Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ обозначим через $\Gamma(F_0, O^{1,0}(\rho))$векторное пространство голоморфных дифференциалов Прима для p на F_0 и через $\mathbf{P}_{1,0}(F_0) = \cup_{\rho \notin L_g} \Gamma(F_0, O^{1,0}(\rho))$ векторное расслоение Прима для фиксированной поверхности F_0. Р. Ганнинг [14] доказал, что это голоморфное комплексное векторное расслоение ранга $g - 1$ над $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash L_g$.

Определение 2.2.1. Мероморфным *(p, q)*$-$дифференциалом Прима $\phi = \phi(z)dz^q$с характером p на F_μ называется однозначная мероморфная функция $\phi(z)$ на $w^\mu(U)$, удовлетворяющая условию

$$\phi(T^\mu(z))[(T^\mu)'(z)]^q = \rho(T^\mu)\phi(z),$$

для $z \in w^\mu(U)$, $[\mu] \in \mathbf{T}_g$, $T^\mu \in \Gamma^\mu$. Здесь Γ^μ - квазифуксова группа, униформизирующая в инвариантной компоненте $w^\mu(U)$ компактную риманову поверхность F_μ. Если $q = 0$, то будем говорить о мультипликативной функции f на F_μ *с* характером *р.*

Теорема 2.2.1. Для любых $g \geq 2$, $[\mu_0] \in \mathbf{T}_g(F_0), \rho_0 \in Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash L_g$ существуют односвязные окрестности

$$U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g(F_0), U(\rho_0) \subset Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash L_g$$

и голоморфные функции $\phi_j([\mu], \rho; z), j = 1, ..., g - 1$, на $w^\mu(U)$, голоморфно зависящие от $[\mu] \in U([\mu_0]), \rho \in U(\rho_0)$,такие, что при фиксированных $[\mu]$ и p они задают базис $\phi_j([\mu], \rho; z)dz, j = 1, ..., g - 1$, в комплексном векторном пространстве голоморфных $\rho-$дифференциалов

Прима на отмеченной компактной римановой поверхности $w^{\mu}(U)/\Gamma^{\mu}$ рода g.

Пусть E будет главное $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$–расслоение над $\mathbf{T}_g(F)$ со слоем $Hom(\Gamma^{\mu}, \mathbf{C}^*)$ над точкой $[F_{\mu}] = \Gamma^{\mu}$.

Лемма **2.2.2.** Голоморфное главное $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$–расслоение E биголоморфно изоморфно тривиальному расслоению $\mathbf{T}_g(F) \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ **над** $\mathbf{T}_g(F)$.

С помощью леммы 2.2.2 введем векторное расслоение Прима $\mathbf{P}_{1,0}(1)$ над $\mathbf{T}_g(F)$ х $(Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash L_g)$со слоем $\Gamma([F_{\mu}], O^{1,0}(\rho_{\mu}))$ над точкой $([F_{\mu}]; \rho)$, где $\rho(A_j) = \rho_{\mu}(A_j^{\mu}), \rho(B_j) = \rho_{\mu}(B_j^{\mu}), j = 1, ..., g$.

Рассмотрим векторное расслоение Прима $\mathbf{P}_q(1)$, у которого слой над точкой $([\mu], \rho) \in \mathbf{T}_g$ х $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ состоит из голоморфных (ρ, q)–дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности F_{μ} рода $g \geq 2$ при $q \geq 1, q \in$ N.

Предложение *2.2.4.* Для любого $g \geq 2$эрмитовоголоморфное векторное расслоение Прима $\mathbf{P}_q(1)$, $q \geq 1$, над $\mathbf{T}_g$ х L_g аналитически эквивалентно тривиальному голоморфному векторному расслоению ранга g при $q — 1$ и ранга $(2q — 1)(.g — 1)$ при $q > 1$.

Теорема 2.2.5. Для любого $g \geq 2$ векторное расслоение Прима $\mathbf{P}_{1,0}(1)$ над $\mathbf{T}_g$ х $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash L_g$ является эрмитовым голоморфным векторным расслоением ранга $g - 1$.

Это утверждение уже доказано в теореме 2.2.1 и там был построен базис голоморфных дифференциалов Прима вида $f_1\omega, ..., f_{g-1}\omega$, где ω - голоморфный абелев дифференциал, а $f_1, ..., f_{g-1}$ - мероморфные мультипликативные функции для p на F_{μ}, у которых полюса совпадают с нулями дифференциала ω. При этом базис голоморфно зависел от р и от $[\mu]$. *В* теореме 2.2.5 построен базис голоморфных дифференциалов Прима другого вида $f_1\omega_1, ..., f_{g-1}\omega_{g-1}$ с теми же свойствами.

Теорема 2.2.6. Векторное расслоение Прима $\mathbf{P}_q(1)$ является эрмитовым голоморфным векторным расслоением ранга $d = (2q - 1)(g - 1)$ над $\mathbf{T}_g$ х $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$при любых $g \geq 2, q \geq 2$.

Отметим, что при $q = 1$ и $q > 1$ частные случаи теорем 2.2.5 и 2.2.6 были доказаны И. Кра в [27] для множества нормированных характеров $[S^1]^{2g} \subset Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash L_g \subset Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$, где для построения базиса голоморфных (ρ, q) –дифференциалов Прима на компактных римановых поверхностях использовались тэта-ряды Пуанкаре и не выяснялось, как зависят они от характеров и от модулей компактных римановых поверхностей.

В параграфе 2.3, с помощью тэта-функции Римана, строится другой базис голоморфных q-дифференциалов Прима, который голоморфно зависит от существенных характеров и от модулей компактной римановойповерхности.

В параграфе 2.4 строятся базисы в пространствах мероморфных дифференциалов Прима, кратных дивизору, на переменной компактной римановой поверхности.

