На правах рукописи

ЧЕХЛОВ АНДРЕЙ РОСТИСЛАВОВИЧ

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ЭНДОМОРФИЗМОВ

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Томск - 2003

Работа вышолнена в Томском государственном университете

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Кожухов С.Ф.
доктор физико-математических наук,
профессор Фомин А.А.
доктор физико-математических наук,
профессор Яковлев Б.В.

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

Защита состоится "16 " мая 2003 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета Д. 212.099.02. при Красноярском государственном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Красноярского государственного университета.

Автореферат разослан " 4 " апреля 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук Голованов М.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Группа называется *абелевой,* если групповая операция в ней (записываемая обычно аддитивно) коммутативна. Являясь частью общей теории групп, теория абелевых групп активно взаимодействует с теорией модулей, колец, категорий, топологических групп. Всякую абелеву группу можно рассматривать как модуль над кольцом целых чисел. Поэтому одним из важных направлений в теории абелевых групп является углубление теоретико-модульных результатов, использующее специфику кольца целых чисел. В то же время эта теория является источником идей для смежных областей алгебры и одним из побудителей новых исследований в них.

Теорию абелевых групп можно разделить на три основные части: периодические группы, группы без кручения и смешанные группы. Разработана глубокая структурная теория периодических абелевых групп, основы которой заложены Х. Прюфером [40], [41], Х. Ульмом [42], Л.Я. Куликовым [12]. Иначе обстоит дело с группами без кручения. Работы Л.С. Понтрягина [18], Р. Бэра [27], А.Г. Куроша [14], А.И. Мальцева [15], Л.Я. Куликова [13] положили начало теории групп без кручения. Продвижению в направлении изучения этих групп препятствует как сложность их устройства, так и недостаток различных сведений о них и методов их исследований. На трудность проблемы классификации групп без кручения даже конечного ранга указал А.В. Яковлев [23]. Новые идеи, возникавшие в рамках теории групп без кручения, касались, в основном, групп конечного ранга. Бурное развитие теории последних групп зафиксировано в книгах [24], [28], [39]. Были проведены содержательные исследования отдельных классов групп без кручения произвольного ранга, обзоры [16], [17], [32], [37]. Однако классы групп без кручения с достаточно развитой структурной теорией немногочисленны и относительно невелики. Смешанных групп так много, что хорошему описанию поддаются лишь отдельные классы этих групп.

При изучении абелевых групп и модулей плодотворными оказались различные обобщения понятия инъективности (см., напр. [1], [19], [20], [21]). Фундаментальную роль в теории абелевых групп и других разделах алгебры играют алгебраически компактные группы. Их открыл И. Капланский, занимаясь проблемой алгебраического строения компактных абелевых групп. Алгебраически компактные группы исследовались также в работах Лося, Бальцежика, Сонсяды, Маранды, Фукса, Ю.Л. Ершова и многих других математиков. Класс алгебраически компактных групп совпадает с классом сервантно инъективных групп, т.е. групп, инъективных относительно всех сервантно точных последовательностей абелевых групп. Сервантно инъективные группы применяются при решении многих задач теории групп. Их строение известно. Естественным обобщением сервантно инъективных групп являются *квазисервантно инъективные* группы (кратко *qpi-группы*[1]*)*, т.е. такие группы *A*, что всякий гомоморфизм G A любой сервантной подгруппы G в A продолжается до эндоморфизма группы A. Изучение свойств *qpi-групп* заявлено как проблема 17 а) в книге [21].

ПРОБЛЕМА 17 а) [21]. *Изучить свойства квазисервантно инъективных групп.*

Периодическая qpi-группа характеризуется тем, что ее редуцированная часть периодически полна, строение таких групп известно. Поэтому особый интерес вызывает исследование qpi-групп без кручения. Усилиями ряда математиков здесь был достигнут значительный прогресс. Что касается смешанных *qpi-групп,* то работа [5] показывает, что изучение даже расщепляющегося случая весьма затруднительно.

К qpi-группам примыкают *qcpi-группы* и *wqpi-группы,* введенные автором. Группа A называется *слабо квазисервантно инъективной* (кратко *wqpi-группой),* если всякий эндоморфизм любой ее сервантной подгруппы продолжается до эндоморфизма группы A.

Редуцированные алгебраически компактные группы допускают интересную топологическую характеризацию: класс этих групп совпадает с классом абелевых групп, полных в их Z-адической топологии. Группы, в которых замыкание (в Z-адической и в p-адической топологии для каждого простого числа p) всякой сервантной подгруппы выделяется прямым слагаемым, автор называет *cs-группами.* Класс абелевых cs-групп A без кручения характеризуется тем, что ядро каждого гомоморфизма A G в редуцированную группу без кручения G служит прямым слагаемым в A. Из хорошо известных свойств алгебраически компактных и периодически полных групп следует, что они являются cs-группами [21; § 39, упр. 2; следствие 68.9]. Изучавшиеся С.Н. Черниковым [22], Л. Фуксом, а также А. Кертесом и Т. Селе [21; § 86, упр. 7] абелевы группы, в которых все сервантные подгруппы служат прямыми слагаемыми, также являются cs-группами. Поскольку каждую бесконечную подгруппу можно вложить в сервантную подгруппу той же мощности, а для замыкания $B^\wedge$ в Z-адической топологии подгруппы B, например, редуцированной группы без кручения A справедливо $|B^\wedge|$ $|B|^{\aleph_0}$, то изучение cs-групп связано также с проблемой 5 из книги [21].

ПРОБЛЕМА 5 [21]. *Исследовать группы, каждая бесконечная подгруппа B которых может быть вложена в прямое слагаемое мощности $|B|$.*

Более широкий класс образуют qcpi-группы. Группа A называется *qcpi-группой,* если всякий гомоморфизм G A любой ее замкнутой в Z-адиической

[1] В некоторых работах эти группы называются QPI-группами.

ческой топологии сервантной подгруппы G продолжается до эндоморфизма группы A.

Сервантно инъективные и квазисервантно инъективные абелевы группы - это непосредственное обобщение инъективных групп. С другой стороны, давно известны транзитивные и вполне транзитивные модули над полным кольцом дискретного нормирования, введенные И. Капланским в книге [36]. Наибольшее внимание привлекали (вполне) транзитивные примарные абелевы группы. П.А. Крылов перенес определение И. Капланского (вполне) транзитивного модуля на абелевы группы без кручения. Абелева группа без кручения A называется *вполне транзитивной (транзитивной)*, если для любых ее ненулевых элементов а, b условие на их характеристики $XA(a)$ $XA(B)$ $(XA(a) = XA(B))$ влечет существование ее эндоморфизма (автоморфизма) / со свойством $fa = b$. Затем рядом авторов (см. [3], [31] и др.) были предложены определения произвольной вполне транзитивной и транзитивной абелевой группы. Они формулируются в терминах высотных матриц элементов группы, так что в случае групп без кручения можно ограничиться характеристиками элементов. Квазисервантно инъективные группы вполне транзитивны. Однако последних намного больше. Отметим, что однородные транзитивные группы без кручения - это в точности сильно однородные группы. Под таким названием эти группы изучались давно. В [6] исследовались также слабо транзитивные (в [6] они назывались эндотранзитивными) группы без кручения. Вполне транзитивные и транзитивные группы без кручения слабо транзитивны. Изучение последних целесообразно, поскольку оно позволяет выработать определенный подход к исследованию (вполне) транзитивных и других, близких к ним классов групп. В [37] поставлен ряд проблем (проблемы 40-47), посвященных этим группам.

В теории абелевых групп без кручения большое значение имеют инварианты, связанные с элементами и описывающие их поведение по отношению к делимости на целые числа: характеристика и тип. В данной работе в классе р-редуцированных[1] групп без кручения рассматриваются инварианты, описывающие поведение элементов по отношению к делимости на целые р-адические числа: р-характеристика и р-тип. Важным их свойством является способность различать элементы с равными характеристиками (типами). Естественным образом вводится понятие р-вполне транзитивности, р-редуцированные qcpi-группы без кручения р-вполне транзитивны.

Вышеперечисленные классы групп можно назвать группами с большим числом эндоморфизмов или группами с условием продолжения частичных эндоморфизмов.

---

[1] Абелева группа называется р-редуцированной для данного простого числа p, если она не содержит ненулевых p-делимых подгрупп.

Настоящая работа посвящена исследованию трех основных классов групп: вполне транзитивных, квазисервантно инъективных групп без кручения и произвольных абелевых cs-групп. Рассмотрение в работе других, близких, классов групп целесообразно с позиции выявления их общих свойств, связей и характеризаций. Изучение этих групп позволило как существенно продвинуться в направлении их структурной теории, так и выработать новые приемы и методы исследования абелевых групп. Все вышесказанное позволяет считать тему диссертации актуальной.

