На правах рукописи

Фоминых Евгений Анатольевич

НОРМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2003

Работа выполнена на кафедре компьютерной топологии и алгебры Челябинского государственного университета

Научный руководитель: член-корреспондент РАН,
доктор физико–математических наук,
профессор С. В. Матвеев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор И. А. Тайманов

кандидат физико–математических наук,
доцент В. В. Чуешев

Ведущая организация: Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова

Защита состоится «5» июня 2003 г. в 15^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.03. в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск—90, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "25" апреля 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук А.С. Романов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ[1]

Актуальность темы. Теория нормальных поверхностей Хакена играет важную роль в топологии трехмерных многообразий. С одной стороны, она лежит в основе таких знаменитых алгоритмов, как алгоритмы распознавания тривиального узла [1], расщепляемости зацепления в трехмерной сфере [2], распознавания многообразия Хакена [3]. С другой стороны, нормальные поверхности допускают удобное числовое описание, что выделяет их среди множества всех поверхностей в многообразиях.

Метод Хакена описания нормальных поверхностей состоит в следующем. Каждой нормальной поверхности сопоставляется вектор с целыми неотрицательными координатами, определяемый пересечением поверхности с ручками индекса 0. При этом по своему вектору нормальная поверхность восстанавливается однозначно. Каждый такой вектор является решением конечной системы 8 линейных однородных уравнений; эта система зависит только от разбиения многообразия на ручки. С другой стороны, далеко не каждое целое неотрицательное решение системы S реализуется нормальной поверхностью. Поэтому множество $\mathcal{N}$ всех поверхностей в компактном трехмерном многообразии, нормальных по отношению к заданному разбиению многообразия на ручки, относительно операции сложения образует частичный коммутативный моноид (здесь под моноидом мы понимаем аддитивную полугруппу с нулевым элементом). Минимальный набор образующих этого моноида составляют фундаментальные поверхности $F_1, \dots, F_k$. Векторы, отвечающие этим поверхностям, нельзя представить в виде суммы двух нетривиальных целых неотрицательных решений системы S. Известно [1], что множество фундаментальных поверхностей конечно и может быть построено алгоритмически. Таким образом, моноид $\mathcal{N}$ нормальных поверхностей состоит из линейных комбинаций $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i F_i$ фундаментальных поверхностей с целыми неотрицательными коэффициентами. Здесь стоит отметить два существенных упрощения метода Хакена [4], [5] за счет более простого вида уравнений и резкого

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке фондами РФФИ (02-01-01013, 03-01-06036), Минобразования (Б02-1.0-146) и программы "Университеты России" (04.01.033).

уменьшения числа неизвестных системы.

Однако, не смотря на важность, структура моноида нормальных поверхностей оставалась практически не исследованной. В явном виде фундаментальные поверхности найдены только в нескольких самых простых случаях. Кроме того, совершенно не изучена операция сложения. Поскольку каждая нормальная поверхность допускает несколько различных разложений в сумму фундаментальных поверхностей, важное значение приобретают как описание канонического разложения, так и алгоритм его нахождения.

Существенное развитие теории нормальных поверхностей произошло при построении алгоритма распознавания сферы S^3. В 1992 году Х. Рубинштайн анонсировал существование такого алгоритма, а в 1994 году А. Томпсон [6] (см. также [7]) полностью реализовала его идеи. Как оказалось, метод Хакена не работает в этом случае. В основе алгоритма лежит понятие почти нормальной поверхности. Эти поверхности, по-видимому, сыграют важную роль для (пока не построенного) алгоритма вычисления рода Хегора (см. [8]). Отметим, что неисследованные вопросы теории нормальных поверхностей остаются открытыми и в теории почти нормальных поверхностей.

Цель работы. Выделим две основные цели данной диссертации. Первая цель состоит в изучении структуры моноида нормальных поверхностей для некоторых бесконечных серий стандартно разбитых на ручки трехмерных многообразий. Вторая цель — явное геометрическое описание связных почти нормальных поверхностей для тех же самых серий многообразий.

