0-734651

На правах рукописи

Шевченко Геннадий Васильевич

МЕТОД СИМПЛЕКСНЫХ ПОКРЫТИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск - 2002

Работа выполнена в Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
В.М. Александров

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор А.М. Хлуднев

кандидат технических наук,
доцент Р.М. Ларин

Ведущая организация — Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Защита состоится "19" декабря 2002 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета К 003.015.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "15" ноября 2002 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н. В.Л. Мирошниченко

0734651

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Математическая теория оптимального управления интенсивно развивается с начала 60-х годов с появлением принципа максимума Л.С. Понтрягина и динамического программирования Р. Беллмана. Разнообразие идей и методов теории оптимального управления вызвано сложностью рассматриваемых задач. Трудности при решении задач оптимального управления вызваны необходимостью решать краевую задачу, большой размерностью систем, наличием ограничений на управления и фазовые координаты, многоэкстремальностью, сложным характером нелинейностей, действием на систему различного рода возмущений, вырожденностью задач. Характерным для задач оптимального управления является то, что аналитическое решение задачи удается получить лишь в редких случаях. Поэтому большую роль играют численные методы построения оптимального управления. Потребности практики и бурный прогресс вычислительной техники стимулировали разработку вычислительных методов оптимального управления. Значительный вклад в разработку численных методов решения задач оптимального управления сделан в работах Л. Нейштадта, Дж. Итона, Р.Ф. Габасова, Ф.М. Кирилловой, Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Моисеева, Б.Н. Пшеничного, Р.П. Федоренко, О.В. Васильева, Ф.П. Васильева, В.Ф. Демьянова, Н.Е. Кирина, Б.Т. Поляка, А.А. Любушина, Ю.Г. Евтушенко, А. Майля, Э. Полака, Ю.М. Ермольева и других авторов.

В силу многообразия решаемых задач и возникающих трудностей не существует универсального численного метода решения задач оптимального управления. Каждый метод обладает определенными достоинствами и недостатками. Поэтому актуальна проблема разработки новых численных методов решения задач оптимального управления, максимально учитывающих специфику решаемых задач и обладающих малой вычислительной трудоемкостью.

Целью работы является:

— разработка эффективных численных методов решения линейных задач оптимального управления на основе метода симплексных покрытий.

Методы исследования. При разработке численных медотов использовались теория оптимального управления, функциональный анализ, теория и методы решения систем дифференциальных уравнений.

Научная новизна.

Предложен метод покрытия внутренности строго выпуклых компактных тел n-мерными смежными симплексами.

На основе его *разработаны:*

— численный метод решения задачи линейного оптимального быстродействия и предложена его модификация, не требующая решения вспомогательных задач квадратичного программирования;

— численный метод решения задачи оптимального по быстродействию перевода линейной системы на выпуклый компакт;

— численный метод решения линейной задачи минимизации ресурсов;

— численный метод решения линейной задачи с фиксированными концами и минимизацией однородного выпуклого функционала.

Теоретическая и практическая ценность. Теоретическое значение диссертации состоит в разработке новых численных методов решения линейных задач оптимального управления. Практическая ценность заключается в простоте алгоритмической и программной реализации предложенных методов.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

The IASTED International Conference Automation, Control, and Information Technology (Novosibirsk, 2002);

XII Байкальской международной конференции (Иркутск, 2001);

Четвертом Сибирском конгрессе по прикладной и индустральной

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАЗАНСКОГО ГОС. УНИВЕРСИТЕТА

математике (Новосибирск, 2000);

The Third International Conference Differential Equations and Applications (Saint Peterburg, 2000);

International Conference "Mathematics in Applications" (Novosibirsk, 1999);

International Workshop "Nonsmooth and Discontinuons Problem of Control and Optimization"(Chelyabinsk, 1998);

11-й Байкальской Международной школе-семинаре "Методы оптимизации и их приложения" (Иркутск, 1998);

Третьем Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 1998);

Third International Workshop "New Computer Technologies in Control Systems" (Pereslavl-Zalessky, 1996);

Втором Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 1996);

10-й Байкальской школе-семинаре "Методы оптимизации и их приложения" (Иркутск, 1995);

Международном семинаре "Методы и программное обеспечение для исследования систем автоматического управления" (Иркутск, 1991);

Всесоюзном семинаре "Системы управления, следящие приводы и их элементы" (Москва, 1991);

Международной школе-семинаре "Методы оптимизации и их приложения" (Иркутск, 1989);

Международном советско-польском семинаре "Математические методы оптимального управления и их приложения"(Минск, 1989).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1-10].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 110 страниц. Список литературы содержит 135 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении отмечена актуальность работы, дается обзор и краткий анализ существующих подходов и методов решения задач оптимального управления, изложены основные результаты и краткое содержание работы.