Зафиксируем дивизор $D = R_1 ... R_l, l \geq 1$, на F_0. Используя глобальное вещественно-аналитическое сечение К. Эрла s для канонического отображения Φ, из пространства всех комплексных структур в пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$, получим глобальное вещественно-аналитическое сечение из дивизоров $D[\mu] = w^{s[\mu]}(D) = R_1[\mu] ... R_l[\mu]$ степени l над $\mathbf{T}_g$. Обозначим через $\mathbf{P}_q(D)$ векторное расслоение Прима над $\mathbf{T}_g$ х $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$, слой которого над точкой $([\mu]p)$ состоит из мероморфных (p, q)−дифференциалов Прима $\phi = \phi(z)dz^q$на F_μ, кратных дивизору $D[\mu]$степени l.

Теорема 2.4.1. Для любых $g \geq 2$, дивизора $D = R_1 ... R_l$ на F_0, $l \geq 1$, векторное расслоение Прима $\mathbf{P}_1(1/D)$ является голоморфным векторным расслоением ранга $d = g - 1 + l$ над $\mathbf{T}_g$ х $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$.

Теорема 2.4.2. Для любых $g \geq 2$, дивизора $D = R_1 ... R_l$ на F_0, $l \geq 1$, $q \geq 2$, векторное расслоение Прима $\mathbf{P}_q(1/D)$является голоморфным векторным расслоением ранга $d = (2q-1)(g-1)+l$ над $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$.

Теорема 2.4.4. Векторное расслоение Прима $\mathbf{P}_q(D)$является эрмитовым голоморфным векторным расслоением ранга $d = (2q-1)(g-1)-l$ над $\mathbf{T}_g$ х $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$,если $g \geq 2, D = R_1 ... R_l$ на F_0, $q \geq 2$и выполнено условие $2(q-1)(g-1) > l \geq 1$.

Теорема 2.4.6. Для любых $g \geq 2, q \geq 2$ и дивизора $D \neq 1, degD = 0$ на F_0, эрмитовы голоморфные векторные расслоения $\mathbf{P}_q(D)$ и $\mathbf{P}_q(1)$ ранга $d = (2q-1)(g-1)$над $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ биголоморфно изоморфны.

Пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$ является неразветвленным накрытием для пространства Торелли Υ_g, а группа Торелли τ_g, являющаяся нормальной подгруппой модулярной группы Тейхмюллера, действует свободно, т.е. без неподвижных точек, на $\mathbf{T}_g$ [7]. При этом $\Upsilon_g = \mathbf{T}_g/\tau_g$. Все теоремы параграфов 2-4 главы 2 остаются верными, если в них пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$ заменить на пространство Торелли Υ_g, где $g \geq 2$.

В третьей главе дается описание расслоения Ганнинга для $g \geq 2$, вводится и изучается гармоническое векторное расслоение Прима из гармонических дифференциалов Прима на компактной римановой поверхностирода $g \geq 2$.

В параграфе 3.1 изучаются гармоническое векторное расслоение Прима, когомологическое расслоение Ганнинга и представления группы Торелли для фиксированной компактной римановой поверхности. Обозначим через $Z^1(\Gamma,\rho)$ для p € $Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi:\Gamma\to C$ таких, что

$$\phi(ST) \;=\; \phi(S)+\rho(S)\phi(T), S,T\in\Gamma.$$

Каждый элемент $\phi\in Z^1(\Gamma,p)$ будет единственно определяться упорядоченным набором комплексных чисел $\phi(A_1),...,\phi(A_g),\phi(B_1)...,\phi(B_g)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{j=1}^{g}\{\sigma(B_j)\phi(A_j)-\sigma(A_j)\phi(B_j)\}=0,$$

которое получается из соотношения $\Pi_{i=1}^{g}C_j=1$ в Г, где Cj — $[A_j,B_j]$— $A_jB_jA_i^{-1}B_i^{-1}\sigma(T)=1-\rho(T),T\in$ Г. Тогда $Z^1(\Gamma,\rho)$- комплексное векторное $(2g-1)-$**мерное** пространство для $p\neq 1$ (т. е. $\rho(S)\neq 1$ для некоторого S € Г) и $2g-$**мерное** пространство для $\rho=1$. Пусть B^1 (Г, p) - одномерное подпространство в $Z^1(\Gamma,p)$, порожденное элементом a. Тогда $H^1(\Gamma,\rho)=Z^1(\Gamma,\rho)/B^1(\Gamma,\rho)$- комплексное векторное $(2g-2)$ -мерное пространство для $\rho\neq 1$. Будем называть множество $G=\cup_{\rho\neq 1}H^1(\Gamma,\rho)$ когомологическим расслоением **Ганнинга** для поверхности F.

Голоморфный дифференциал Прима ϕ — $\phi(z)dz$для p, определенный на односвязном диске U, может быть записан в виде $\phi=df(z)$для подходящей голоморфной функции $f(z)$ (она называется интегралом Прима для дифференциала Прима ϕ на U). Следовательно,

$$f(Tz)=\rho(T)f(z)+\phi(T),$$

$\phi(ST)=\phi(S)+\rho(S)\phi(T)$,где $\phi(T)=f(Tz_0)-\rho(T)f(z_0)$Таким **образом**, отображение $\phi:T\to\phi(T)$, или отображение периодов $\phi:\Gamma\to C$ **отно**сительно интеграла Прима $f(z)$, есть элемент из $Z^1(\Gamma,\rho)$. Отображения периодов при различных интегралах Прима для одного и того же дифференциала Прима будут отличаться на элемент из $B^1(\Gamma,p)$. Поэтому **С-линейное** отображение р : $\phi\to[\phi]$ € $H^1(\Gamma$, р), которое дифференциал Прима ϕ переводит в его класс периодов $[\phi]$, корректно определено.

Отображение периодов $p:\Gamma(F,O^{1,0}(\rho))\to H^1(\Gamma,p)$ такое, что $\phi(z)dz\to p(\phi(z)dz)=[\phi]=\{\phi+c\sigma:c\in\mathbf{C}\}=\phi+B^1(\Gamma,\rho)$, будет **С−линейным** послойным **инъективным** отображением из $\mathbf{P}_{1,0}$ в G над $Hom(\Gamma,\mathbf{C}^*)\backslash L_g$.