Цель работы.

1. Исследовать свойства вполне транзитивных абелевых групп без кручения и описать новые классы этих групп.

2. Построить структурную теорию квазисервантно инъективных групп без кручения.

3. Разработать теорию cs-групп.

4. Рассмотреть абелевы группы, близкие к квазисервантно инъективным группам и cs-группам, и установить свойства и взаимосвязи этих классов групп.

Общая методика исследования. Используются методы теории абелевых групп, теории колец и некоторые топологические идеи. Развита техника изучения абелевых групп с продолжающимися частичными эндоморфизмами. Применяются понятия p-характеристики и p-типа. Разработан метод исследования вполне транзитивных групп без кручения, использующий некоторые кольца и модули, ассоциированные с данной группой.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми. К ним можно отнести следующие.

1. Охарактеризованы вполне транзитивные группы без кручения, все ненулевые эндоморфизмы которых есть мономорфизмы. Эти группы исследуются как некоторые модули над кольцами специального типа (теоремы 2.7-2.9). Построен пример счетной транзитивной, не вполне транзитивной группы без кручения без ненулевых элементов максимального типа (теорема 2.12). Существование групп с такими свойствами ранее не было известно.

2. Описаны слабо транзитивные группы в одном широком классе групп (теорема 3.2, следствия 3.3-3.5).

3. Найдены новые критерии вполне транзитивности разложимых групп без кручения (теорема 4.5).

4. Описано строение *qcpi-групп* в ряде классов групп (§§ 5, 6).

5. Получено структурное описание квазисервантно инъективных групп без кручения, что вносит существенный вклад в решение проблемы 17 a) из кни-

ги [21]. Такие группы A характеризуются как сервантные вполне характеристические подгруппы г р у $\prod_{p\in\Pi} A_p$ со,держащие $\bigoplus_{p\in\Pi} A_p$, где Π - некоторое множество простых чисел, а A_p - квазиоднородные квазисервантно инъективные группы, однозначно определяемые по группе A и удовлетворяющие ряду условий. Обнаружены новые свойства квазисервантно инъективных групп.

6. Доказано, что разложимые однородные слабо квазисервантно инъективные группы являются квазисервантно инъективными. Но в общем случае класс слабо квазисервантно инъективных групп существенно шире класса квазисервантно инъективных групп. Получено описание слабо квазисервантно инъективных групп в ряде классов групп (§8).

7. Развита структурная теория cs-групп,без кручения. Доказано, что всякая редуцированная cs-групла без кручения раскладывается в некоторую сервантную межпрямую сумму квазиоднородных es-групп (теорема 9.2). Поэтому изучение cs-групп без кручения сводится к случаю квазиоднородных групп. Строение квазиоднородных cs-группы связано с мощностью их p-ранга. Квазиоднородные cs-группы бесконечного p-ранга являются модулями над кольцом целых p~адических чисел. Всякая же квазиоднородная cs-группа, p-ранга не меньше мощности континуума, является алгебраически компактной. Охарактеризованы квазиоднородные cs-группы конечного p-ранга.

8. Получена структурная теорема для смешанных cs-групп (теорема 14.3).

9. Доказано, что алгебраически компактные группы - это в точности группы, выделяющиеся прямыми слагаемыми в каждой группе, содержащей их в качестве замкнутых сервантных подгрупп. Это новая характеризация алгебраически компактных групп (другая характеризация p-адических алгебраически компактных групп приведена в теореме 15.1).

Новое направление, развитое в работе: теория абелевых cs-групп, *qcpi*-групп и слабо квазисервантно инъективных групп.

Достигнуто существенное продвижение в направлении структурной теории квазисервантно инъективных групп без кручения и близких к ним классов групп: вполне транзитивных и слабо транзитивных групп без кручения.

Из полученных результатов в качестве следствий можно вывести ряд известных результатов Д. Арнольда, К. Бенабдаллаха, Ч. Винсонхаллера, Гоетерс, Т. Коямы, Дж. Рейда, С.Я. Гриншпона, Ю.Б. Добрусина, П.А. Крылова и др.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Полученные структурные теоремы и описанные классы групп расширяют знания о строении абелевых групп. Разработанные методы и приемы исследования могут быть использованы в теории абелевых групп и модулей, их колец эндоморфизмов, групп автоморфизмов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Всесоюзных алгебраических конференциях (Минск, 1983; Кишинев, 1985; Львов, 1987), на Всесоюзном симпозиуме по теории групп (Москва, 1984), на Всесоюзном симпозиуме по теории колец, алгебр и модулей (Львов, 1990), на Международных конференциях по алгебре (Новосибирск, 1989; Новосибирск, 2000), на Международной конференции по математике и механике (Томск, 1997), на Международном семинаре "Универсальная алгебра и ее приложения" (Волгоград, 1999), на Международной алгебраической конференции в Украине (Сумы, 2001), на Международном семинаре по теории групп (Екатеринбург, 2001), на Международной конференции "Алгебра и ее приложения" (Красноярск, 2002), а также обсуждались на алгебраических семинарах в Московском госуниверситете, Московском педагогическом университете, Институте математики с ВЦ АН Молдовы, Институте математики СО РАН и Томском госуниверситете. По теме диссертации опубликованы 33 работы [43]-[75].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы и изложена на 177 страницах.

Краткое содержание работы

Все рассматриваемые группы - абелевы и редуцированные (структурная теория абелевых групп сводится к редуцированному случаю). N - множество натуральных чисел, Z -- кольцо целых чисел, Q - поле рациональных чисел, Q^*p - кольцо (группа) целых р-адических чисел, p - некоторое простое число. Групповая терминология и обозначения соответствуют [21]. Так, если A - группа, то $p^{\omega}A = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n A$; $E(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} nA$; - кольцо ее эндоморфизмов; r (A) - ее ранг; $\bigoplus_m A$ - прямая сумма m копий группы A *(m* - некоторое кардинальное число); $r_p(A)$ - *р-ранг* группы Л, т.е. ранг ее факторгруппы A/pA. Если $a \in A$, то *o(a) порядок,* $h_p^A(a)$ - *р-высота* элемента а в группе A, т.е. наибольшее неотрицательное $n \in Z$, для которого уравнение $p^n x = a$ имеет решение $x \in A$. Если такое число не существует, то полагают $h_p^A(a) = \infty$, в этом случае a называется *элементом бесконечной р-высоты.* Если из контекста ясно, о какой группе A идет речь, то индекс A опускается. Подгруппа B группы A называется *сервантной (р-сервантной),* если $nB = B \cap nA$ $(p^n B = B \cap p^n A)$ для каждого $n \in$ N.

Далее, пусть везде в этом абзаце G - группа без кручения. Если $p_1, p_2, \ldots$ - последовательность простых чисел, упорядоченных по возрастанию, $g \in G$, то $Xg(g) = (h_{p1}(g), h_{p2}(g), \ldots)$ - *характеристика* элемента g в группе G. Для всякой упорядоченной последовательности неотрицательных целых чисел и символов существует группа без кручения с некоторым элементом, характеристика которого совпадает с данной последовательностью. Для характеристик $\alpha = (k_1, k_2, \ldots)$, $\beta = (l_1, l_2, \ldots)$ полагают $\alpha < \beta$, если $k_n < l_n$ для всех $n \in N$. Характеристики α и β называются *эквивалентными,* если $k_n \quad l_n$ лишь для конечного числа номеров п и только тогда, когда k_n и l_n конечны. Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом.* Тип элемента $g \in G$ обозначается $t_G(g)$; $T(G)$ - множество типов всех ненулевых элементов группы G; $n(G)$ - множество всех простых чисел p со свойством $pG \quad G$. Группа G называется *однородной,* если все ее ненулевые элементы имеют один и тот же тип. Этот общий тип называется типом группы G и обозначается $t(G)$. В частности, это относится к группе G ранга 1. Группа G называется *квазиоднородной,* если $\pi(G) = \pi(A)$ для любой ее ненулевой сервантной подгруппы A; *квазиразложимой,* если существуют ее ненулевые подгруппы A, B, называемыми ее *квазислагаемыми,* такие, что $nG \subsetneq A \oplus B$ для некоторого $n \in N$, в противном случае G называется *сильно неразложимой; связанной,* если все ее факторгруппы по ненулевым сервантным подгруппам делимы. Будем говорить, что подгруппа A *квазиравна* группе G, если $n\bar{G} \subsetneq A$ для некоторого n G N. Эндоморфизм f группы G будем называть ее *квазиавтоморфизмом,* если f - мономорфизм, а подгруппа fG квазиравна G. Мономорфизм $f : A \quad G$ групп без кручения будем называть *квазиизоморфизмом,* если подгруппа fA квазиравна группе G. Групповые термины, примененные к кольцу, относятся к его аддитивной группе. Кольцо Т называется *сильно однородным,* если каждый его элемент есть целое кратное обратимого в Т элемента; *Е-кольцом,* если его левое регулярное представление является изоморфизмом, т.е. каждый эндоморфизм группы T^+ совпадает с умножением кольца T слева на некоторый элемент из T.

