На правах рукописи

Порецков Олег Александрович

Алгоритмы и методы вычисления первого регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с негладким потенциалом на единичной двумерной сфере

05.13.18. - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Челябинск – 2003

Работа выполнена на кафедре математического анализа Магнитогорского государственного университета.

Научные руководители: доктор физико-математических наук,
профессор **В.В. Дубровский**

кандидат физико-математических наук,
доцент **С.И. Кадченко**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Г.А. Свиридюк**

доктор физико-математических наук,
профессор **Ю.И. Сапронов**

Ведущая организация: **Новгородский государственный университет им. Я. Мудрого.**

Защита диссертации состоится 23 апреля 2003 года в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.296.02 по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук при Челябинском государственном университете по адресу 454021, г. Челябинск, ул. Бр. Кашириных, 129, ЧелГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Челябинского государственного университета.

Автореферат разослан «__»______________2003 года

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук **Л.Б. Соколинский**

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Исследование спектральных свойств дифференциальных операторов в частных производных является одной из важнейших задач общей спектральной теории линейных операторов. Эта область обязана своим развитием конкретным задачам физики, химии, биологии и других естественных наук. Так при рассмотрении колебаний мембраны и трехмерных упругих тел мы приходим к простейшим задачам на собственные значения для многомерных дифференциальных операторов. Эти задачи возникают также в теории оболочек, гидродинамике и других разделах механики. Богатейшим источником задач спектральной теории является квантовая механика. Следы операторов играют важную роль в различных разделах анализа, в вопросах приближенного вычисления собственных значений, при решении обратных задач спектрального анализа, их изучение представляет и самостоятельный интерес.

Работы Г. Вейля и Э.Ч. Титчмарша явились причиной появления огромного количества работ, связанных с исследованием распределения собственных значений многомерных дифференциальных операторов с дискретным спектром. Сформировались два основных метода получения асимптотики спектра. Первый из них - вариационный принцип. Он был существенно развит М.Ш. Бирманом и его школой. Преимущество вариационного принципа в том, что он не столь чувствителен, как другие методы, к гладкости коэффициентов, границы области и т.п. С другой стороны, он не дает достаточно точных оценок в асимптотике собственных чисел. Второй метод называется резольвентным. Он связан с изучением резольвенты рассматриваемого оператора или другой функции от него с последующим использованием тауберовых теорем. С этим методом связаны наибольшие достижения последних лет в области спектральных асимптотик.

Обозначим через $N(\lambda)$ число (с учетом кратности) собственных значений дискретного оператора T, не превосходящих λ. Исследованию асимтотического поведения функции $N(\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty$ посвящено большое количество работ. В работах Г. Вейля был получен главный член $N(\lambda)\sim a\lambda^{n/m}$ без оценки остаточного члена. Здесь m - порядок оператора T, а n - размерность многообразия, на котором он действует. Им же была доказана гипотеза о существовании второго члена асимптотики $N(\lambda)$ (связанного с граничными условиями, если речь идет о многообразиях с краем).

В случае, когда $N(\lambda)$ имеет «кластерную асимптотику», невозможно улучшение остаточного члена, более того, невозможно даже выделение из остаточного члена второго члена асимптотики. И, поскольку, дальнейшее изучение асимптотического поведения спектра, по сути, невозможно, необходимо перейти к исследованию другим методом. Стандартным инструментом такого исследования асимптотического поведения спектра является получение формул регуляризованных следов оператора.

Регуляризованным следом порядка a оператора $T + P$ назовем равенство вида

$$\sum_{n}(\beta_n^{\alpha} - A_k(T)) = B, \tag{1}$$

где $\alpha\in C$, а $A_k(T)$, B - явно выражаются через характеристики оператора T.