Теорема 3.1.3. Последовательность голоморфных векторных расслоений и отображений

$$0 \to \mathbf{P}_{1,0} \xrightarrow{p} G \to G/\mathbf{P}_{1,0} \to 0$$

над $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash L_g$является точной при любом $g \geq 2$.

Множество всех гармонических дифференциалов Прима ϕ для $p \in Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ образует комплексное $(2g-2)$–мерное векторное пространство $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$ при $p \notin L_g \cup L_g$, так как

$$\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho)) = \Gamma(F, O^{1,0}(\rho)) \oplus \Gamma(F, O^{0,1}(\rho)),$$

где $\overline{L_g}$ - образ L_g при отображении $p \to p$.

Теорема 3.1.5. Эрмитово голоморфное векторное гармоническое расслоение Прима **HP**, образованное гармоническими дифференциалами Прима, ранга $2g - 2$ является прямой суммой ортогональных эрмитовых голоморфных $*$–**инвариантных** векторных **подрасслоений** $\mathbf{P}_{1,0}$ и РОДранга g - 1 над $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash (L_g \cup L_g)$ прилюбом $g \geq 2$.

Устанавливается, что образующим У. Ликориша для группы классов отображений поверхности F при $g > 2$ соответствуют невырожденные квадратные матрицы порядка $2g - 2$, имеющие простую структуру, а группа Торелли обладает большим классом нетривиальных представлений в группу матриц порядка $2g - 2$.

Ф. Прим, Р. Рост [32] начали построение теории гармонических и голоморфных интегралов Прима только для нормированных характеров фундаментальной группы компактной римановой поверхности. Дж. Кемпф [23] и Э. Джеблоу [21] получили ряд свойств периодов голоморфных дифференциалов Прима для нормированных характеров и для характеров, которые на половине образующих фундаментальной группы равны единице. В параграфе 3.2 изучаются классы периодов замкнутых, гармонических и голоморфных дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности любого рода $g \geq 2$ и для любых характеров ее фундаментальной группы.

Теорема 3.2.3. Если ϕ, ψ - замкнутые дифференциалы Прима на F класса C^∞ для ρ_1 и ρ_2 соответственно, то

$$\int\int_\Delta \phi \wedge \psi = \int_{\partial\Delta} h(z)\psi =$$

$$\sum_{j=1}^{g}[(1 - \rho_1\rho_2(B_j)) \int_{z_0}^{A_j z_0} h(z)\psi - (1 - \rho_1\rho_2(A_j)) \int_{z_0}^{B_j z_0} h(z)\psi] +$$

$$\sum_{j=1}^{g}\{[\phi(C_1...C_{j-1})(1-\rho_2(B_j))-\rho_2(B_j)(\phi(C_j)+\phi_h(B_j))]\int_{z_0}^{A_j z_0}\psi+$$

$$[(\rho_2(A_j)-1)\phi(C_1...C_{j-1})+\rho_2(A_j)\phi_h(A_j)-\phi(C_j)]\int_{z_0}^{B_j z_0}\psi\},$$

где A - фиксированная фундаментальная область для Г в $U; \phi = dh(z)$ на $U, h(Tz) = p(T)h(z) + \phi_h(T), T \in$ Г, причем это равенство инвариантно, относительно выбора интеграла $h(z)$ для ϕ с точностью до аддитивного слагаемого.

Из этой общей формулы для билинейного спаривания получаются, как частные случаи, все известные соотношения между периодами дифференциалов Прима, найденные Ф. Примом, Р. Ганнингом, Дж. Кемпфом и Е. Джеблоу.

Для гармонических дифференциалов Прима относительно нормированных характеров доказываются аналоги теорем Ходжа и де Рама, строятся канонические базисы из гармонических дифференциалов Прима, которые локально вещественно-аналитически зависят от характеров. Аналог теоремы Ходжа получен Э. Джеблоу в [21] с использованием сложной техники аналитических линейных расслоений на римановых поверхностях. Аналог теоремы де Рама получен ранее Р. Ганнингом в [14] с использованием когомологий с коэффициентами в пучках на *F.* Наше доказательство не требует такой сложной техники.

Устанавливается, что для существенных характеров голоморфные дифференциалы Прима однозначно определяются "половиной"своих базисных периодов. Строятся канонические базисы из голоморфных дифференциалов Прима, локально голоморфно зависящие от существенных характеров.

В параграфе 3.3 находятся некоторые свойства расслоений Прима и Ганнинга над пространством Тейхмюллера.

Теорема 3.3.1. Векторные расслоения Ганнинга *G* и Прима НР над $[S^1]^{2g}\backslash 1$ будут вещественно-аналитично изоморфными, и расслоение Ганнинга *G* над $[S^1]^{2g}\backslash 1$ равно прямой сумме двух вещественно-аналитических комплексных векторных подрасслоений ранга $g-1$ для любой компактной римановой поверхности *F* рода $g \geq 2$.

Из теоремы 3.2.3 вытекает, что условие

$$\sum_{j=1}^{g}[(1-\rho\overline{\rho}(B_j))\int_{z_0}^{A_j z_0} f(z) * \overline{df(z)} - (1-\rho\overline{\rho}(A_j))\int_{z_0}^{B_j z_0} f(z) * \overline{df(z)}] \neq 0$$

является некоторым коциклическим "препятствием"к взаимной однозначности отображения периодов $p : \Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho)) \to H^1(\Gamma, \rho)$ для $p \in [Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash (L_g \cup \overline{L_g})] \backslash [S^1]^{2g}$, где $\phi = df(z) \in d(C^\infty(F, \rho)) \cap \Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$.