Первая глава посвящена описанию метода покрытия внутренности строго выпуклых компактных тел из R^n смежными п-мерными симплексами, вершины которых лежат на границе тела, и его использованию для разработки и обоснования новых численных методов решения линейных задач оптимального быстродействия и задач перевода линейной системы на строго выпуклый компакт.

В разделе 1.1 дана постановка задачи линейного быстродействия. Пусть управляемый объект описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u(t), \quad x(0) = x^{\circ}, \tag{1.1}$$

где $x \in R^n$ - фазовый вектор состояния объекта, $A(t)$ и $B(t)$ - непрерывные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times s$ соответственно, $u \in R^s$ - измеримое управление, стесненное ограничением

$$u(t) 6 U. \tag{1.2}$$

Здесь U - выпуклый телесный компакт из R'', содержащий внутри начало координат.

Предполагается, что система (1.1) является полностью управляемой и переводима из начального состояния x° в начало координат допустимыми управлениями.

Задача 1.1. *Найти допустимое управление $u^{\circ}(i)$, t 6 [О,Г] (1.2), переводящее систему* (1.1) *из начального состояния $x(0) = x^{\circ}$ за минимально возможное время $T = T_O nm$ в начало координат.*

Область достижимости R(T) системы (1.1) из состояния x° за время Г при сделанных предположениях является для любого конечного

T строго выпуклым компактным телом в R^n. Описан метод построения покрытия строго выпуклого компактного тела из R^n смежными n-мерными симплексами, вершины которых лежат на границе тела. Доказана

Теорема 1.1 (о покрытии). *Внутренность любого строго выпуклого компактного тела Ω в R^n можно покрыть n-мерными симплексами с вершинами на границе Ω.*

Пусть Σ_k обозначает *k-й.* слой покрытия тела Ω. В *к-м* слое покрытия находятся только симплексы, которые смежны какому-либо симплексу из *к* — 1-го слоя.

Из теоремы вытекают два полезных следствия.

Следствие 1.1. *Пусть Ω — строго выпуклое компактное тело в R^n и $z^\circ \in int\,\Omega$. Тогда для любого покрытия ее внутренности $\Sigma = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Sigma_k$ существуют такое конечное $к_o$* О *и такой n-мерный симплекс $\sigma \in \bar{\Sigma}_{k_0}$, что $z^\circ \in \sigma$.*

Следствие 1.2. *Пусть $\bar{\Omega}$ — строго выпуклое компактное тело в R^n и $z^0 \notin \Omega$. Тогда для любого покрытия ее внутренности $\Sigma = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Sigma_k$ существует такое конечное $к_o$* О, *что в $к_o$-м слое находится по крайней мере один n-мерный симплекс σ, у которого опорная к его некоторой вершине гиперплоскость является строго отделяющей множество Ω от точки z°.*

В разделе 1.2 описан численный метод решения (основной алгоритм), использующий симплексы из покрытия внутренности областей достижимости R(T), который генерирует конечную последовательность смежных n-мерных симплексов $\{\sigma^k\}$, обладающих свойством

$$\rho(\sigma^k) \geq \rho(\sigma^{k+1}),$$

где $\rho(\sigma^k)$ — расстояние от начала координат до n-мерного симплекса σ^k.

В разделе 1.3 доказаны вспомогательные утверждения, которые используются как при разработке численных методов, так и при обосновании их сходимости. Доказана

Теорема 1.2 (о сходимости). *Для любого $\varepsilon > 0$ основной алгоритм через конечное число итераций дает е-оптимальное решение.*

Под ε-оптимальным решением понимается любая пара {T, $u'(t)$}, где T $T_{опт}$, а допустимое управление $u'(t)$, $t \in [0,T]$, переводит систему (1) из x° в ε-окрестность начала координат.

В разделе 1.4 приведены результаты численного решения задачи линейного быстродействия.

В разделе 1.5 установлена связь между коэффициентами разложения решения вспомогательной задачи квадратичного программирования

$$\min_{x \in \sigma} \frac{1}{2}\|x\|^2, \tag{*}$$

где σ — n-мерный симплекс с вершинами с вершинами $z^i \in \partial\mathbf{R}(T)$, коэффициентами разложения начала координат R^n и коэффициентами разложения конца траетории свободного движения системы (1.1) ($u(t)$ =O, $t \in [0,T]$) по вершинам симплекса σ.