Методика исследования. Для изучения нормальных поверхностей привлекаются стандартные методы маломерной топологии, метод Хакена. Также используются теория сложности трехмерных многообразий и классические результаты о гомеоморфизмах тора.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и соответствуют проблематике данного раздела топологии. Они состоят в следующем:

1. Получено полное геометрическое описание структуры частичных моноидов нормальных поверхностей для трех бесконечных серий стандартно разбитых на ручки трехмерных многообразий: линзовых пространств, обобщенных пространств кватернионов и многообразий Столлингса со слоем проколотый тор (теорема 1.4). В частности, в явном виде найдены фундаментальные поверхности (теорема 1.2), определено каноническое разложение нормальной поверхности в сумму фундаментальных поверхностей (теорема 1.3), построен алгоритм нахождения канонического разложения.

2. Получено полное описание всех связных почти нормальных поверхностей для трех вышеуказанных бесконечных серий стандартно разбитых на ручки трехмерных многообразий (теоремы 3.1, 2.1 и 2.2).

3. Получена полная классификация трехмерных многообразий, имеющих симметричный цепной спайн (теорема 3.1). Эта классификация интересна как сама по-себе, так и с точки зрения теории сложности многообразий [4].

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут быть использованы учеными различных университетов и институтов, в том числе математиками Московского, Новосибирского, Санкт-Петербургского государственных университетов, Математического института РАН им. В.А. Стеклова, Петербургского отделения Математического института РАН, Математического института СО РАН им. С.Л. Соболева.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова на семинарах под руководством академика РАН А. Т. Фоменко, профессора А. С. Мищенко. Кроме того, результаты работы в качестве докладов были представлены на Международных конференциях "Маломерная топология и комбинаторная теория групп" (Челябинск, 1999 и Луттах, Италия, 2001), "Топология и динамика — Рохлинский мемориал", посвященной 80-летию со дня рождения В.А. Рохлина (Санкт-Петербург, 1999), "Математическая логика, алгебра и теория множеств", посвященной 100-летию со дня рождения П.С. Новикова (Москва, 2001), "Second Russian-German geometry meeting", посвященной 90-летию со дня рождения А.Д. Александрова. (Санкт-Петербург, 2002).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [10]–[17].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и библиографии. Она изложена на 66 страницах, библиография содержит 28 наименований. Нумерация теорем, лемм и т.п. в каждой главе своя.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю С.В. Матвееву за постановку задачи и всестороннюю помощь в работе.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 посвящена описанию всех нормальных поверхностей в трехмерных многообразиях, заданных симметричными цепными спайнами.

В параграфе 1.1 определяются разбиения трехмерных многообразий на ручки, индуцированные их специальными спайнами. Двумерный полиэдр P называется *простым,* если линк каждой его точки гомеоморфен окружности, окружности с диаметром или окружности с тремя радиусами. Объединение точек первого типа состоит из нескольких связных двумерных многообразий, которые называются *2-компонентами* полиэдра P. Оставшиеся точки образуют *особый граф* полиэдра P, причем точки третьего типа называются его *вершинами*. Простой полиэдр называется *специальным,* если он имеет хотя бы одну вершину и все его 2-компоненты являются клетками. Специальный полиэдр $P \subset M$ называется специальным спайном трехмерного многообразия M, если либо $\partial M \neq 0$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0,1]$, либо $\partial M = 0$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно открытому шару.

Каждый специальный спайн P многообразия M порождает его разбиение ξ_P на ручки следующим образом: нужно каждую вершину, ребро, 2-компоненту полиэдра P заменить соответственно на ручку индекса 0 (шар), ручку индекса 1 (балку), ручку индекса 2 (плитку). Если M имеет край, то разбиение на ручки построено. Если же многообразие M замкнуто, то дополнение к объединению ручек индексов $0, 1, 2$ образует единственную ручку индекса 3.

В параграфе 1.2 дается полное описание всех связных нормальных поверхностей, а также всех фундаментальных поверхностей, в многообразиях, содержащих только так называемые уравновешенные поверхности (см. ниже). Пусть F — нормальная поверхность в M, E — балка разбиения ξ_P. Обозначим через $y_i(E)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, число дисков в пересечении этой поверхности с тремя плитками, примыкающими к балке E. Будем говорить, что нормальная поверхность F *уравновешена на балке E,* если среди чисел y_1, y_2, y_3 нет строго максимального. Другими словами, для некоторой перестановки π чисел $1, 2, 3$ должно выполняться соотношение $y_{\pi(1)} = y_{\pi(2)} \geqslant y_{\pi(3)}$.