С помощью леммы 2.2.2 введем расслоение Ганнинга G над $\mathbf{T}_g(F)$ х $(Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash 1)$ со слоем $H^1(\Gamma^\mu, \rho_\mu)$ над точкой $([F_\mu]; \rho)$.

Теорема 3.3.4. Когомологическое расслоение Ганнинга *G* является голоморфным векторным расслоением ранга $2g - 2$ над $\mathbf{T}_g(F)$ х $(Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash 1)$.

Из свойств отображения периодов $p : \mathbf{P}_{1,0} \to G$ получается

Теорема 3.3.5. Последовательность голоморфных векторных расслоений и отображений

$$0 \to \mathbf{P}_{1,0} \xrightarrow{p} G \xrightarrow{h} G/\mathbf{P}_{1,0} \to 0$$

над $\mathbf{T}_g(F)$ х $(Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash L_g)$ является точной для любого $g \geq 2$.

В главе 4 изучается векторное расслоение Прима над пространством Тейхмюллера, над пространством групп Кебе и над пространством гиперэллиптических римановых поверхностей.

Классическая теория униформизации компактных римановых поверхностей традиционно исследует либо поверхности с полным (каноническим) рассечением, либо с рассечением по минимальному набору петель, превращающим поверхность в область, подобную плоской области на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$. Это приводит к универсальной накрывающей и слабейшей плоской регулярной накрывающей (Шоттки) над компактной римановой поверхностью [29; 30; 17]. В [17] Д. А. Хейхал изучил пространства групп Шоттки, соответствующие слабейшей плоской регулярной накрывающей над компактной римановой поверхностью.

В параграфе 4.1 рассматриваются группы Кебе - группы преобразований наложения для любой промежуточной плоской регулярной накрывающей, и устанавливаются связи между пространством Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$ компактных римановых поверхностей данного рода, пространством $\mathbf{U}_{h,g-h}$ этих поверхностей с "неполным"отмечанием типа $(h, g - h)$ и пространством $\mathbf{V}_\sigma$ отмеченных групп Кёбе сигнатуры *a*, униформизирующих такие поверхности. Доказывается, что эти пространства являются областями голоморфности, а универсальным накрывающим пространством для них служит пространство Тейхмюллера. Построена диаграмма (9) из отображений

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{T}_g \arrow[dl, "\pi_{TV}"'] \arrow[d, "\pi_{TU}"] \arrow[dr, "\Phi_\sigma"] & \\
 & \mathbf{U}_{h,g-h} \arrow[dl, "\pi_{UV}"'] \arrow[dr, "\Phi_{U,\sigma}"] & \\
\mathbf{V}_\sigma \arrow[rr, leftrightarrow, "\Phi_{V,\sigma}"'] & & \mathbf{Q}_\sigma (\subset \mathbf{C}^{3g-3}).
\end{tikzcd}$$

В предположениях: $g \geq 2$, $a \neq (0,2,0,...,0)$, $i_k \neq 1, k = 1,...,p$, доказывается

Теорема 4.1.10. Существует единственный способ задания топологий в $\mathbf{U}_{h,g-h}$ и в $\mathbf{V}_\sigma$, при которых диаграмма (9) является коммутативной диаграммой накрывающих отображений. При этом отображение $\Phi_{V,\sigma}$ - гомеоморфизм, а слои $\Phi^{-1}_{U,\sigma}(x)$ и $\Phi^{-1}_\sigma(x)$, *для* каждого $x \in \mathbf{Q}_\sigma$, счетны.

В параграфе 4.2 дается определение мероморфных автоморфных форм Прима для групп Кебе фиксированной сигнатуры, связанных со стандартными (по классификации Б. Маскита) униформизациями компактных римановых поверхностей. Вводятся векторные расслоения Прима из таких $q-$форм над пространством Тейхмюллера, над пространством компактных римановых поверхностей с "неполным"отмечанием и над пространством отмеченных групп Кебе. Кроме того, строится базис мероморфных автоморфных $(\rho, q)-$форм Прима, кратных заданному дивизору, для групп Кебе фиксированной сигнатуры, который голоморфно зависит от модулей компактных римановых поверхностей и от характеров. Получаются аналоги всех теорем из параграфов 2.2 и 2.4 для векторных расслоений Прима над этими пространствами.

Л.В.Альфорс [1] доказал, что существует единственная комплексно-аналитическая структура S на $\mathbf{T}_g$, совместимая с топологией Тейхмюллера, относительно которой матрица из $b-$периодов для канонического базиса голоморфных абелевых дифференциалов будет голоморфна. Она проектируется, в силу локальной гомеоморфности всех отображений, в комплексно-аналитическую структуру на $\mathbf{U}_{h,g-h}$, $\mathbf{Q}_\sigma$ и $\mathbf{V}_\sigma$. При этом все отображения в диаграмме становятся голоморфными.

Мероморфной автоморфной (ρ, q)–формой Прима $\widehat{\phi} = \widehat{\phi}(\zeta)d\zeta^q$ для клейновой группы G называется мероморфная функция $\widehat{\phi}(\zeta)$ на области разрывности $\Omega(G)$ группы G такая, что она удовлетворяет условию

$$\widehat{\phi}(T\zeta)[T'(\zeta)]^q = \rho(T)\widehat{\phi}(\zeta), \zeta \in \Omega(G), T \in G.$$