Первая формула такого вида для обыкновенных дифференциальных операторов была получена в 1953 году И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном[1], где в качестве T рассматривался оператор Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. К аналогичным результатам пришел в этом же году Л.А. Дикий, используя, правда несколько иные методы. Получению формул регуляризованных следов для обыкновенных дифференциальных операторов были посвящены работы И.М. Гельфанда, М.Г. Гасымова и Б.М. Левитана, Р.Ф. Шевченко, А.Г. Костюченко, В.А. Садовничего и многих других. Наиболее общие результаты для обыкновенных дифференциальных операторов получены В.Б. Лидским, В.А. Садовничим, В.А. Любишкиным и В.Е. Подольским.. Так, в работах В.А. Садовничего, В.Б. Лидского[2], рассматривался класс K целых функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z)=\sum_{k=0}^{N-1} e^{a_k z} P_k(z),$$

где $P_k(z)$ разлагаются в асимптотические ряды при $z \to \infty$:

$$P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{v=0}^{\infty} \beta_v^{(k)}, \quad \beta_v^{(k)} \neq 0$$

Функции этого вида возникают при рассмотрении краевых задач для дифференциальных уравнений со спектральным параметром z. В выражения для регуляризованных сумм входят члены асимптотики $w_{k+1}^{(s)}$ из разложения

$$\alpha_s + \frac{P_s'(z)}{P_s(z)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k^{(s)}}{z^k}.$$

[1] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР, 1953, 88, с. 593 - 596.

[2] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляри«званные суммы корнсй одного класса пелых функций// Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т. I. №2 С. 52-59.

В этих работах авторы активно использовали теорию аналитических функций, благодаря которой им удалось сформулировать решение для широкого класса операторов. Ими было установлено, что доказательство формул типа (1) для широкого класса краевых задач, порожденных обыкновенными дифференциальными выражениями на конечном отрезке со сложным вхождением спектрального параметра, сводится к изучению регуляризованных сумм корней целых функций с определенной асимптотической структурой.

Введем следующие обозначения. Пусть $T = -\Delta = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ — стандартный оператор Лапласа-Бельтрами на единичной двумерной сфере S^2, действующий в гильбертовом пространстве $H = L_2(S^2)$ функций, интегрируемых с квадратом по мере Хаара $\sin\theta d\varphi d\theta$ (φ,θ - сферические координаты); $\lambda_n = n(n+1)$, $n = \overline{0,\infty}$ – собственные числа оператора T, $\nu_n = 2n+1$ - кратность собственного числа λ_n, $V_{n,i}$, $i = \overline{0,2n}$ - собственные функции оператора T, которые образуют систему ортонормированных сферических функций. Далее, пусть P - оператор умножения на комплексную функцию $p(\varphi,\theta)$. Обозначим через $\mu_{n,i}$, $i = \overline{0,2n}$ - собственные числа оператора $T+P$, взятые с учетом алгебраической кратности, такие, что $|\mu_{n,i} - n(n+1)| \le const$.

Ситуация значительно осложняется при рассмотрении задач, порожденных дифференциальными операторами в частных производных. Это связано прежде всего со сложной структурой спектра. Так например,

V. Guillemin[3] детально изучил спектр оператора $-\Delta+P$ на симметрическом пространстве M с гладким потенциалом, и показал, в частности, что оценка $|\mu_{k,i}-\lambda_{k,i}|=O(1)$ $i=\overline{1,N_k}$, получаемая методами теории возмущений, не может быть улучшена для вещественнозначной $p\neq const$ для всех M, за исключением сферы S^n. Здесь $\lambda_{k,i}$ - собственные числа оператора $-\Delta$, а $\mu_{k,i}$ - собственные числа возмущенного оператора $-\Delta+P$. Для S^n показано, что эта оценка может быть улучшена лишь для нечетных р (т.е. $p(\tau x)=-p(x)$ для каждого $x\in S^n$, где r - антиподальное отображение) до $|\mu_{k,i}-\lambda_{k,i}|=O\left(\frac{1}{k}\right)$ $i=\overline{1,N_k}$ и О можно заменить на о только для $p\equiv 0$.

Таким образом, для асимптотического распределения собственных чисел оператора $-\Delta+P$ получены окончательные результаты. И поскольку, дальнейшее изучение асимптотического поведения спектра по сути невозможно, необходимо перейти к исследованию более тонкой структуры спектра - получению формул регуляризованных следов. При этом даже для обыкновенных дифференциальных операторов, следы являются, вообще говоря, расходящимися, и возникает задача их регуляризации.