Группа без кручения G называется *вполне транзитивной (транзитивной),* если для любых ее ненулевых элементов a,b условие $X_G(a) \quad X_G(b)$ $(X_G(a) = X_G(b))$ влечет существование ее эндоморфизма (автоморфизма) f со свойством $fa = b$.

Обозначим через C - класс всех редуцированных групп без кручения A, у которых тип каждого ненулевого элемента сравним с некоторым максимальным типом из $T(A)$.

В классе групп без кручения наибольшим вниманием пользовались (вполне) транзитивные группы конечного ранга. Д.М. Арнольдом в [25] получено описание однородных вполне транзитивных групп конечного ранга. В [6], а затем в [33] описаны произвольные вполне транзитивные группы конечного ранга. В работах [8], [35] изучались однородные вполне транзитивные группы произвольного ранга. Эти группы обладают многими интересными свойствами, аналогичными свойствам однородных вполне разложимых групп. В частности, для счетных однородных вполне транзитивных групп справедлив аналог классической теоремы Бэра-Куликова-Капланского. В [9], [11] исследовались вполне транзитивные группы произвольного ранга с условиями на типы элементов. Примеры связанных вполне транзитивных групп *G,* в множестве *T(G)* которых нет максимальных элементов, построены в [9]. С другой стороны, там же построены примеры суперразложимых вполне транзитивных групп *G* без максимальных элементов в *T(G).* Это говорит о том, что вполне транзитивные группы могут быть самыми разнообразными.

Напомним, что абелева группа *A* называется *р-редуцированной,* если она не имеет ненулевых р-делимых подгрупп. Для группы без кручения *A* это эквивалентно тому, что она не содержит ненулевых элементов бесконечной р-высоты, т.е. $p^{w} A = 0$. Класс всех р-редуцированных групп без кручения обозначим через R_p. Если $A \in R_p$, $a \in A$ и $\xi = r_o + r_1 p + \dots$ - целое р-адическое число, то через ξa обозначим элемент группы *A* (если он существует), являющийся пределом в р-адической топологии группы *A* последовательности $r_0 a$, $(r_o+r_1 p)a, \dots$ Множество $H_p^A(a) = \{\xi \in Q_p^* \mid \xi a$ определено$\}$ называется *р-характеристикой* элемента а в группе *A.* Множество всех р-характеристик совпадает с множеством всех р-сервантных подгрупп группы Q^*_p, содержащих группу целых чисел [7]. Две р-характеристики H_1, H_2 назовем *эквивалентными,* если существуют $n,m \in$ N такие, что $nH_1 \subseteq H_2$, $mH_2 \subseteq H_1$. Класс эквивалентности в множестве всех р-характеристик назовем *р-типом.* р-тип элемента $a \in A$ обозначим через $\tau_p^A(a)$. На множестве р-тшюв можно ввести отношение частичного порядка. Запись $\tau_1 \leqslant \tau_2$ означает, что существуют р-характеристики $H_1 \in \tau_1$, $H_2 \in \tau_2$ со свойством $nH_1 \subseteq H_2$ для некоторого $n \in$ N. Отметим, что условие τ_p^A(a) τ_p^A(b) для а, $b \in A$ влечет *t(a) t(b).* Множество р-типов всех ненулевых элементов группы *A* обозначим через $T_p(A)$; если τ - некоторый р-тип, то $A(\tau) = \{a \in A \mid \tau_p^A(a) \geqslant \tau\}$, это сервантная вполне характеристическая подгруппа в *A.* Группу $A \in R_p$ назовем *р-однородной,* если $\tau_p^A(a) = \tau_p^A(b)$ для любых ненулевых о, 6 $\in$ *A.*

Чтобы показать значимость введенного понятия отметим, например, что группы $B,G \in R_p$ р-ранга 1 квазиизоморфны тогда и только тогда, когда $T_p(B) \cap T_p(G) \neq \emptyset$.

Группу $A \in R_p$ назовем *р-вполне транзитивной,* если для любых ее элементов а, b таких, что h_p^A(a) h_p^A(b) и $H_p^A(a) \subseteq H_p^A(b)$ существует $f \in E(A)$ со свойством $fa = b$. Группа *A* р-вполне транзитивна тогда и только тогда, когда каждый гомоморфизм *G* *A* любой замкнутой в р-адической топологии сервантной подгруппы *G* р-ранга 1 группы *A* продолжается до эндоморфизма группы *A.* Поэтому qcpi-группа без кручения *A* является р-вполне транзитивной для каждого р такого, что $A \in R_p$. Всякая вполне транзитивная группа $A \in R_p$ является р-вполне транзитивной. Обратное, в общем случае, неверно. Например, связанная группа *G* р-вполне транзитивна для каждого р $\in$ *π(G).*

Однако справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. *Пусть A - такая квазиоднородная группа, что A - p-вполне транзитивна для каждого* $p \in \pi(A)$. *Тогда для всякого максимального p-типа* $\tau \in Tp(A)$ *подгруппа* $A(\tau)$ *группы A есть однородная вполне транзитивная группа. В частности, p-однородная qcpi-группа является однородной вполне транзитивной группой.*

Изучаются гомоморфизмы p-вполне транзитивных групп с различными условиями на p-типы элементов этих групп.

Обозначим через *M* - класс всех редуцированных групп без кручения, у которых все ненулевые эндоморфизмы суть мономорфизмы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. *Пусть* $A \in \mathcal{M}$ *- p-вполне транзитивная группа. Тогда все ее ненулевые эндоморфизмы являются квазиавтоморфизмами тогда и только тогда, когда в множестве* $T_p(A)$ *имеются максимальные элементы. В этом случае группа A либо p-однородна, либо* $T_p(A)$ *состоит из бесконечного множества попарно несравнимых p-типов. Если к тому же A - q-вполне транзитивна для каждого* $q \in \pi(A)$, или ее *q-базисные подгруппы циклические для всех* $q \in \pi(A)$, *то все эндоморфизмы группы A являются целыми кратными ее автоморфизмов, т.е. E(A) - сильно однородное кольцо.*

ТЕОРЕМА 1.13. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i \in R_p$, *где* A_i *- связанные группы такие, что* $T_p(A_i)$ *содержит максимальные элементы хотя бы для одного* $i \in I$. *Группа A p-вполне транзитивна тогда и только тогда, когда* $|I| > 1$ *влечет, что для A выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1) *A - p-однородная группа;*

2) *A - однородная вполне транзитивная группа;*

3) A_i *- изоморфные однородные вполне транзитивные группы.*

В дальнейшем потребуется следующая конструкция из [9]. Под *областью целостности* понимается кольцо (не обязательно коммутативное) без делителей нуля. Если S - область целостности, то модуль $_SM$ - без кручения, если rm 0 для любых ненулевых $r \in S$, $m \in M$.

ЛЕММА 2.1 [9, лемма 2.1]. *Следующие свойства кольца без кручения S равносильны:*

1) *для всякого простого числа p и любых* $a, b \in S$, *если* $ab \vdots p$, *то* $a \vdots p$ *или* $b \vdots p$;

2) $h_p(ab) = h_p(a) + h_p(a)$ *для всякого простого p и любых* $a,b \in S$ *или, что*

то же, $x(ab) = x(a) + x(b)$;

3) *для всякого простого p кольцо S/pS есть область целостности.*

Будем говорить, что кольцо 5 *обладает свойством* (*), если оно удовлетворяет одному из свойств леммы 2.1, и S^+ - квазиоднородная редуцированная группа. Нетрудно видеть, что тогда 5 - область целостности.