В главе 2 были построены *(p, q)*$-$дифференциалы Прима вида $\phi = f\omega, (\phi) \geq D_\mu$, на переменной компактной римановой поверхности F_μ с модулями $[\mu] \in \mathbf{T}_g$, которые голоморфно зависят от $[\mu]$ и от *p*. После подъема ϕ по $\pi_\mu : \Delta_{\mu,\sigma} \to F_\mu$ на $\Delta_{\mu,\sigma}$ получим мероморфную автоморфную (ρ, q)–форму Прима $\widehat{\phi}$ для отмеченной группы Кебе $G_{\mu,\sigma}$ на инвариантной компоненте $\Delta_{\mu,\sigma}$. Если $\phi_1 - f_1\omega, ..., \phi_d = f_d\omega$ - базис (ρ, q)–дифференциалов Прима на $F_\mu, (\phi_j) \geq D_\mu, j = 1, ..., d$, который задается голоморфными функциями на расслоенном пространстве Берса $B\widetilde{V}_g$ над $\mathbf{T}_g$ x $Hom_\sigma(\Gamma, \mathbf{C}^*)$, то их поднятия $\widehat{\phi}_1, ..., \widehat{\phi}_d$ на $\Delta_{\mu,\sigma}$ также задаются голоморфными функциями на расслоенном пространстве Берса-Кебе $BK\widetilde{V}_g(\sigma)$ над $\mathbf{Q}_\sigma$ x $Hom_\sigma(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{C}^*)$. Таким образом получаем базис автоморфных *(p, q)*$-$форм Прима на $\mathbf{P}_{\sigma,q}(D)$, который голоморфно зависит от модулей $[\mu]$ компактной римановой поверхности и от характера *p,* над $\mathbf{Q}_\sigma$ x $Hom_\sigma(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{C}^*)$.

Л.Берс, К. Эрл, И. Кра [10; 27], Д.А. Хейхал [17] и многие другие авторы, используя метод А.Пуанкаре, строили базис голоморфных автоморфных форм веса $q \geq 1$, относительно специальных клейновых групп (Шоттки, квазифуксовы и конечно порожденные клейновы группы) только для $p = 1$ или для нормированных характеров *p,* через тэта-ряды Пуанкаре. Наш подход, nо-существу, является возвратом к идеям Ф.Клейна : строить мероморфные (ρ, q)–дифференциалы Прима, кратные заданному дивизору, сразу на компактной римановой поверхности, а затем поднимать их на любую накрывающую поверхность для компактной римановой поверхности.

В параграфе 4.3 дается конструктивный выбор базиса голоморфных абелевых дифференциалов любого порядка на гиперэллиптических римановых поверхностях, и строится базис голоморфных *(p, q)* — дифференциалов Прима, с учетом специфики таких поверхностей, голоморфно зависящий от произвольных характеров и от точек ветвления гиперэллиптических римановых поверхностей. Обозначим через $\mathbf{H}_g$ множество классов конформной эквивалентности отмеченных гиперэллиптических римановых поверхностей рода $\partial \geq 2$. Тогда $\mathbf{H}_g \subset \mathbf{T}_g$. Построенные в главе 2 базисы для векторных расслоений Прима $\mathbf{P}_q(1)$, из голоморфных (ρ, q)–дифференциалов Прима, над $\mathbf{T}_g$ x $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ можно сразу ограничить на подмногообразие $\mathbf{H}_g$ и получить таким образом аналоги предложения 2.2.4, теорем 2.2.5, 2.2.6, заменив $\mathbf{T}_g$ на $\mathbf{H}_g$, хотя $\mathbf{H}_g$ уже не будет односвязным.

Однако, учитывая две конкретные реализации для гиперэллиптических римановых поверхностей, можно вместо базиса Берса взять явный базис $\omega_1, ..., \omega_d$ абелевых голоморфных $q-$дифференциалов из теоремы 4.3.2. Этот базис будет голоморфно зависеть от точек ветвления в реализации таких поверхностей. Кроме того, нужные, для построения базиса голоморфных (р, q)–дифференциалов Прима, мультипликативные функции fj , $j - 1, ..., d$, для p можно выразить через явный канонический базис голоморфных абелевых дифференциалов $\zeta_1, \cdots, \zeta_g$ и через явные нормированные абелевы дифференциалы TPQ третьего рода с простыми полюсами в P и Q на F с вычетами +1 и -1 соответственно. При этом такие мультипликативные функции будут голоморфно зависеть от характеров и от точек ветвления гиперэллиптических римановых поверхностей.

При алгебро-геометрическом решении уравнений математической физики большую роль играют голоморфные дифференциалы Прима на гиперэллиптических римановых поверхностях для характеров ρ_0, удовлетворяющих условию $\rho_0^2 = 1$.

Следствие **4.3.3.** Векторное расслоение Прима $\mathbf{P}_q(1)$, из голоморфных (ρ_0, q)-дифференциалов Прима, над $\mathbf{T}_g$ x ρ_0 (и над $\mathbf{H}_g$ x ρ_0) будет аналитически эквивалентно тривиальному векторному расслоению над этой базой. Таким образом, существуют глобальные голоморфные сечения из голоморфных (ρ_0, q)–дифференциалов Прима над $\mathbf{T}_g$ (и над $\mathbf{H}_g$), где $q \geq 1$, $\rho_0^2 = 1$.

В главе 5 изучаются проективные структуры и группы монодромии линейных дифференциальных уравнений на компактной римановой поверхности.

В параграфе **5.1** исследуются группы монодромии для линейно-полиморфных функций на компактных римановых поверхностях рода $g \geq 2$, в связи со стандартной униформизацией этих поверхностей клейновыми (разрывными) группами. Униформизация (Δ, G) для компактной римановой поверхности F называется стандартной, если естественная проекция $\pi : \Delta \to F$ является плоской регулярной неразветвленной накрывающей [29]. Проективной структурой на F называется атлас из карт на F, у которого отображения соседства будут дробно-линейными отображениями [13].

Определение 5.1.1. Локально мероморфная (многозначная) функция z на F, ветви которой преобразуются дробно-линейно относительно действия группы $\pi_1(F, O)$, называется линейно-полиморфной функцией на F.