Один из подходов - суммирование следов со скобками - был впервые реализован для обыкновенных дифференциальных операторов В.А. Садовничим, В.А. Любишкиным и М. Мартиновичем[4]. Следующее существенное продвижение в этой проблеме было сделано В.А. Садовничим

---

[3] Guillemin V. Some spectral results on rank one symmetric spaces. // Adv in Math., 1978, 28, p. 129-137.
[4] Садовничий В.А., Любншкин В.А., Мартинович М. Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов. // ДАН СССР. 1987. 293. № 5, с. 1062-1064.

и В.В. Дубровским[5], в их работе был рассмотрен оператор Лапласа-Бельтрами $-\Delta + P$, возмущенный нечетным гладким вещественнозначным потенциалом р на двумерной единичной сфере S^2. Позднее в работе тех же авторов было предложено подробное доказательство формулы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}\lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1)\right) = -\frac{1}{24\pi}\int_{S^2}[\Delta(p)+3p^2]\,ds.$$

Далее эта формула была уточнена, а В.Е. Подольским были получены аналогичные формулы для любых степеней собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на компактных симметрических пространствах.

Из абстрактных результатов отметим полученные в диссертации В.В. Дубровского формулы суммирования со скобками регуляризованных следов дискретных операторов, для собственных чисел которых имеет место асимптотика $\lambda_k = O(k^{1+\varepsilon})$ при $k \to +\infty$ и $\varepsilon > 0$.

Другой подход - суммирование по Абелю. В.А. Любишкиным и В.Е. Подольским[6] была предложена формула суммирования методом Абеля первых регуляризованных следов эллиптических дифференциальных операторов порядка $m > 0$ на римановом многообразии размерности n. Существенным ограничением работы было условие $m/n > 1$, снятое затем для компактных симметрических пространств. Отметим, что суммирование методом Абеля впервые применялось В.Б. Лидским в вопросах разложения по собственным функциям некоторых обыкновенных дифференциальных операторов.

---

[5] Садовничий В.А., Дубровский В.В. Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на сфере. // ДАН СССР, 1991, 319, № 1, с. 61 - 62.

[6] Любишкин В.А., Подольский В.Е. О суммируемости регуляризованных следов дифференциальных операторов. // Матем. заметки. 1993, 53, № 2, с. 33-38.

Еще можно указать на результаты А.Н. Боброва[7] по получению регуляризованных следов для псевдодифференциальных операторов, действующих на компактных многообразиях без края, и на результаты по получению формул следов для дифференциальных операторов в частных производных, связанные либо с исследованием ограниченных возмущений точно решаемых методом разделения переменных модельных задач, либо с особенностями геометрии рассматриваемых пространств (следы оператора Лапласа на фундаментальных областях дискретных групп преобразований). Однако во всех вышеперечисленных работах существенным ограничением является то, что потенциал p является бесконечно дифференцируемой функцией.

Целью диссертации является разработка алгоритмов вычисления регуляризованных следов для оператора Лапласа-Бельтрами на единичной двумерной сфере с негладким потенциалом. В работе рассмотрены два случая негладкого потенциала - в первом случае потенциал p является дважды непрерывно дифференцируемой функцией; а во втором случае потенциал удовлетворяет неравенству Липшица по двум переменным. Для каждого случая впервые были проанализированы поправки теории возмущений и доказана абсолютная сходимость ряда $\sum_{k,l}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}\mu_{ki} - k(k+1)(2k+1)\right)$. Составлены алгоритмы и программы вычисления регуляризованных следов. При вычислении следов использовались методы, разработанные академиком В.А. Садовничим и его учеником В.В. Дубровским.

---

[7] Бобров А.Н. Регуляризованные следы высших порядков оператора Лапласа с потенциалом на симметрических пространствах ранга 1. //Дифф. уравнения. 1997, 33. № 6, с. 800-804.

Научная новизна.