Определение. *Нормальная поверхность $F \subset M$ называется* уравновешенной, *если она уравновешена на каждой балке разбиения ξ_P.*

Приведем два важных примера уравновешенных поверхностей: связная подповерхность спайна (тип I) и край регулярной окрестности отличного от двусторонней поверхности связного простого подполиэдра спайна (тип II). Следующая теорема дает полное описание связных нормальных поверхностей в многообразиях, содержащих только уравновешенные поверхности.

Теорема 1.1. *Пусть P — специальный спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Если любая нормальная поверхность в M является уравновешенной, то непустая нормальная поверхность $F \subset M$ связна тогда и только тогда, когда она имеет тип 1* или тип *//.*

Пусть C(P) $= \{P_1, \ldots, P_k\}$ – множество всех непустых связных простых подполиэдров специального спайна P трехмерного многообразия M. Обозначим через $\mathcal{N}(P)$ множество всех поверхностей в M, нормальных по отношению к разбиению ξ_P. Построим отображение $\Psi\colon \mathcal{C}(P) \to \mathcal{N}(P)$следующим образом. Если $S \in \mathcal{C}(P)$ — подповерхность спайна P, то S — нормальная поверхность типа I, и мы полагаем $\Psi(S) = S$. Если же $S \in \mathcal{C}(P)$ — простой подполиэдр с непустым множеством особых точек, то в качестве $\Psi(S)$ мы берем край его малой регулярной окрестности, т.е. нормальную поверхность типа II. Следующая теорема содержит полное описание множества всех фундаментальных поверхностей — порождающих частичного моноида $\mathcal{N}(P)$.

Теорема 1.2. ***Пусть** P - **специальный** спай» трехмерного **многообразия** M и ξ_P - отвечающее ему разбиение на ручки. Если **любая** нормальная поверхность в M является уравновешенной, то отображение Φ определяет **биекцию** множества $\mathcal{C}(P)$ на множество всех фундаментальных поверхностей многообразия M.*

В параграфе 1.3 определяется каноническое разложение нормальной поверхности в сумму фундаментальных поверхностей для многообразий, содержащих только уравновешенные поверхности. Формальная линейная комбинация $x_1P_1 + \ldots + x_kP_k$, где все x_i — целые неотрицательные числа, называется *допустимой,* если для любых $x_i \neq 0, x_j \neq 0$ полиэдр $P_i \cap P_j$ является **простым**. Обозначим через $\mathcal{L}(P)$ множество всех допустимых комбинаций. Так как сумма допустимых комбинаций не обязана быть допустимой, то множество $\mathcal{L}(P)$ является частичным коммутативным моноидом относительно естественной операции сложения линейных комбинаций. При этом $\mathcal{C}(P)$ — минимальная система порождающих этого частичного моноида. Оказывается (предложение 1.1), что если любая нормальная поверхность в M является уравновешенной, то отображение $\Psi : \mathcal{C}(P) \to \mathcal{N}(P)$ продолжается по линейности до сюръективного гомоморфизма $\Psi: \mathcal{L}(P) \to \mathcal{N}(P)$ частичных моноидов. Другими словами, каждая допустимая комбинация $L = x_1P_1 + \ldots + x_kP_k$ задает разложение $\Psi(L) = x_1\Psi(P_1) + \ldots + x_k\Psi(P_k)$ нормальной поверхности $\Psi(L)$ в сумму фундаментальных поверхностей $\Psi(P_1), \ldots, \Psi(P_k)$. Более того, допустимые комбинации параметризуют все возможные разложения нормальных поверхностей в сумму фундаментальных (разумеется, одна и та же поверхность может иметь много таких разложений).

Теперь определим каноническое разложение нормальной поверхности. Для этого введем понятие сложности допустимой комбинации. *Сложностью* комбинации $L = x_1P_1 + \ldots + x_kP_k \in \mathcal{L}(P)$ будем называть число

$$c(L) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} x_i x_j \delta(P_i, P_j),$$

где $\delta(P_i, P_j) = 0$, если $P_i \subseteq P_j$, или $P_j \subseteq P_i$, или $P_i \cap P_j = \emptyset$, и $\delta(P_i, P_j) = 1$ в остальных случаях.

Обозначим через $\mathcal{L}_0(P) \subset \mathcal{L}(P)$ множество всех допустимых комбинаций сложности 0, а через Ψ_0 — сужение отображения Ψ на $\mathcal{L}_0(P)$. Оказывается, что множество $\mathcal{L}_0(P)$ параметризует множество всех нормальных поверхностей.