Поднятая на (U, π) линейно-полиморфная функция z на F является мероморфной (однозначной) функцией $z = z(t)$ на U такой, что

$$z(At) = \tilde{A}z(t), t \in U, A \in \Gamma,$$

где $p(A) — \tilde{A} \in PSL(2, C)$ - группа дробно-линейных преобразований $\overline{C}$. Поэтому определен гомоморфизм $p : \Gamma \to PSL(2, \mathbf{C})$. И. Кра [26] назвал эту функцию (Γ, p)—деформацией фуксовой группы Γ в U, а Р. Ганнинг [13] - реализацией (разверткой) неразветвленной проективной структуры на F. Для теории функций более подходящим представляется термин линейно-полиморфная функция, принятый в работе Д.А.Хейхала. К тому же, он согласован с исторической традицией, идущей от А. Пуанкаре, П. Аппеля и Э. Гурса [6].

Из теории пространств Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$ [1] известно, что существует гомеоморфизм переводящий $m = [F_\tau, \{a_k(\tau), b_k(\tau)\}_{k=1}^g] \in \mathbf{T}_g$ в группу Γ_τ из пространства нормированных отмеченных фуксовых групп на U. Поэтому можно писать $\Gamma_\tau = \{A_1(\tau), \dots, B_g(\tau) : \prod_{j=1}^g [A_j(\tau), B_j(\tau)] = 1\}$. Пусть z - линейно-полиморфная функция на $F_\tau = U/\Gamma_\tau$, тогда для мероморфной функции $z = z(t)$ на U имеем $z(At) = \tilde{A}z(t), A \in \Gamma_\tau$, $\tilde{A} \in PSL(2, C)$. Отображение $A \to \tilde{A}$ называется гомоморфизмом монодромии. Оно определяет отмеченную группу монодромии

$$\mathcal{M}[z] = \{\tilde{A}_1(\tau), \dots, \tilde{B}_g(\tau) : [\tilde{A}_1(\tau), \tilde{B}_1(\tau)] \dots [\tilde{A}_g(\tau), \tilde{B}_g(\tau)] = 1\},$$

т.е. $\mathcal{M}[z]$ есть точка в $[PSL(2, \mathbf{C})]^{2g}$.

Теорема 5.1.2. Пусть $w = w(t)$ - локально однолистная линейно-полиморфная функция на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$. Тогда $w = w(t)$ является униформизацией F, если и только если выполняются условия: 1) $w(U) \neq \overline{C}$, 2) $w(U)/\mathcal{M}[w]$- компактная поверхность рода g.

Следствие 5.1.3. Пусть $w = w(t)$ - локально однолистная линейно-полиморфная функция на отмеченной компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ такая, что $\mathcal{M}[w]$ - отмеченная группа Кёбе сигнатуры $\sigma = (h; s; i_1, \dots, i_m)$, $|\sigma| = g$ Если $w(U) \neq C$, то $w — w(t)$ - униформизация F группой Кёбе сигнатуры σ.

Следствие 5.1.3 показывает, что, как и классическая проблема униформизации фуксовыми группами, проблема выбора присоединённых параметров для любой стандартной униформизации компактной римановой поверхности группами Кёбе имеет единственное решение, если линейно-полиморфная функция w имеет "ограниченный"образ круга, т.е. $w(U) \neq \overline{\mathbb{C}}$. Следствие 5.1.3 включает в себя, как частные случаи, теоремы 3 и 5 из работы Д.А. Хейхала [18] для фуксовой группы и для групп Шоттки соответственно. Кроме того, получаем примеры групп монодромии, которые алгебраически устроены, как отмеченные группы Кёбе, но на $w(U)$ они действуют неразрывно.

В этом параграфе также исследуется отображение монодромии p : $\mathbf{T}_g Q \to \mathcal{M}$, где $\mathbf{T}_g Q$ - векторное расслоение из голоморфных квадратичных абелевых дифференциалов над пространством Тейхмюллера компактных римановых поверхностей рода g, $\mathcal{M}$ - пространство отмеченных групп монодромии для рода g. Д.А. Хейхал в [18] показал, что отображение p не обладает свойством поднятия путей над $\mathcal{M}$, но над частью $\mathcal{M}_q$, соответствующей квазифуксовым униформизациям, оно обладает этим свойством. Естественно, представляет интерес нахождение частей пространства $\mathcal{M}$, над которыми отображение p обладает этим свойством. В конце параграфа доказывается, что над любым пространством квазиконформных деформаций группы Кебе сигнатуры $\sigma = (h, s, i_1, \ldots, i_m)$, связанной со стандартной униформизацией компактной римановой поверхности рода g, отображение p обладает свойством поднятия путей.

В работе Д.А. Хейхала [19] начато исследование группы монодромии для линейно-полиморфных функций на компактной римановой поверхности с помощью вариационных методов. Он нашел первую вариацию для группы монодромии. Затем К. Эрл [8] вывел формулу первой вариации с помощью квазиконформных отображений римановых поверхностей.

В параграфе 5.2 находится точная вариационная формула для группы монодромии линейного дифференциального уравнения второго порядка и первая вариация для решения уравнения Шварца на компактной римановой поверхности.

Функция $2q(t) = \{z, t\} - (z''/z')' - \frac{1}{2}(z''/z')^2$ удовлетворяет соотношениям $q(t) - q(Lt)L'(t)^2$ для $L \in \Gamma, t \in U$. Следовательно, $q(t)$ задает квадратичный дифференциал на $F = U/\Gamma$.