1. Доказана абсолютная сходимость первого регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с дважды непрерывно дифференцируемым потенциалом на двумерной сфере.
2. Создан алгоритм вычисления первого регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с дважды непрерывно дифференцируемым потенциалом на двумерной сфере.
3. Доказана абсолютная сходимость первого регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на двумерной сфере, удовлетворяющим условию Липшица.
4. Разработан алгоритм вычисления первого регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на двумерной сфере, удовлетворяющим условию Липшица.
5. Написана программа, производящая вычисления поправок теории возмущений и регуляризованных следов.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в работе результаты имеют как теоретический, так и практический интерес. Решена задача вычисления первого регуляризованного следа для оператора Лапласа-Бельтрами в случае негладкого потенциала на единичной двумерной сфере. Результаты диссертации имеют завершенный характер. Они могут быть эффективно использованы в математической физике.

Методы исследования. Для решения указанных выше задач используются методы функционального анализа, спектрального анализа линейных операторов, теории возмущений. Основными методами диссертации стали методы, разработанные научной школой академика

Садовничего В.А., с помощью которых удалось создать алгоритмы вычисления первого регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с негладким потенциалом на единичной двумерной сфере.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на Международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели» (Челябинск 2002), 39 Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск 2001), а также на научно-практической конференции вузов Уральской зоны «Проблемы математического образования в педагогических ВУЗах на современном этапе» (Челябинск 2001). Результаты данного исследования обсуждались на научно-исследовательских семинарах под руководством профессора В.В. Дубровского (МГПИ, 1998-2002).

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 печатных работах. В совместных работах В.А. Садовничему и В.В. Дубровскому принадлежит постановка задач. Получение конкретных результатов принадлежит диссертанту.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и изложена на 107 страницах. Список литературы содержит 103 наименования, включая работы автора.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, определяются цели работы, дается обзор литературы по исследуемой проблематике, кратко излагаются результаты диссертации.

В первой главе рассмотрены общие **вопросы,** касающиеся **римановых** многообразий, оператора **Лапласа-Бельтрами,** спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве. Здесь сформулированы теоремы о свойствах спектра и собственных значениях. Для ядерных операторов сформулированы важные для дальнейших доказательств теоремы, характеризующие их спектральные свойства.

Во второй главе получен алгоритм вычисления первого **регуляризованного** следа для оператора Лапласа-Бельтрами с дважды непрерывно дифференцируемым потенциалом на единичной двумерной сфере.

В параграфе 2.1 доказаны оценки сверху числовых рядов, которые используются при оценке третьей поправки теории возмущений $\beta_n(p)$.

В параграфе 2.2 проанализирована третья поправка теории возмущений для оператора $T+P$ и получен следующий результат: $\beta_n(p)=O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Эта оценка необходима для доказательства абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{t=0}^{2k}\mu_{kt}-k(k+1)(2k+1)\right)$.

В параграфе 2.3 изложены основные результаты второй главы. Сначала доказана абсолютная сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{t=0}^{u}\mu_{kt}-k(k+1)(2k+1)\right)$, сформулирован алгоритм вычисления регуляризованного следа для оператора T+P в случае дважды непрерывно дифференцируемого потенциала и получена его формула.

Теорема 1. *Если p - комплексная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, то для собственных чисел оператора T+P верно равенство*

$$\sum_{i=0}^{2n}\mu_{n,i}-(n^2+n)(2n+1)-c_n=O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right),$$

где $c_n=\dfrac{2n+1}{4\pi}\iint\limits_{S^2}p(\varphi,\theta)\sin\theta\,d\varphi d\theta.$

Теорема 2. *Если p – дважды непрерывно дифференцируемая, вообще говоря, комплексная функция, то для собственных чисел оператора T+P справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{2k}\mu_{k,i}-k(k+1)(2k+1)-c_k\right]=\frac{1}{16\pi^3}\iint\limits_{S^2}\iint\limits_{S^2}\frac{p(\varphi,\theta)p(\varphi_1,\theta_1)\sin\theta\sin\theta_1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}d\varphi d\theta d\varphi_1 d\theta_1-$$

$$-\frac{1}{8\pi}\iint\limits_{S^2}p^2(\varphi,\theta)\sin\theta\,d\varphi d\theta,$$

где $c_k=\dfrac{2k+1}{4\pi}\iint\limits_{S^2}p(\varphi,\theta)\sin\theta\,d\varphi d\theta,\quad \cos\alpha=\cos\theta\cos\theta_1+\sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi-\varphi_1)$

Причем ряд сходится абсолютно.