Теорема 1.3. *Пусть P — специальный* спайн *трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Если любая нормальная поверхность в M является уравновешенной, то отображение $\Psi_0 : \mathcal{L}_0(P) \to \mathcal{N}(P)$ биективно.*

Итак, для каждой нормальной поверхности F найдется единственная комбинация $LF = x_1 P_1 + \ldots + x_k P_k$ сложности 0, такая, что $\Psi(L_F) = F$. Тем самым, для поверхности F определено каноническое разложение $F = x_1 \Psi(P_1) + \ldots + x_k \Psi(P_k)$ в сумму фундаментальных поверхностей.

В параграфе 1.4 определяется бесконечная серия специальных спайнов, для которых справедливы теоремы 1.1 - 1.3. Более того, строится эффективный алгоритм нахождения канонического разложения нормальной поверхности в сумму фундаментальных поверхностей.

Незамкнутой цепочкой будем называть регулярный граф степени 4, состоящий из двух петель и нескольких двойных ребер. Если все ребра регулярного графа степени 4 являются двойными, то такой граф называется *замкнутой цепочкой*. Под *звеном* цепочки понимается либо петля, либо двойное ребро графа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Специальный полиэдр P называется* симметричным цепным полиэдром, *если он удовлетворяет трем условиям:*

1) особый граф полиэдра P есть замкнутая или незамкнутая цепочка;

2) граничная кривая каждой 2-компоненты полиэдра P проходит по ребрам как минимум двух звеньев цепочки;

3) существует инвариантная на каждой 2-компоненте инволюция *полиэдра P, которая (а) неподвижна на вершинах цепочки, (б) имеет ровно одну неподвижную точку внутри каждой петли, (в) переставляет ребра каждого звена цепочки.*

Предложение 1.2. *Пусть P — симметричный* цепной спайн *трехмерного многообразия* M *и* ξ_P *— отвечающее ему разбиение на* ручки. *Тогда любая нормальная поверхность в M является уравновешенной.*

Пусть P — симметричный цепной спайн трехмерного многообразия M и $\mathcal{C}(P) = \{P_1, \ldots, P_k\}$ — множество всех его непустых связных простых подполиэдров. Далее в этом параграфе вводится элементарное преобразование μ, состоящее в замене одной допустимой комбинации ненулевой сложности на другую допустимую комбинацию, имеющую меньшую сложность (лемма 1.6). Следующий алгоритм нахождения канонического разложения нормальной поверхности в сумму фундаментальных поверхностей является прямым следствием предложения 1.2, теоремы 1.2, предложения 1.1 и теоремы 1.3.

Алгоритм. *Пусть дано разложение* $F = x_1\Psi(P_1) + \ldots + x_k\Psi(P_k)$ *нормальной поверхности F в сумму фундаментальных поверхностей. Будем применять преобразование* μ *к допустимой комбинации* $x_1P_1 + \ldots + x_kP_k$ *до тех пор, пока это возможно. Так как каждое преобразование уменьшает сложность комбинации, этот процесс закончится после конечного числа преобразований. В результате мы получим допустимую комбинацию* $z_1P_1 + \ldots + z_kP_k$ *сложности 0. Тогда* $F = z_1\Psi(P_1) + \ldots + z_k\Psi(P_k)$ *- искомое каноническое разложение.*

Зададим на множестве $\mathcal{L}_0$(P) частичную операцию $\oplus$. Пусть $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_0(P)$. Будем считать, что сумма $L_1 \oplus L_2$ определена тогда и только тогда, когда в частичном моноиде $\mathcal{L}(P)$ определена сумма $L_1 + L_2$. При этом полагаем $L_1 \oplus L_2$ есть результат применения максимального числа преобразования μ к комбинации $L_1 + L_2$. Следующую теорему можно рассматривать как полное описание частичного моноида нормальных поверхностей для многообразий, заданных симметричными цепными спайнами.

Теорема 1.4. *Пусть P — симметричный цепной спайн трехмерного многообразия M и* ξ_P *— отвечающее ему разбиение на ручки. Тогда множество* $\mathcal{L}_0(P)$ *с операцией* $\oplus$ *является частичным коммутативным моноидом, изоморфным частичному моноиду* $\mathcal{N}(P)$ *нормальных поверхностей, а отображение* Ψ_0 *— соответствующий изоморфизм.*

Глава 2 посвящена описанию всех связных почти нормальных поверхностей в трехмерных многообразиях, заданных симметричными цепными спайнами.