ЛЕММА 2.2. *Следующие свойства модуля без кручения sA над кольцом без кручения S со свойством* (*) *равносильны:*

1) *для всякого простого числа p и любых* $r \in S$, $a \in A$, *если* $ra \vdots p$, *то* $r \vdots p$ *или* $a \vdots p$;

2) $h_p(ra) = h_p(r) + h_p(a)$ *для всякого простого p и любых* $r \in S$, $a \in A$ *или, что т,о же,* $\chi(ra) = \chi(r) + \chi(a)$;

3) *A/pA есть модуль без кручения над кольцом S/pS для всякого простого p.*

Напомним, что *левое условие Оре* для области целостности S означает, что для любых ненулевых a, b € S найдутся ненулевые *a', b'* € S со свойством b'*a* = *a'b.* В этом случае говорят, что *S - левая область Оре.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть S - левая область Оре со свойством* (*). *Если* $\hat{S}$ *- левое кольцо частных кольца S, то положим* $\overline{S} = \{a^{-1}b \in \hat{S} \mid a, b \in S,$ $x(a) \le x(b)\}$. *Тогда* $\overline{S}$ *- такое подкольцо в* $\hat{S}$, *что* $\overline{S}^+$ *- вполне транзитивная и транзитивная группа, а S - сервантное подкольцо в* $\overline{S}$.

Каждое Е-кольцо коммутативно. Если S есть Е-кольцо со свойством (*), то вполне транзитивность S^+ равносильна тому, что $S = \overline{S}$. Будем говорить, что модуль $_SA$ *обладает свойством* (*), если он удовлетворяет одному из свойств леммы 2.2.

Кольцо 5 называется *левым инвариантным (правым инвариантным),* если для любых его элементов *a,* β существует такой элемент $\gamma \in S$, что $\alpha\beta = \gamma\alpha$ $(\alpha\beta = \beta\gamma)$. Кольцо является левым инвариантным тогда и только тогда, когда любой левый его идеал будет правым (т.е. двусторонним). Нетрудно видеть, что инвариантность слева (справа) кольца эндоморфизмов группы *A* влечет вполне характеристичность ядер (образов) ее эндоморфизмов. Отметим и такое простое свойство, что если *A* -вполне транзитивная группа без кручения, а *E(A)* инвариантно справа, то $\varphi \in E(A)$ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда φ сохраняет характеристики элементов группы *A,*

Пусть S - левая область Оре со свойством (*), обозначим через $\underset{\sim}{S}$ - подкольцо в $\overline{S}$, порожденное ненулевыми элементами $\{s^{-1}r \in \overline{S} \mid$ существуют $s_1, r_1 \in S$ такие, что $s_1, r_1 \neq 0$ и $ss_1 = rr_1\}$.

Нетрудно показать, что вполне транзитивная группа $A \in \mathcal{M}$ квазиоднородна. Укажем теперь условия, при которых вполне транзитивная группа принадлежит классу $\mathcal{M}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Пусть A - квазиоднородная вполне транзитивная группа, R = E(A). Тогда*

1) $A \in \mathcal{M}$ *тогда и только тогда, когда R - инвариантное слева кольцо. В частности, R - левая область Оре со свойством* (*);

2) *если* $A \in \mathcal{M}$, *то* $R = \underline{R}$ *и, кроме того, следующие условия эквивалентны:*

а) R инвариантно справа;

б) все эндоморфные образы A вполне характеристичны;

в) $(\varphi A) \cap (\psi A) \neq 0$ *для любых ненулевых* $\varphi, \psi \in R$;

г) $R = \overline{R}$;

3) *если R инвариантно справа, то в R нет делителей нуля. В частности, A сильно неразложима.*

Вполне транзитивные группы *A* с сильно неразложимыми сервантными подгруппами и такие, что любой $t \in T(A)$ сравним с некоторым максимальным типом из *T(A)*, принадлежат классу $\mathcal{M}$. Всякая квазиоднородная вполне транзитивная группа *A*, в множестве *T(A)* которой существуют максимальные элементы, принадлежит классу $\mathcal{M}$. В [6] описаны вполне транзитивные группы $A \in \mathcal{M}$, у которых в *T(A)* существуют максимальные элементы. Кольцо эндоморфизмов *E(A)* такой группы является сильно однородным кольцом, поэтому оно инвариантно слева и справа.

Следующие три теоремы характеризуют вполне транзитивные группы из класса $\mathcal{M}$ с помощью определенных колец и модулей, ассоциированных с данной группой.

ТЕОРЕМА 2.7. *Пусть* $A \in \mathcal{M}$ *- квазиоднородная группа. Группа A вполне транзитивна тогда и только тогда, когда на A можно задать такой модуль без кручения над областью S, что для каждого ненулевого* $a \in A$ *и его характеристики x = x(a) выполняется одно из равносильных условий:*

1) *A(x) - циклический S-модуль, и любой элемент в* S^{+} *наименьшей характеристики обратим;*

2) *S - левая область Оре со свойством (*),* ${}_S A(\chi) \cong {}_S S$ *и* $S = \underline{S}$.

ТЕОРЕМА 2.8. *Пусть* $A \in M$. *- квазиоднородная группа, R = E(A). Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *A вполне транзитивна с инвариантным справа кольцом R;*

2) *на A можно задать модуль без кручения над такой левой областью*

Оре S *со свойством* (*), *что* $S = \overline{S}$ *и* ${}_SA(\chi) \cong {}_SS$ *для любого ненулевого элемента* $a \in A$ *и его характеристики* $x = x(a)$;

3) *на* A *можно задать модуль без кручения со свойством* (*) *над такой левой областью Оре* S *со свойством* (*), *что* $\pi(S) = \pi(A)$, $S = \overline{S}$, *и любые два элемента группы* A *со сравнимыми типами линейно зависимы над* S;

4) *для каждого ненулевого* $a \in A$, *если* $t = t(a)$, $x = x(a)$, *то отображение* $f \to f|A(t)$ *осуществляет вложение* R *в* $E(A(t))$, *при отождествлении* R *с его образом имеет место разложение* $E(A(t))^+ = H \oplus R^+$, *где* $H = \{\varphi \in E(A(t)) \mid \varphi a = 0\}$, R - *левая область Оре со свойством* (*), $R = \overline{R}$ *и* $A(\chi) \cong R^+$.

Обозначим через $\mathcal{N}$ - класс групп $A \in \mathcal{M}$, у которых все ненулевые гомоморфизмы $G \to A$ любой сервантной подгруппы G в A есть мономорфизмы. Таковы, например, квазиоднородные группы р-ранга 1 и квазисервантно инъективные группы из $\mathcal{M}$. Группа $A \in \mathcal{M}$ квазисервантно инъективна тогда и только тогда, когда она - вполне транзитивная группа из класса $\mathcal{N}$.

ТЕОРЕМА 2.9. *Пусть* $A \in \mathcal{N}$ - *квазиоднородная группа. Группа* A *вполне транзитивна тогда и только тогда, когда на* A *можно задать модуль без кручения со свойством* (*) *над таким E-кольцом* S *со свойством* (*), *что* $S = \overline{S}$, $S^+ \cong A(\chi)$ *для характеристики* $x = x(a)$ *любого ненулевого элемента* $a \in A$.

Теоремы 2.7 - 2.9 являются наиболее общими для рассматриваемых в них классов групп и включают результаты Ю.Б. Добрусина и П.А. Крылова о вполне транзитивных группах из класса $L \cap \mathcal{M}$.

Однородная транзитивная группа вполне транзитивна. Первые примеры транзитивных, не вполне транзитивных групп без кручения конечного ранга, построены в [6]. М. Дугасом и С. Шелахом [30] в предположении справедливости аксиомы конструктивности Геделя доказано, что существуют неразложимые однородные вполне транзитивные группы, не являющиеся транзитивными. Нетрудно проверить, что вполне транзитивные группы $A \in \mathcal{M}$ транзитивны. Обратное неверно. Оказывается, что можно построить соответствующие группы A даже без максимальных элементов в $T(A)$.

ТЕОРЕМА 2.12. *Существует счетная транзитивная, не вполне транзитивная связанная группа без ненулевых элементов максимального типа.*

Таким образом, как и в примарном случае, понятия "транзитивность" и "вполне транзитивность" для групп без кручения независимы.

В § 3 изучаются вполне транзитивные группы с условиями на типы элементов. Будем говорить, что ненулевой эндоморфизм α группы A имеет максимальное ядро, если подгруппа $\ker \alpha$ максимальна среди ядер всех ненулевых эндоморфизмов группы A. В частности, получено

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Пусть $A \in \mathcal{L}$ - группа, удовлетворяющая условию максимальности на ядра эндоморфизмов, и $A \notin \mathcal{M}$. Тогда*

1) *A слабо транзитивна тогда и только тогда, к о $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, д е каждая A_i - квазиоднородная слабо транзитивная группа из $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$, или является конечной прямой суммой изоморфных однородных вполне транзитивных групп из M, и $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) = \emptyset$ при i j $(i,j = 1,\dots,n)$;*

2) *слабая транзитивность A влечет ее транзитивность, причем если все A_i из* 1) *однородны, то A вполне транзитивна.*

Следствие 3.5 обобщает результаты из [6], полученные для слабо транзитивных групп.