В третьей главе, состоящей из трех параграфов, получен алгоритм вычисления регуляризованного следа для оператора T+P в случае, когда потенциал удовлетворяет условию Липшица по двум переменным.

В параграфе 3.1 проанализирована вторая поправка теории возмущений для оператора $T+P$ и получен следующий результат: $\alpha_n(p)=O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Эта оценка необходима для доказательства абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{2k}\mu_{ki}-k(k+1)(2k+1)\right)$.

В параграфе 3.2 проанализирована третья поправка теории возмущений для оператора $T+P$ и получен следующий результат: $\beta_n(p)=O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Эта оценка также необходима для доказательства абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}\mu_{ki}-k(k+1)(2k+1)\right)$.

К параграфе 3.3 изложены основные результаты третьей главы. Сначала доказана абсолютная сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{2k}\mu_{ki}-k(k+1)(2k+1)\right)$, затем сформулирован алгоритм вычисления первого регуляризованного следа для оператора T+P в случае, когда потенциал удовлетворяет условию Липшица по двум переменным и получена его формула.

Теорема 3. *Если p - комплексная функция, удовлетворяющая условию Липшица по двум переменным, то для собственных чисел оператора $T+P$ верно равенство*

$$\sum_{i=0}^{2n}\mu_{n,i}-\left(n^2+n\right)(2n+1)-c_n=O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right),$$

$$\text{где}\quad c_n=\frac{2n+1}{4\pi}\iint_{S^2}p(\varphi,\theta)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$$

Теорема 4. *Если p - комплексная функция, удовлетворяющая условию Липшица по двум переменным, то для собственных чисел оператора $T+P$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{2k}\mu_{k,i}-k(k+1)(2k+1)-c_k\right]=$$

$$=\frac{1}{16\pi^3}\iint_{S^2}\iint_{S^2}\frac{p(\varphi,\theta)\,p(\varphi_1,\theta_1)\sin\theta\sin\theta_1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}d\varphi d\theta d\varphi_1 d\theta_1-\frac{1}{8\pi}\iint_{S^2}p^2(\varphi,\theta)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta,$$

$$\text{где}\quad c_k=\frac{2k+1}{4\pi}\iint_{S^2}p(\varphi,\theta)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta,\quad \cos\alpha=\cos\theta\cos\theta_1+\sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi-\varphi_1)$$

Причем ряд сходится абсолютно.

В параграфе 3.4 разработан программный продукт, представленный в Приложении, который позволяет вычислять поправки теории возмущений. Приведены результаты вычисления второй поправки теории возмущений.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям доктору физ.-мат. наук, проф. В.В. Дубровскому и канд. физ.-мат. наук, доценту С.И. Кадченко за постоянное внимание и поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

1. Садовничий В.А., Дубровский В.В., Порецков О.А. Формула первого регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с негладким потенциалом на двумерной сфере. // Докл. РАН, 2002, 382, № 1, с. 11-14.

2. Порецков О.А. Леммы для числовых рядов. // Магнитогорский государственный университет. Министерство образования России. Магнитогорск, 2001. Депонировано в ВИНИТИ 30.03.01 № 823 - В2001, 16 с.

3. Порецков О.А. Анализ третьей поправки теории возмущений. // Магнитогорский государственный университет. Министерство образования России. Магнитогорск, 2001. Депонировано в ВИНИТИ 30.03.01 № 824 - В 2001, 7 с.

4. Порецков О.А. Формула первого регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на двумерной сфере. // Магнитогорский государственный университет. Министерство образования России. Магнитогорск, 2001. Депонировано в ВИНИТИ 30.03.01 № 822 - В 2001, 5 с.

5. Садовничий В.А., Дубровский В.В., Порецков О.А. Формула первого регуляризованного следа оператора Лапласа-Бельтрами с негладким потенциалом на двумерной сфере. // Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели: Тез. докл. междунар. науч. конф., 4 - 8 февр., 2002, Челябинск: Челяб. гос. университет, 2002.132 с.

6. Порецков О.А. Формула первого регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа-Бельтрами. // Материалы XXXIX Междунар. науч. студенч. конф. "Студент и научно-технический прогресс": Математика, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 2001. - 167 стр.