В параграфе 2.1 приводится классификация связных почти нормальных поверхностей с октагоном. Опишем два важных примера таких поверхностей.

1) Пусть симметричный цепной спайн P, его непустая подповерхность 5 и его 2-компонента а таковы, что: (а) *a* не лежит в 5; (б) ее граничная кривая да проходит по ребрам только двух звеньев цепочки с одной общей вершиной. Возьмем в каждой плитке D^2 x *I* разбиения ξ_P, пересекающей поверхность S, один диск D^2 x $\{x_1\}$, а в плитке C_α, отвечающей 2-компоненте а, возьмем два диска вида D^2 x $\{x_1, x_2\}$, где x_1, x_2 — различные внутренние точки отрезка *I.* Оказывается, выбранный набор дисков в плитках продолжается до почти нормальной поверхности с октагоном. Будем говорить, что построенная таким образом поверхность имеет тип III.

2) Пусть *P* — симметричный цепной спайн, особый граф которого есть незамкнутая цепочка с п вершинами. Выберем такое вложение незамкнутой цепочки в XY-плоскость $\mathbb{R}^2$, что сужение на цепочку отражения плоскости относительно оси *OX* является инволюцией, которая неподвижна на вершинах цепочки и имеет ровно одну неподвижную точку внутри каждой петли. Последовательно пронумеруем все звенья цепочки числами $0, 1, \dots, n$, начиная с самого левого звена. Сопоставим каждой 2-компоненте 7 спайна *P* два числа. Первое число $l(\gamma)$ есть наименьший номер звена, по ребрам которого проходит граничная кривая $\partial\gamma$, второе число $r(\gamma)$ — соответственно наибольший. Пусть непустая подповерхность *S* спайна *P* и его 2-компонента β таковы, что: (а) β не лежит в S; (б) $r(\beta) - l(\beta) > 1$. Это означает, что граничная кривая $\partial\beta$ проходит по ребрам трех последовательных звеньев цепочки с номерами $l(\beta)$, $l(\beta) + 1$, $l(\beta) + 2$. Поэтому для каждой 2-компоненты 7 спайна P, отличной от 2-компоненты β, выполняется ровно одно из двух условий: либо $r(\gamma) \leqslant l(\beta) + 1$, либо $l(\gamma) \geqslant l(\beta) + 1$. Для каждой 2-компоненты $\gamma \subset S$ возьмем в отвечающей ей плитке D^2 x I разбиения ξ_P три диска вида D^2 x $\{x_1, x_2, x_3\}$, если $l(\gamma) \geqslant l(\beta) + 1$, и один диск D^2 x $\{x_1\}$, если $r(\gamma) \leqslant l(\beta) + 1$, где x_1, x_2, x_3 — различные внутренние точки

отрезка I. Аналогично, возьмем два диска $D^{\tilde{}}$ х $\{x_1, x_2\}$ в плитке, отвечающей 2-компоненте β. Далее, выберем произвольное (возможно пустое) подмножество Г множества всех 2-компонент спайна P так, что каждая 2-компонента $\gamma' \in$ Г не лежит в 5 и $l(\gamma') > r(\beta)$. Затем, в каждой плитке, отвечающей 2-компоненте из Г, также возьмем два диска D^2 х $\{x_1, x_2\}$. Легко показать, как и в случае поверхности типа III, что выбранный набор дисков в плитках продолжается до почти нормальной поверхности с октагоном. Будем говорить, что построенная таким образом поверхность имеет тип IV.

Теорема **2.1.** *Пусть P — симметричный цепной спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Тогда:*

1) если особый граф спайна P есть замкнутая цепочка, то любая связная почти нормальная поверхность с октагоном в многообразии M имеет тип III;

2) если особый граф спайна P есть незамкнутая цепочка, то любая связная почти нормальная поверхность с октагоном в многообразии M имеет тип III или тип IV.

В параграфе 2.2 приводится классификация связных почти нормальных поверхностей с трубкой. Опишем три важных примера таких поверхностей. Пусть P — симметричный цепной спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки.