Рассмотрим уравнение Шварца

$$\{z,t\} = 2[r(t) + \sum_{j=1}^{d} h_j q_j(t)]$$

и линейное уравнение

$$u''(t) + [r(t) + \sum_{j=1}^{d} h_j q_j(t)]u(t) = 0$$

на $F = U/\Gamma$,где $q_1(t)dt^2, ..., q_d(t)dt^2$ - базис в пространстве *Q(F)* голоморфных квадратичных дифференциалов, $r(t)dt^2 \in Q(F), h = (h_1, ...,$ *hd)* $\in \mathbf{C}^d, d = 3g-3$• Будем рассматривать только нормированные решения *z(t, h)* и *v(t, h)*, $u(t,$ *h)* для любого *h* такого, что $|h| = max_{1\leq j\leq g}|h_j| <$ ε, ε - достаточно малое положительное число. Получим вариационную формулу для решения уравнения Шварца

$$z(t,h) = z(t,0) + \sum_{j=1}^{d} h_j \int_{t_0}^{t} q_j(s)[v(s) - z(t,0)u(s)]^2 ds + o(|h|), |h| \to 0,$$

а также точную вариационную формулу для элементов группы монодромии $\mathcal{M}[z]$

$$\begin{pmatrix} \alpha_L(h) & \beta_L(h) \\ \gamma_L(h) & \delta_L(h) \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{|k|=1} A_{0;k}(Lt_0)h^k + \sum_{|k|=2} A_{1;k}(Lt_0)h^k + ...$$

$$+ \sum_{|k|=n} A_{n-1;k}(Lt_0)h^k + ...\} \begin{pmatrix} \alpha_L(0) & \beta_L(0) \\ \gamma_L(0) & \delta_L(0) \end{pmatrix},$$

где

$$A_{n;(k_1,...,k_d)}(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{1\leq j\leq d, k_j\neq 0} A_{n-1;(k_1,...,k_j-1,...,k_d)}(s)M_j(s)ds,$$

$$n \geq 1, k_j \geq 0, k = (k_1, ..., k_d), |k| = k_1 + ... + k_d, h^k = h_1^{k_1}...h_d^{k_d},$$

$$M_j(s) = q_j(s)\begin{pmatrix} -u(s)v(s) & v^2(s) \\ -u^2(s) & u(s)v(s) \end{pmatrix}, A_{0;k}(t) = \int_{t_0}^{t} M_j(s)ds,$$

при $k = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, символ 1 стоит на j - том месте.

Вариационные формулы показывают, как зависит группа монодромии и решение уравнения Шварца от присоединенных (аксцессорных) параметров $(h_1, \ldots, h_d)$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту профессору А.Д. Медных за постоянную дружескую поддержку и конструктивные обсуждения основных результатов диссертации.

Список литературы

[1] Альфорс Л.В., Берс Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения//Москва. ИЛ., 1961.

[2] Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений// М.-Л. ГИТТЛ, 1950.

[3] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.2// Москва. Наука, 1985.

[4] Appell P. Generalisation des fonctions doublement periodiques de seconde espece// J. de Math. Pures et Appliquees (Ser.3). 1883. V. 9. P. 5 - 24.

[5] Appell P. Sur les integrates de fonctions a multiplicateurs et leur application an developpement des fonctions abeliennes en series trigonometriques // Acta Math. 1890. V.13, N 3/4. P. 1 - 174.

[6] Appell P., Goursat E., Fatou P. Theorie des fonctions algebriques// Chelsea Publish. Company. New-York, 1976.

[7] Earle C.J. Teichmueller theory// Discrete groups and automorhpic functions. Proc. the London Math. Soc.(ed. by Harvey W.J.). Academic Press, 1977. P. 143 - 162.

[8] Earle C.J. On variation of projective structures// Annals of Math. Stud. New-York. 1981. N 97. P. 87 - 99.

[9] Earle C.J., Kra I. Half-canonical divisors on variable Riemann surfaces// J. Math. Kyoto Univ. 1986. V. 26, N 1. P. 39 - 64.

[10] Earle C.J., Kra I. Positive divisors and Poincare's series on variable Riemann surfaces// Tohoku Math. Jour. 1987. V. 39. P. 429 - 436.

[11] Farkas H.M., Kra I. Riemann surfaces //Grad. Text's Math. 1992. V. 71. New-York. Springer.

[12] Fay J. Analytic Torsion and Prym differential// Proc. of the 1978 Stony Brook Conf. 1980. Princeton Univ. Press. P. 107 - 122.

[13] Gunning R.C. Special coordinate coverings of Riemann surfaces// Math. Ann. 1967. V. 170. P. 67 - 86.

[14] Gunning R.C. Riemann surfaces and generalized theta functions// Ergebnisse Math. Bd. 91. Berlin, 1976.

[15] Gunning R.C. On the period classes of Prym differentials// J. Reine Angew. Math. 1980. N. 319. P. 153 - 171.

[16] Haupt 0. Zur theorie der Prymschen Funktionen 1 und N Ordnung// Math. Ann. 1916. V. 77, N 1. S. 24 - 64.

[17] Hejhal D.A. On Schottky and Teichmueller space//Adv. in Math. 1975. V. 15, N 2. P. 133 - 160.

[18] Hejhal D.A. Monodromy groups and linearly polymorphic function// Acta Math. 1975. V. 135:1-2. P. 1 - 55.

[19] Hejhal D.A. The variational theory of linearly polymorphic functions// J. d'Analyse Math. 1976. V. 30. P. 215 - 264.

[20] Hejhal D.A. Kernel functions, Poincare series and LVA// Contemporary Math. 2000. V. 256. P. 173 - 201.

[21] Jablow E An analogue of the Rauch variational formula for Prym differentials// Israel J. of Math. 1989. V. 65, N 3. P. 323 - 355.

[22] Jorgensson J. Analytic torsion for line bundle on Riemann surface// Duke Math. J. 1991. V. 62, N 3. P. 527 - 549.

[23] Kempf G. A property of the periods of a Prym differential// Proc. of the Amer. Math. Soc. 1976. V.54. P. 181 - 184.

[24] Koenig R. Zur arithmetischen Theorie der auf einem algebraischen Gebilde existierenden Funktionen// Ber. der Verh. Saechs. Ges. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl. 1916. V. 63. S. 348 - 368.

[25] Kra I. Deformation of Fuchsian groups// Duke Math. J. 1969. V. 36. P. 537 - 546.

[26] Kra I. Remarks on projective structures// Annals of Math. Stud. New-York. 1981. N 97. P. 343 - 359.

[27] Kra I. On the vanishing of and spanning sets for Poincare' series for cusp form// Acta Math. 1984. V. 153. P. 47 - 116.