Перейдем теперь к произвольным разложимым вполне транзитивным группам без кручения.

Следуя [2], введем следующие понятия.

Определение 4.1. Множество $\{A_i\}_{i \in I}$ групп без кручения называется *вполне транзитивной системой групп,* если для любых ненулевых $a \in A_i$, $b \in A_j$ *(г* может совпадать с *j)* условие $\chi(a)$ $\chi(b)$ влечет существование гомоморфизма $\varphi : A_i$ A_j со свойством $\varphi a = b$.

Определение 4.2. Говорят, что система $\{A_i\}_{i \in I}$ групп без кручения *удовлетворяет условию монотонности для характеристик,* если для любого ненулевого $d \in A_i$ $(i \in I)$ из выполнения соотношений:

a) $\chi(a_1) \cap \dots \cap \chi(a_k) \leqslant \chi(d)$, где $a_j \in A_{i_j}$, $i_j \neq i_s$ при j s $(j,s = 1,\dots,k)$;

b) $\chi(d) \not\geqslant \chi(a_j)$ для всех $j = 1,\dots,k$.

Следует существование элементов $b_1,\dots,b_r \in A_i$ со свойствами:

1) $b_1 + \dots + b_r = d$;

2) для каждого b_l $(l = 1,\dots,r)$ среди элементов $\{a_1,\dots,a_k\}$ найдется хотя бы один такой элемент a_s $(s = 1,\dots,k)$, что $\chi(b_l)$ $\chi(a_s)$.

В [2] доказано, что группа без кручения $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда система $\{A_i\}_{i \in I}$ вполне транзитивна и удовлетворяет условию монотонности для характеристик. Затем в [3] этот результат перенесен на произвольные абелевы группы. Для групп, представимых в виде прямых сумм квазиоднородных групп, справедлив следующий критерий условия монотонности.

ТЕОРЕМА 4.4. *Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ - такая система квазиоднородных групп без кручения, что $|I| > 1$, $\pi(A_i) = ?(A_j)$, $T(A_i)$ - направленное вверх мно-*

жество, и для любого $t \in T(A_i)$ *подгруппа* $A_i(t)$ *плотна в* A_i *в Z-адической топологии для всех* $i,j \in I$, *причем* $A_i(t_1 \cap \ldots \cap t_k) \subseteq A_i(t_1) + \ldots + A_i(t_k)$ *для любого конечного набора различных индексов* $\{i_1, \ldots, i_k\}$, *где* $t_1 \in T(A_{i_1}), \ldots, t_k \in T(A_{i_k})$. *Тогда эта система удовлетворяет условию монотонности для характеристик.*

ТЕОРЕМА 4.5. *Для группы* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, *где* A_i - *квазиоднородные группы без кручения, эквивалентны следующие условия:*

1) A - *вполне транзитивна;*

2) $\{A_i\}_{i \in I}$ - *вполне транзитивная система групп, причем A представима в виде* $A = \bigoplus_{p \in \Pi} A_p$, *где* $\pi(A_p) \cap \pi(A_q) = \emptyset$ *при* $p \neq q$, *каждая* $A_p = \bigoplus_{i \in I_p} A_i$, $\pi(A_i) = \pi(A_j)$ *при* $i, j \in I_p \subseteq I$, *подгруппы* A_p *однозначно определяются по группе A, и для каждого p* $\{A_i\}_{i \in I_p}$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4.4.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ - *квазиоднородная группа без кручения, где* $|I| > 1$, *существует максимальный элемент* $t \in T(A)$, *и сервантные подгруппы в* A_i *сильно неразложимы. Группа A является вполне транзитивной тогда и только тогда, когда все* A_i - *изоморфные однородные вполне транзитивные группы.*

В главе II изучаются квазисервантно инъективные и близкие к ним классы групп. Начнем с *qcpi-прупп.*

ТЕОРЕМА 5.8. *Всякая редуцированная qcpi-группа без кручения A является сервантной подпрямой суммой некоторого семейства квазиоднородных групп* $\{H_p\}_{p \in \Pi}$, *где* $H_p \in R_p$, $H_p \cong A/p^{\omega}A$, $p \in \Pi$, *а* $\Pi = \pi(A)$.

Рассмотрим теперь пример gcpi-группы, представимой в виде сервантной межпрямой суммы связанных групп, не являющейся ни квазисервантно инъективной группой, ни cs-группой.

ТЕОРЕМА 5.12. *Существует такая qcpi-группа A, что* $\bigoplus_{p \in \Pi} A_p \subsetneq A \subsetneq \prod_{p \in \Pi} A_p = \overline{S}$, *где* $\pi(A_p) \cap \pi(A_q) = \emptyset$ *при* $p \neq q$, $p,q \in \Pi$, Π - *произвольное фиксированное бесконечное множество простых чисел, A - сервантная плотная подгруппа в* $\overline{S}$, *причем A не является ни квазисервантно инъективной группой, ни cs-группой.*

Существуют qcpi-группы, не являющиеся вполне транзитивными. Поскольку из [4, теорема 3.1] следует, что однородная квазисервантно инъективная группа без кручения не допускает бесконечных прямых разложений, то следующая теорема дает пример вполне транзитивной, не квазисервантно инъективной qcpi-группы.

ТЕОРЕМА 6.7. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i \in R_p$, *где* $|I|$ N_0 *и все* A_i *суть р-однородные группы, или каждая* A_i *- такая группа, что любой ее элемент содержится в прямом слагаемом, являющемся прямым произведением (суммой) неразложимых групп, причем хотя бы одна группа* A_i *имеет ненулевой элемент максимального р-типа. Группа А является qcpi-группой тогда и только тогда, когда* $A \cong \bigoplus_{\aleph_0} Q_p^*$.

Получены и другие результаты для qcpi-групп, позволяющие описать эти группы в классах вполне разложимых, сепарабельных, векторных групп, групп без кручения конечного ранга и др. Так, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 6.9. 1) *Редуцированная вполне разложимая (векторная) группа без к р у* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ $(A = \prod_{i \in I} A_i)$ *где Ai - группы ранга 1, является qcpi-группой тогда и только тогда, когда А представима в виде* $A = \bigoplus_{j \in J} A_j$ $(A = \prod_{j \in J} A_j)$, *где* $\pi(A_k) \cap \pi(A_s) = \emptyset$ *при к s, k,s* $\in J$, *а каждая Aj является однородной конечной прямой суммой групп ранга* 1.

2) *Сепарабельная qcpi-группа без кручения вполне разложима.*

Основные результаты этой главы посвящены qpi-группам. Так, для квазиоднородных *qpi-групп* доказываются

ТЕОРЕМА 7.7. *Разложимая квазиоднородная qpi-группа без кручения А является алгебраически компактной, либо конечной прямой суммой связанных групп.*

Следующая теорема раскрывает строение qpi-групп.

ТЕОРЕМА 7.9. *Редуцированная группа А без кручения является квазисервантно инъективной тогда и только тогда, когда она представима в виде* $\bigoplus_{p \in \Pi} A_p \subseteq A \subsetneq \prod_{p \in \Pi} A_p = S$, *где А - сервантная вполне характеристическая подгруппа в S,* Π *- некоторое множество простых чисел,* $\pi(A_p) \cap \pi(A_q) = \emptyset$ *при p q, p,q* $\in \Pi$, *а* A_p *-квазиоднородные qpi-группы из* R_p.