ПРИМЕР 1. Пусть G — непустой простой подполиэдр спайна Р и $\alpha \subset G$ — одна из его 2-компонент. Обозначим через $F(G)$ нормальную поверхность, которая ограничивает некоторую регулярную окрестность полиэдра G в многообразии M. Заметим, что если полиэдр G является двусторонней поверхностью, то нормальная поверхность $F(G)$ состоит из двух параллельных копий поверхности G. Если же полиэдр G имеет особые точки или является односторонней поверхностью, то $F(G)$ — нормальная поверхность типа II. Поверхность $F(G)$ пересекает плитку, отвечающую 2-компоненте a, по двум дискам. Заменяя эти два диска в плитке на незаузленную трубку с тем же краем, мы получим почти нормальную поверхность.

ПРИМЕР 2. Пусть непустая замкнутая подповерхность S и отличный от двусторонней поверхности непустой простой подполиэдр K спайна P таковы, что $S \subseteq K$. Тогда поверхность S является нормальной поверхностью типа I, а полиэдр K определяет нормальную поверхность $F(K)$ типа II — край его регулярной окрестности. Выберем произвольную 2-компоненту $\alpha \subset S$ и, в отвечающей ей плитке C_α разбиения ξ_P, фиксируем структуру прямого произведения $D^2 \times I$. Нормальная поверхность $S+F(K)$ пересекает плитку C_α по трем дискам вида $D^2 \times \{x_1, x_2, x_3\}$. Поскольку $S \subseteq K$, поверхности S и $F(K)$ можно реализовать в многообразии M без пересечения. Отсюда следует, что $S \cap C_\alpha = D^2 \times \{x_2\}$ и $F(K) \cap C_\alpha = D^2 \times \{x_1, x_3\}$. Заменяя два диска $D^2 \times \{x_2\}$ и $D^2 \times \{x_i\}$, $i = 1$ или 3, на незаузленную трубку с тем же краем, мы получим почти нормальную поверхность.

ПРИМЕР 3. Пусть непустые простые подполиэдры K_1 и K_2 спайна P таковы, что $K_1 \subseteq K_2$ и каждый из них не является двусторонней поверхностью. Тогда полиэдр $K_j, j = 1,2$, определяет нормальную поверхность $F(K_j)$ типа II. Выберем произвольную 2-компоненту $\alpha \subset K_1$ и, в отвечающей ей плитке C_α разбиения ξ_P, фиксируем структуру прямого произведения $D^2 \times I$. Нормальная поверхность $F(K_1)+F(K_2)$ пересекает плитку C_α по четырем дискам вида $D^2 \times \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Поскольку $K_1 \subseteq K_2$, поверхности $F(K_1)$ и $F(K_2)$ можно реализовать в многообразии M без пересечения. Отсюда следует, что $F(K_1) \cap C_\alpha = D^2 \times \{x_2, x_3\}$ и $F(K_2) \cap C_\alpha = D^2 \times \{x_1, x_4\}$. Заменяя два диска $D^2 \times \{x_i\}$ и $D^2 \times \{x_{i+1}\}$, $i = 1$ или 3, на незаузленную трубку с тем же краем, мы получим почти нормальную поверхность.

Оказывается, что других связных почти нормальных поверхностей с трубкой в указанных многообразиях нет.

Теорема 2.2. *Пусть P — симметричный цепной спайн трехмерного многообразия M и ξ_P — отвечающее ему разбиение на ручки. Тогда любая связная* почти *нормальная поверхность с трубкой в многообразии M нормально изотопна одной из поверхностей, перечисленных в примерах 1-3.*

Итак, в главах 1, 2 мы описали нормальные и почти нормальные поверхности в многообразиях, заданных симметричными цепными спайнами. Глава 3 посвящена полному описанию этого класса трехмерных многообразий.

Напомним, что $L_{p,q}$ и S^3/Q_{4n}обозначают линзовое пространство с параметрами p, q и факторпространство сферы S^3 по линейному действию обобщенной группы кватернионов $Q_{4n} =< x, y \mid x^2 = (xy)^2 = y^{2n} >$. Пусть h: То $\to T_0$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм проколотого тора T_0 (т.е. тора с удаленным открытым диском) на себя. Многообразием Столлингса со слоем. T_0 и отображением монодромии h называется многообразие, полученное из прямого произведения ТО х I отождествлением каждой точки $(x, 0) \in T_0 \times \{0\}$ с точкой $(h(x), 1) \in T_0 \times \{1\}$.

Следующая теорема описывает все трехмерные многообразия, задаваемые симметричными цепными спайнами.