[28] Maskit B. Uniformization of Riemann surface // Discontinuous groups and Riemann surfaces. Ann. of Math. Studies. N 79. New-York. Acad. Perss., 1974. P. 293 - 312.

[29] Maskit B. On the classification of Kleinian groups. I - Koebe groups// Acta Math. 1975. V. 135, N 3-4. P. 249 - 271.

[30] Maskit B. On the classification of Kleinian groups. II - Signatures// Acta Math. 1977. V. 138, N 1-2. P. 17 - 42.

[31] Petersson H. Ueber eine metrisierung der automorphen Formen im die Theorie der Poincareschen Reinen// Math. Ann. 1940. V. 117, N 4. S. 453 - 457.

[32] Prym F., Rost G. Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluss an die Schoepfungen Riemann's// Leipzig. Teubner, 1911.

Основные результаты исследования опубликованы в следу ющих работах:

[33] Чуешев В.В. О некоторых подмногообразиях пространств групп Кебе// Докл. АН СССР. 1978. Т.243, N 3. С. 588 - 591.

[34] Чуешев В.В. Пространства Шоттки типа (g,s,m)// Сибирск. матем. журн. 1979. Т. 20, N 3. С. 632 - 640.

[35] Чуешев В.В. Пространства компактных римановых поверхностей и групп Кебе// Сибирск. матем. журн. 1981. Т. 22, N 5. С. 190 - 205.

[36] Чуешев В.В. Конформные автоморфизмы компактных римановых поверхностей// Сибирск. матем. журн. 1982. Т. 23, N 6. С. 196 - 197. Деп. в ВИНИТИ, N. 1120-82. 21 с.

[37] Чуешев В.В. Отображение монодромии для компактных римановых поверхностей// Сибирск. матем. журн. 1983. Т. 24, N 3. С.216. Деп. в ВИНИТИ, N. 6533-82. 12 с.

[38] Чуешев В.В. Вариационные формулы для группы монодромии// Тез. докл. на Всесоюз. конф. по теории функций, посвящ. 100-ю со дня рожд. Н.Н.Лузина. 10-19 сент. 1983 г. Кемерово. 1983. С. 129.

[39] Чуешев В.В. Точная вариационная формула для группы монодромии на компактной римановой поверхности// "Теория функций и ее приложения". Межвузовский сборник научных трудов, посвящ. 100-ю со дня рожд. Н.Н.Лузина. Кемерово. 1985. С. 23 - 28.

[40] Чуешев В.В. Когомологическое расслоение Ганнинга над компактной римановой поверхностью// Тез. докл. Всесоюзного семинара "Актуальные вопросы комплексного анализа". Ташкент. 1985. С. 116 - 117.

[41] Чуешев В.В. Когомологическое расслоение Ганнинга и группа Торелли// Сибирск. матем. журн. 1990. Т. 31, N 3. С. 198 - 203.

[42] Чуешев В.В. Плоские модели для компактных римановых поверхностей с циклическими группами конформных автоморфизмов// "Геометрия и Анализ". Межвузовский сборник научных трудов. Кемерово. КемГУ. 1991. С. 8 - 13.

[43] Чуешев В.В. Расслоение Прима и Ганнинга над пространством Тейхмюллера// Тез. докл. Всесоюзной Воронежской конф. Понтрягинские чтения-4, посвящ. 85-летию со дня рожд. Л.С. Понтрягина. 1993. С. 203

[44] Chueshev V.V. Harmonic and holomorphic Prym differential on compact Riemann surface// Preprint 96 - 099. 1996. Universitaet Bielefeld. Germany. 14 S.

[45] Чуешев В.В. Гармонические и голоморфные дифференциалы Прима на компактной римановой поверхности// Сибирск. матем. журн. 1999. Т.40, N 2. С. 465 - 475.

[46] Чуешев В.В., Койнова О.А. Топологические и аналитические свойства группы характеров компактной римановой поверхности// Вестник КемГУ. 2000. В.4. С. 251 - 260.

[47] Чуешев В.В. Векторные расслоение Прима и расслоение Ганнинга над пространством Тейхмюллера// Сибирск. матем. журн. 2001. Т.42, N 4. С. 937 - 951.

[48] Чуешев В.В. Периоды гармонических дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности// Сибирск. матем. журн. 2002. Т. 43, N 4. С. 937 - 952.

[49] Чуешев В.В. Пространства мероморфных q-дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности и тэта-функция Римана// Вестник НГУ. 2002. Т. 2, В.1. С. 85 - 114.

[50] Chueshev V.V. Multiplicative Weierstrass points// Second Russian-German Geometry Meeting dedicated to 90-anniversary of A.D. Alexandrov. POMI. S.-Petersburg. May-June 2002. P. 15 - 16.

[51] Чуешев В.В. Базис мероморфных q−дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности// Тез. докл. Всероссийской конференции "Математические методы в механике", посвящ. 70-летию член-корр. РАН В.Н. Монахова, август 2002. АлтГУ, Барнаул, С. 34 - 35.

[52] Чуешев В.В. Базис пространств мероморфных дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности и группы Кебе// Вестник НГУ. 2002. Т. 2, В. 2. С. 78 - 107.

[53] Чуешев В.В., Якубов Э.Х. Мультипликативные точки Вейерштрасса на компактной римановой поверхности// Сибирск. матем. журн. 2002. Т. 43, N 6. С. 1408 - 1429.

[54] Чуешев В.В., Койнова О.А. Плоские модели для компактных римановых поверхностей с двупорожденными группами конформных автоморфизмов// Вестник НГУ. 2002, Т.2, В.3. С. 11 - 27.

[55] Чуешев В.В. Мультипликативные точки Вейерштрасса и многообразие Якоби компактной римановой поверхности// Тез. докл. Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы". Воронеж. Воронеж. гос ун-т. 2003. С. 280-282.

[56] Чуешев В.В. Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности, Ч. 2// Кемерово. КемГУ, 2003. 248 с.