Теорема 7.9 сводит изучение доr-групп к квазиоднородному случаю. Согласно теореме 7.7 разложимая квазиоднородная qpi-группа алгебраически компактна или является конечной прямой суммой связанных групп, число которых совпадает с ее р-рангом. Алгебраически компактные группы полностью характеризуются счетной системой инвариантов, являющихся кардиналами [21, § 40]. Таким образом, можно утверждать, что теорема 7.9 удовлетворительным образом раскрывает строение qpi-групп без кручения. Из этой теоремы можно вывести основные структурные результаты о *qpi*-группах без кручения: описание *qpi-групп* конечного ранга [4], [26], *qpi-групп* из класса *C* [4], доī-групп с циклическими р-базисными подгруппами [10]. Теорема 7.9 имеет разнообразные следствия. Так, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 7.10. *Неразложимая qpi-группа без кручения квазиоднородна и имеет мощность* $\leqslant 2^{\aleph_0}$. *Если A - квазиоднородная qpi-группа мощности* $> 2^{\aleph_0}$, *то A является однородной алгебраически компактной группой.*

Напомним, что группа *A* называется *слабо квазисервантно инъективной* (кратко *wqpi-группой)*, если всякий эндоморфизм любой ее сервантной подгруппы продолжается до эндоморфизма группы *A*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. *Пусть A - wqpi-группа. Тогда*

1) *ее прямые слагаемые, сервантные вполне характеристические подгруппы, в частности, ее периодическая часть суть wqpi-группы;*

2) *если A периодична, то факторгруппа* A/A^1 *периодически полна. В частности, если A сепарабельна (т.е.* $A^1 = 0$), *то она периодически полна.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.6. I) *Редуцированная группа* $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, *где* A_i *- группы без кручения ранга 1,* $t(A_i) = t_i$ $(i = 1,2,3)$, *является wqpi-группой тогда и только тогда, когда она однородна или для нее с точностью до перестановки прямых слагаемых* A_i *выполняется одно из утверждений:*

1) $\pi(A_1) \cap \pi(A_2 \oplus A_3) = \varnothing$;

2) $t_1 \cap t_2$, $t_1 \cap t_3$, $t_2 \cap t_3$ *- попарно несравнимые типы;*

3) $t_1 < t_2$.

Причем в случае 3) *справедливо одно из условий:*

а) $t_2 = t_3$; б) $t_3 > t_1$ *и* $?(A_2) \cap \pi(A_3) = \varnothing$; в) t_1 не сравним с t_3 *и или* $t_3 < t_2$, *или* $?(A_2) \cap \pi(A_3) = \varnothing$.

II) *Если* $A — \bigoplus_{i \in I} A_i$ *- такая вполне разложимая группа, что* $r(A_i) = 1$, $t(A_i) = t_i$ *и тип* $ti_1 \cap \ldots \cap ti_n$ *не сравним с* $tj_1 \cap \ldots \cap tj_m$ *для любых конечных подмножеств* $I_n = \{i_1, \ldots, i_n\}$, $J_m = \{j_1, \ldots, j_m\} \subsetneq I$ *с условием* $I_n \backslash J_m$, $J_m \backslash I_n$ $\varnothing$, *то A является wqpi-группой.*

Если класс сепарабельных периодических *wqpi*-групп совпадает с классом *qpi*-групп, то предложение 8.6 дает много примеров *wqpi*-групп, не являющихся *qpi*-группами, такие группы существуют уже среди групп без кручения ранга 2. Однако в некоторых случаях оба эти классы групп совпадают.

ТЕОРЕМА 8.8. *Однородная разложимая wqpi-группа является квазисервантно инъективной группой.*

ТЕОРЕМА 8.11. *Редуцированная вполне транзитивная группа без круче-*

ния A *является wqpi-группой тогда и только тогда, когда* $\bigoplus_{p\in\Pi} A_p \subseteq A \subseteq \prod_{p\in\Pi} A_p = S$, *где* A *- сервантная вполне характеристическая подгруппа в* S, Π *- некоторое множество простых чисел,* $\pi(A_p) \cap \pi(A_q) = \emptyset$ *при* p $q, p, q \in \Pi$, *а* A_p *- квазиоднородные вполне транзитивные wqpi-группы.*

СЛЕДСТВИЕ 8.12. 1) *Если* A *- однородная wqpi-группа, то* A *неразложима* $\Longleftrightarrow$ *все ее сервантные подгруппы сильно неразложимы* $\Longleftrightarrow$ *все ее ненулевые эндоморфизмы есть мономорфизмы.*

2) *Всякая квазиоднородная вполне транзитивная wqpi-группа, множество типов всех ненулевых элементов которой содержит максимальные элементы, является квазисервантно инъективной.*

3) *Всякая вполне транзитивная wqpi-группа из класса* $\mathcal{L}$ *является квазисервантно инъективной.*

Группы без кручения с циклическими p-базисными подгруппами образуют интересный и важный класс абелевых групп, их можно рассматривать как обобщение групп ранга 1. Справедлива

ТЕОРЕМА 8.13. *Редуцированная группа без кручения* A *с циклическими p-базисными подгруппами является wqpi-группой тогда и только тогда, когда она представима в виде* $\bigoplus_{p\in\Pi} A_p \subseteq A \subseteq \prod_{p\in\Pi} A_p = S$, *где* A *сервантная вполне характеристическая подгруппа в* S, Π *- некоторое множество простых чисел.* $\pi(A_p) \cap \pi(A_q) = \emptyset$ *при* p q, *а* A_p *- связанные wqpi-группы.*

В главе III содержатся результаты о cs-группах. Следующая теорема выясняет строение cs-групп без кручения. Предварительно условимся называть идемпотенты π, θ кольца $E(S)$ абелевой группы S *эквивалентными,* если $\pi S = \theta S$.

ТЕОРЕМА 9.2. *Редуцированная группа* A *без кручения является cs-группой тогда и только тогда, когда она представима в виде* $\bigoplus_{p\in\Pi} A_p \subseteq A \subseteq \prod_{p\in\Pi} A_p = S$, *где* A *- сервантная подгруппа в* S, $E(A)$ *вкладывается в кольцо* $E(S)$ *и содержит хотя бы один элемент из каждого класса эквивалентных идемпотентов этого кольца,* Π *- некоторое множество простых чисел,* $\pi(A_p) \cap \pi(A_q) = \emptyset$ *при* p q, $p, q \in \Pi$, *а каждая* A_p *- квазиоднородная cs-группа из* R_p *конечного p-ранга или* Q^*_p*-модулъ.*

СЛЕДСТВИЕ 9.3. *Редуцированная cs-группа* A *без кручения мощности* $< 2^{\aleph_0}$ *представима в виде* $A = \bigoplus_{p\in\Pi} A_p$, *где* $\pi(A_p) \cap \pi(A_q) = \emptyset$ *при* p q, $p, q \in \Pi$, Π *- некоторое множество простых чисел, а каждая* A_p *является прямой суммой конечного числа связанных групп.*

Подгруппы A_p из теоремы 9.2 являются вполне характеристическими прямыми слагаемыми в А и восстанавливаются по группе A однозначно. В силу этой теоремы изучение cs-групп сводится к квазиоднородному случаю. Перейдем к квазиоднородным cs-группам.

Неразложимая редуцированная cs-группа без кручения A связанна, поэтому $|A|$ $2^{\aleph_0}$ и $r_p(A)$ 1 для каждого р $\in \pi(A)$. На связь р-ранга и мощности cs-группы с ее строением указывает следующий результат.

ТЕОРЕМА 10.1. *cs-группа из R_p, имеющая алгебраически компактное прямое слагаемое бесконечного р-ранга или имеющая р-ранг* $2^{\aleph_0}$, *алгебраически компактна. В частности, всякая cs-группа из Rp мощности* $> 2^{\aleph_0}$ *алгебраически компактна.*

СЛЕДСТВИЕ 10.2. *Пусть* $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ $(A = \prod_{i\in I} A_i)$, *где* $A_i \in R_p$ *и* $|I|$ $\aleph_0$. *Группа А является cs-группой тогда и только тогда, когда* $A \cong \bigoplus_{\aleph_0} Q_p^*$ *(А - алгебраически компактная группа).*

Получена характеризация квазиоднородных cs-групп конечного р-ранга.

Чтобы проиллюстрировать различие рассматриваемых классов групп, приведем простые примеры.

ПРИМЕР 11.9. *Пусть А - редуцированная однородная сепарабельная группа без кручения. Тогда А вполне транзитивна. А является слабо квазисервантно инъективной, qcpi-группой, cs-группой тогда и только тогда, когда ее ранг конечен.*

ПРИМЕР 11.10. *Пусть* A_p *- собственная сервантная подгруппа группы* Q^*_p *такая, что* $|Q^*_p/A_p| < 2^{\aleph_0}$ *Тогда* $A = \bigoplus_{p\in\Pi} A_p$ $(A — \prod_{p\in\Pi} A_p)$ *является не вполне транзитивной cs-группой, здесь* Π *- произвольное множество простых чисел.*

ПРИМЕР 11.11. *Пусть* $A_p = \bigoplus_{n_p} Q^*_p$, *где* n_p *- некоторое кардинальное число* $(p \in \Pi)$. *Тогда* $A = \bigoplus_{p\in\Pi} A_p$ $(A = \prod_{p\in\Pi} A_p)$ *является вполне транзитивной группой; А будет cs-группой* $\Longleftrightarrow$ n_p No; *А слабо квазисервантно инъективна* $\Longleftrightarrow$ $n_p <$ No *для каждого* $p \in \Pi$.