Теорема 3.1. *Трехмерное ориентируемое многообразие M имеет симметричный цепной спайн тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1. $M = L_{p,q}$, где $p \geqslant 4$;

2. $M = S^3/Q_{4n}$,где $n \geqslant 2$;

3. M является многообразием Столлингса со слоем проколотый тор и сохраняющим ориентацию гиперболическим отображением монодромии.

В параграфе 3.2 мы применяем полученное в главе 1 полное описание множества нормальных поверхностей в многообразиях с симметричными цепными спайнами для наглядного доказательства следующего хорошо известного факта [9]:

Линзовое пространство $L_{p,q}$ содержит вложенную бутылку Клейна тогда и только тогда, когда $p = 4k$, $q = 2k - 1$, где k — натуральное число.

Список литературы

[1] **Haken W.** *Theorie der Normalflächen. Ein Isotopiekriterium für der Kreisknoten.* Acta. Math. 1961. V. 105. P. 245-375.

[2] **Шуберт Х.** *Алгоритм для разложения зацеплений на простые слагаемые.* Математика: сб. переводов. 1966. Т. 10. № 4. С. 45-78.

[3] **Jaco W., Oertel U.** *An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold.* Topology. 1984. V. 23. № 2. P. 195-209.

[4] **Матвеев С.В.** *Аддитивность сложности и метод Хакена в топологии трехмерных многообразий.* Украинский математический журнал. 1989. Т. 41. № 9. С. 1234-1239.

[5] **Tollefson J. L.** *Normal surface Q-theory.* Pacific J. Math. 1998. V. 183. № 2. P. 359-374.

[6] **Thompson** A. *Thin position and the recognition problem for* S^3. Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 613–630.

[7] **Матвеев С.В.** *Алгоритм распознавания трехмерной сферы (по А. Томпсон).* Матем. сб. 1995. Т. 186. Л» 5. С. 69–84.

[8] **Stocking M.** *Almost normal surfaces in 3-manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 352. № 1. P. 171-207.

[9] **Rubinstein J.H.** *On 3-manifolds that have finite fundamental group and contain Klein bottles.* Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 251. P. 129–137.

Работы автора по теме диссертации

[10] **Фоминых Б.А.** *Полное описание множества фундаментальных поверхностей для некоторых трехмерных многообразий.* Тр. конф. “Геометрия и приложения”, посвященной 70-летию В.А. Топоногова (Новосибирск, 13–16 марта 2000 г.). Новосибирск: Ин-т математики. 2001. С. 204-214.

[11] **Матвеев С.В., Фоминых Б.А.** *Нормальные поверхности в трехмерных многообразиях.* Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 6. С. 727-730.

[12] **Фоминых Е.А.** *Полное описание нормальных поверхностей для бесконечных серий трехмерных многообразий.* Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43. № 6. С. 1372-1387.

[13] **Фоминых Е.А.** *Суммирование нормальных поверхностей и уравновешенные специальные спайны.* Вестник ЧелГУ, “Математика. Механика". 2002. Л» 1(6). С. 25-29.

[14] **Fominykh E.A., Matveev** S.V. *A complete description of the set of normal surfaces in some triangulated 3-manifolds.* Тез. докл. межд. конф. "Маломерная топология и комбинаторная теория групп". Челябинск: ЧелГУ. 1999. С. 35-36.

[15] **Fominykh** Б.А. *On normal surfaces in 3-manifolds.* Тез. докл. межд. конф. "Топология и динамика - Рохлинский мемориал", посвященной 80-летию со дня рождения В.А. Рохлина. Санкт-Петербург: Ин-т математики. 1999. С. 31.

[16] **Fominykh Б.А., Matveev** S.V. *A complete description of the set of almost normal surfaces in some 3-manifolds.* Тез. докл. межд. конф. "Математическая логика, алгебра и теория множеств", посвященной 100-летию со дня рождения П.С. Новикова. Москва: Ин-т математики. 2001. С. 16.

[17] **Fominykh Б.А.** *Semigroups of normal surfaces for $L_{p,q}$, S^3/Q_{4n} and Stallings manifolds.* Тез. докл. межд. конф. "Second Russian-German geometry meeting", посвященной 90-летию со дня рождения А.Д. Александрова. Санкт-Петербург: Ин-т математики. 2002. С. 21-22.

Подписано в печать 03.04.2003
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 0,9. Уч.-изд. л. 1,2.
Тираж 100 экз. Заказ 82 Бесплатно.
Челябинский государственный университет.
454021 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.

Полиграфический участок Издательского центра ЧелГУ.
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57б