Глава IY. Изучаются произвольные cs-группы. Предварительно остановимся на следующем интересном классе. Абелеву группу A назовем qc-группой, если замыкание в Z-адической и в р-адической топологии для каждого простого р любой ее сервантной подгруппы является сервантной подгруппой в A. Ясно, что это более широкий класс, чем класс cs-групп. Поскольку Z-адическая топология более сильная, чем р-адическая, то если A - дс-группа, то в определении cs-групп достаточно ограничиться Z-адической топологией для того, чтобы она оказалась cs-группой. Периодические qc-группы - это в точности квазиполные группы, изучавшиеся в ряде работ [21, § 87]. Всякая группа без кручения является qc-группой. Поэтому перейдем к смешанному случаю. Обозначим через tA - периодическую часть, A_p - p-компоненту (это наибольшая p-подгруппа) группы A; $\gamma_p(A)$ - ее p-ранг без кручения, т.е. ранг без кручения [21, § 16] p-базисной подгруппы. Если H - подгруппа группы A, то через H^A (соответственно $H^-_{p,A}$) обозначим замыкание в Z-адической (соответственно в p-адической) топологии группы ее подгруппы H.

Приведем несколько замечаний, поясняющих это понятие.

1) *Редуцированная группа A является qc-группой тогда и только тогда, когда для любой сервантной подгруппы G в A утверждение "G замкнута в Z-адической топологии" (соответственно в p-адической топологии) эквивалентно утверждению "A/G - редуцированная группа" (p-редуцированная группа).*

2) *Если A - qc-группа, то A^1 - ее делимая часть.*

Это следствие того, что $0^\wedge = A^1$.

3) *Любая группа без кручения является qc-группой. Периодическая группа является qc-группой тогда и только тогда, когда она квазиполна.*

4) *Группа A является qc-группой тогда и только тогда, когда для каждого простого числа p и произвольной p-сервантной подгруппы G в A следует, что подгруппа G^-_p сервантна в A.*

5) *В группе A утверждение "для любой p-сервантной подгруппы G в A следует, что подгруппа G^-_p сервантна в A" справедливо в том и только в том случае, когда соответствующее утверждение выполняется в $A/p^\omega A$, причем $p^\omega A$ - сервантная подгруппа в A.*

Вытекает из того, что $0^\sim = p^\wedge A \subseteq G^-_p$ для любой подгруппы G в A.

6) *Редуцированная смешанная группа A является qc-группой тогда и только тогда, когда tA - квазиполная группа, $A^1 = 0$ и для каждого простого p условие "H - p-сервантная подгруппа без кручения (включая $H = 0$)" влечет H^-_p - p-сервантная подгруппа в A.*

Свойство 3) сводит изучение qc-групп к смешанному случаю. Справедлива

ТЕОРЕМА 13.1. *Пусть A -редуцированная смешанная qc-группа с бесконечным $\gamma_p(A)$. Тогда подгруппа A_p периодически полна.*

СЛЕДСТВИЕ 13.2. 1) *Копериодическая группа является qc-группой тогда и только тогда, когда она алгебраически компактна;*

2) *если A_p - прямое слагаемое в A для каждого простого числа p, то A является qc-группой тогда и только тогда, когда tA - квазиполная группа, причем бесконечность $\gamma_p(A)$ влечет периодическую полноту подгруппы A_p;*

b) tA периодически полна. Тогда A является qc-группой;

3) *пусть A - такая смешанная группа, что tA периодически полна. Тогда A является qc-группой;*

4) *редуцированная qc-группа A изоморфна некоторой сервантной подпрямой сумме групп A_i, где $p^w_i A_i = 0$, г пробегает некоторое множество* Π *различных простых чисел,* $(A_i)_{Pi} \cong A_{Pi}$, *и* $G_{pi,Ai}$ *есть pi-сервантная подгруппа в A_i для любой Pi-сервантной подгруппы G в A_i.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.1. *Пусть A - такая смешанная группа, что $p^w A = 0$, $T = tA$ - p-группа и факторгруппа A/T делима. A является cs-группой тогда и только тогда, когда T периодически полна, и A - такая сервантная подгруппа своего p-адического пополнения $\widehat{A}$, что $E(A) \subseteq E(\widehat{A})$, причем $E(A)$ содержит хотя бы один представитель из каждого класса эквивалентных идемпотентов кольца $E(\widehat{A})$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.2. *Если B - p-редуцированная cs-группа без кручения, F - cs-группа из предложения* 14.1 (*соответственно -редуцированная периодически полная p-группа), то $A = B \oplus F$ является cs-группой тогда и только тогда, когда*

1) *для любых $b \in B$, $g \in F$ со свойствами $o(g) =$ и $h_p(b)$ $h_p(g)$ существует гомоморфизм $f : B$ F такой, что $fb = g$;*

2) *бесконечность p-ранга группы B влечет алгебраическую компактность (соответственно ограниченность) F.*

ТЕОРЕМА 14.3. *Редуцированная смешанная группа A является cs-группой тогда и только тогда, когда A представима в виде $\bigoplus_{i\in I} A_i \subseteq A \subseteq \prod_{i\in I} A_i = S$, где $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) = \emptyset$ при i j, A_i ($i \in I$) - однозначно определяемая по группе A cs-группа со свойством $p^w_i A_i = 0$ для некоторого простого p_i, являющаяся либо pi-группой, либо группой без кручения, либо смешанной группой из предложения* 14.1 *или* 14.2, *а A - такая сервантная подгруппа в S, что $E(A) \subseteq E(S)$ и $E(A)$ содержит хотя бы один представитель из каждого класса эквивалентных идемпотентов кольца $E(S)$.*

В заключение в работе доказываются две новые характеризации алгебраически компактных групп. Так, справедлива

ТЕОРЕМА 15.1. *Группа A из R_p бесконечного p-ранга обладает свойством, что для любого разложения $B = B_1 \oplus B_2$ каждой ее p-базисной подгруппы B имеет место разложение $A = \bar{B}_1 \oplus \bar{B}_2$, где $\bar{B}_i$ - замыкание* *в р-адической топологии группы A ее подгруппы B_i ($i = 1, 2$), тогда и только тогда, когда A алгебраически компактна.*

Подобный результат был известен для периодически полных групп [38]. Кроме того, доказывается, что абелевы группы, выделяющиеся прямыми слагаемыми в каждой группе, в которой они содержатся в качестве замкнутых в Z-адической топологии сервантных подгрупп, суть алгебраически компактные группы (теорема 15.3).

Основными результатами работы являются теоремы 2.7, 2.8, 2.9, 2.12, 4.5, 5.8, 5.12, 7.7, 7.9, 8.8, 8.11, 9.2, 10.1, 14.3, 15.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Наука, 1966.

2. Гриншпон С.Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1982. С. 56-92.

3. Гриншпон С.Я., Мисяков В.М. О вполне транзитивных абелевых группах // Абелевы группы и модули. № 6. Томск, 1986. С. 12-27.

4. Добрусин Ю.Б. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1980. С. 45-69.

5. Добрусин Ю.Б. О расщепляющихся квазисервантно инъективных группах // Абелевы группы и модули. Томск, 1984. С. 11-23.

6. Добрусин Ю.Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. № 5. Томск, 1985. С. 31-41; № 4. Томск, 1986. С. 36-53.

7. Иванов А.М. Об одном свойстве *p*-сервантных подгрупп группы целых р-адических чисел. Матем. заметки. 1980. Т. 27. № 6. С. 859-867.

8. Крылов П.А. Сильно однородные абелевы группы без кручения // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. № 2. С. 77-84.

9. Крылов П.А. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. № 7. Томск, 1988. С. 81-99.

10. Крылов П.А. Об одном классе квазисервантно инъективных абелевых групп // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 4. С. 53-58.

11. Крылов П.А. Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 549-560.

12. Куликов Л.Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. 1941. Т. 9. С. 165-182; 1945. Т. 16. С. 129-162.

13. Куликов Л.Я. Обобщенные примарные группы // Труды Моск. матем. об-ва. 1952. Т. 1. С. 247-326; 1953. Т. 2. С. 85-167.

14. Курош А.Г. Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range // Ann. of Math. 1937. V. 38. P. 175-203.

15. Мальцев А.И. Абелевы группы конечного ранга без кручения // Матем. сб. 1938. Т. 4. С. 45-68.

16. Мишина А.П. Абелевы группы // Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). Т. 17. 1979. С. 3-63; Т. 23. 1985. С. 51-118.

17. Мишина А.П., Михалев А.В. Бесконечные абелевы группы: методы и результаты // Фундамент, и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 2. С. 319-375.

18. Понтрягин Л.С. The theory of topological commutative groups // Ann. of Math. 1934. V. 35. P. 361-388.

19. Пунинский Г.Е., Туганбаев А.А. Кольца и модули. М.: Союз, 1998.

20. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977; Т. 2. М.: Мир, 1979.

21. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974; Т. 2. М.: Мир, 1977.

22. Черников С.Н. Группы с системами дополняемых подгрупп // Матем. сб. 1954. Т. 35. С. 93-128.

23. Яковлев А.В. К проблеме классификации абелевых групп без кручения конечного ранга // Зап. научн. семинара ЛОМИ АН СССР. 1976. Т. 57. С. 171-175.

24. Arnold D.M. Finite rank torsion-free abelian groups and rings // Lecture Notes Math. 1982. V. 931.

25. Arnold D.M. Strongly homogeneous torsion-free abelian groups of finite rank // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 56. P. 67-72.

26. Arnold D.M., O'Brien B., Reid J.D. Quasi-pure injective and projective torsion-free abelian groups of finite rank // Proc. London Math. Soc. 1979. V. 38. № 3. P. 532-544.

27. Baer R. Abelian groups without elements of finite order // Duke Math. J. 1937. V. 3. P. 68-122.

28. Benabdallah K. Groupes abéliens sans torsion. Montréal, 1981.

29. Derry D. Über eine Klasse von abelschen Gruppen // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. P. 490-506.

30. Dugas M., Shelah S. E-transitive groups in *L* // Contemp. Math. 1989. V. 87. P. 191-199.

31. Files S. On transitive mixed abelian groups // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 1996. V. 182. P. 243-251.

32. Fomin A.A. Abelian Groups in Russia // Rocky Mountain J. Math. 2002. V. 32. № 4.

33. Goeters H.P., Vinsonhaler C, Wickless W. A generalization of quasi-pure injective torsion-free abelian groups of finite rank // Houston J. Math. 1996. V. 22. № 3. P. 473-484.

34. Goeters H.P., Wickless W.J. Qqpi-groups and quasi-equvalence // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. № 11 . P. 3145-3150.

35. Hausen J. E-transitive torsion-free abelian groups // J. Algebra. 1987. V. 107. № 1. P. 17-27.

36. Kaplansky I. Infinite abelian groups. Ann. Arbor. Michigan, 1954.

37. Krylov P.A. Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A. Properties of Endomorphism Rings of Abelian Groups, II // J. Math. Sci. 2003. V. 113. № 1. P. 1-174.

38. Koyama T., Irwin J. On topological methods in Abelian groups // Etudes groupes abéliens. 1968. P. 207-222.

39. Mader A. Almost completely decomposable groups. Gordon and Breach, Amsterdam, 2000.

40. Prüfer H. Untersuchunger über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären abelshen Gruppen // Math. Z. 1923. V. 17. P. 35-61.

41. Prüfer H. Theorie der abelshen Gruppen, I // Grundeigenschaften. Math. Z. 1924. V. 20. P. 165-187; II. Ideale Gruppen, ibid., 1925. V. 22. P. 222-249.

42. Ulm H. Zur Theorie der abzählbar-unendlichen abelschen Gruppen // Math. Ann. 1933. V. 107. P. 774-803.

Работы автора по теме диссертации

43. Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения, близкие к квазисервантно инъективным // Тез. сообш. 17 Всесоюзн. алг. конф. Минск. 1983. Ч. 2. С. 260-261.

44. Чехлов А.Р. О некоторых классах абелевых групп // Абелевы группы и модули. Томск, 1984. С. 137-152.

45. Чехлов А.Р. Об абелевых CS-группах без кручения // Тез. докл. 9 Всесоюзн. симп. по теории групп. Москва. 1984. С. 165-166.

46. Чехлов А.Р. О некоторых классах абелевых групп без кручения, близких к квазисервантно инъективным // Изв. вузов. Матем. 1985. № 8. С. 82-83.

47. Чехлов А.Р. Об абелевых группах без кручения, близких к квазисервантно инъективным // Абелевы группы и модули. № 5. Томск, 1985. С. 117-127.

48. Чехлов А.Р. Об абелевых QCPI-группах без кручения // Тез. сообщ. 18 Всесоюзн. алг. конф. Кишинев. 1985. Ч. 2. С. 271.

49. Чехлов А.Р. Строение квазисервантно инъективных абелевых групп без кручения // Тез. сообщ. 19 Всесоюзн. алг. конф. Львов. 1987. Ч. 1. С. 310.

50. Чехлов А.Р. Абелевы CS-группы без кручения // Абелевы группы и модули. № 7. Томск, 1988. С. 131-147.

51. Чехлов А.Р. О квазисервантно инъективных абелевых группах без кручения // Изв. вузов. Матем. 1988. № 6. С. 80-83.

52. Чехлов А.Р. О квазисервантно инъективных абелевых группах без кручения // Абелевы группы и модули. № 8. Томск, 1989. С. 139-153.

53. Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения с заданными свойствами сервантных подгрупп // Междун. конф. по алг. Тез. докл. по теории групп. Новосибирск. 1989. С. 136.

54. Чехлов А.Р. Связные квазисервантно инъективные абелевы группы // Изв. вузов. Матем. 1989. № 10. С. 84-87.

55. Чехлов А.Р. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 3. С. 93-99.

56. Чехлов А.Р. Об абелевых CS-группах без кручения // Изв. вузов. Матем. 1990. № 3. С. 84-87.

57. Чехлов А.Р. О прямых произведениях и прямых суммах абелевых *QCPI-групп* без кручения // Изв. вузов. Матем. 1990. .№ 4. С. 58-67.

58. Чехлов А.Р. Об абелевых разложимых QCPI-группах без кручения p-ранга $2^{\aleph_0}$ // Абелевы группы и модули. № 9. Томск, 1990. С. 125-130.

59. Чехлов А.Р. Конечные прямые суммы связанных групп с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Тез. сообщ. 6 Всесоюзн. симп. по теории колец, алгебр и модулей. Львов. 1990. С. 144-145.

60. Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения конечного p-ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Абелевы группы и модули. № 10. Томск, 1991. С. 157-178.

61. Чехлов А.Р. Об абелевых QCS-группах без кручения // Абелевы группы и модули. № 11, 12. Томск, 1994. С. 240-245.

62. Беккер И.Х., Крылов П.А., Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули. № 11, 12. Томск, 1994. С. 3-52.

63. Чехлов А.Р. Квазисервантно инъективные группы без кручения конечного p-ранга // Изб. докл. Междун. конф. "Всесиб. чтения по матем. и механ." Томск. 1997. Т. 1. С. 220-224.

64. Чехлов А.Р. О вполне транзитивных системах групп без кручения // Исслед. по матем. анализу и алгебре. Томск. 1998. С. 240-245.

65. Чехлов А.Р. О вполне транзитивных группах без кручения // Унив. алгебра и ее приложения. Тез. докл. Междун. семин. Волгоград. 1999. С. 72-73.

66. Чехлов А.Р. О вполне транзитивных системах групп без кручения, 2 // Исслед. по матем. анализу и алгебро. Томск. 2000. С. 181-190.

67. Чехлов А.Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Тез. докл. 4 Междун. алг. конф. Новосибирск. 2000. С. 185-186.

68. Чехлов А.Р. Квазисервантно инъективные группы без кручения с неразложимыми сервантными подгруппами // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 4. С. 587-592.

69. Чехлов А.Р. О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 3. С. 714-719.

70. Чехлов А.Р. Смешанные абелевы группы с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Тез. докл. 3 Междун. алг. конф. в Украине. Сумы. 2001. С. 274-276.

71. Чехлов А.Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944-949.

72. Чехлов А.Р. Вполне транзитивные группы без кручения конечного *p*-ранга // Алгебра и логика. 2001. Т. 40. № 6. С. 698-715.

73. Krylov P.A., Chekhlov A.R. Torsion-Free Abelian Groups with a Large Number of Endomorphisms // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 2. 2001. P. S156-S168.

74. Чехлов А.Р. О SQPI-группах // Тез. докл. Междун. семин. по теории групп. Екатеринбург. 2001. С. 236-239.

75. Чехлов А.Р. Квазиполные смешанные группы // Тез. докл. Междун. конф. "Алгебра и ее приложения." Красноярск. 2002. С. 127.