Лемма 1.4. *Пусть* $\sigma = [z^1, z^2, \ldots, z^{n+1}]$ — n*-мерный симплекс,* $z^i \in \partial\mathbf{R}(T_k)$ $(i = \overline{1, n+1})$, $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{n+1}^0)$ — *решение системы линейных алгебраических уравнений* (1.7), *причем* $\lambda_{i_1}^0, \ldots, \lambda_{i_r}^0 < 0$. *Тогда*

$$\rho(\sigma) = \rho([z^1, z^2, \ldots, z^{i_0-1}, z^{i_0+1}, \ldots, z^{n+1}]), \tag{1.13}$$

где индекс i_0 *определяется так*

$$i_0 = \begin{cases} \textit{любому индексу } i \in \Xi = \{i \in \Lambda : \lambda_i^0 + w_i \le 0\}, \ \textit{если } \Xi \ne \emptyset \\ arg \max\limits_{i \in \Lambda}(-\lambda_i^0 / w_i), \ \textit{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

$w_i = (Z_i^+, \Phi(T_k, 0)x^0)$, Z_i^+ — *n первых элементов i-й строки обратной матрицы системы* (1.7), $\Lambda = \{\lambda_{i_1}^0, \ldots, \lambda_{i_r}^0\} = \{i : \lambda_i^0 < 0\}$.

Эта связь позволила разработать модифицированный алгоритм, не требующий решения вспомогательных задач квадратичного программирования (*).

В разделе 1.6 дано обоснование сходимости модифицированного алгоритма. Показано, что он для любого $\varepsilon > 0$ через конечное число итераций двет ε-оптимальное решение.

В разделе 1.7 дан сравнительный анализ численных решений, полученных модифицированным алгоритмом, с численными результатами, приведенными в разделе 1.4.

В разделе 1.8 дана постановка задачи оптимального по быстродействию перевода линейной системы на заданный строго выпуклый компакт. Пусть управляемый объект описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1). На управления наложены ограничения (1.2).

Задача 1.2. *Требуется найти допустимое управление $u^{\circ}(t)$,* $(t \in [0,T])$ (1.2), *переводящее систему* (1.1) *из начального состояния $x(0) = x^{\circ}$ на заданный строго выпуклый компакт $G \subset R^n$ за минимально возможное время $T = T_{опт}$.*

Предполагается, что система (1.1) полностью управляема и переводима на компакт *G*.

Дано обобщение основного алгоритма для решения задачи 1.2. В описанном алгоритме 1.3 строятся две конечных последовательности смежных симплексов, входящих одна в покрытия внутренностей областей достижимости, другая в покрытие внутренности компакта *G*. Доказана

Теорема 1.3 (о сходимости). *Для любого* $\varepsilon > 0$ *алгоритм* 1.3 *через конечное число итераций дает* ε*-оптимальное решение.*

Под ε-оптимальным решением понимается пара $\{T, u^{\varepsilon}(t)\}$, такая, что $\mathbf{R}(T) \bigcap G = \emptyset$ и под действием управления $u^{\varepsilon}(t), t \in [0,T]$ система (1.1) переходит на множество $\{x \in \partial\mathbf{R}(T) : \min\limits_{y \in G} \|x - y\| \le \varepsilon\}$.

Вторая глава посвящена описанию численного метода решения задачи минимизации расхода ресурсов.

В разделе 2.1 дана постановка задачи. Пусть движение управляемого объекта описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1). На управления наложены ограничения

$$|u_j(t)| \le 1 \, (j = \overline{1,s}) \, , t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Предполагается, что система (1.1) полностью управляема и переводима допустимыми управлениями в начало координат.

Задача 2.1. *Требуется найти допустимое управление $u^{\circ}(t)$, $(t \in [0,T])$, переводящее систему* (1.1) *за фиксированное время T в* *нулевое конечное состояние* $x(T) = 0$ *и минимизирующее функционал*

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^T \sum_{j=1}^s \alpha_j |u_j(t)| dt, \qquad (2.3)$$

где $\sum_{j=1}^s \alpha_j \neq 0,\ \alpha_j \geq 0.$

Кратко описан вычислительный алгоритм решения поставленной задачи, генерирующий последовательность смежных симплексов $\{\sigma^k\}$ с вершинами, которым соответствуют экстремальные управления, доставляющие одно и тоже значение $\mathcal{I}$ функционалу (2.3), до момента, когда начало координат окажется внутри очередного симплекса σ^{k_0}. Затем значение $\mathcal{I}$ полагается равным $\gamma \cdot \mathcal{I}$, где $0 < \gamma < 1$ — вполне определенное число, и вновь генерируется последовательность. И т. д. пока вновь вводимая вершина симплекса не попадет в ε-окрестность начала координат.

В разделе 2.2 дано полное формальное описание алгоритма решения задачи 2.1 (алгоритма 2.1).

В разделе 2.3 приведено обоснование сходимости алгоритма 2.1. Доказана

Теорема 2.1. *Алгоритм* 2.1 *при любом* $\varepsilon > 0$ *через конечное число итераций дает e-оптимальное решение.*

Под ε_1-оптимальным решением понимается экстремальное управление, переводящее систему (1.1) в ε_1-окрестность начала координат.

В разделе 2.4 обсуждены вычислительные аспекты численного решения задачи минимизации расхода ресурсов алгоритмом 2.1. Приведены численные результаты решения задач.

В главе 3 дано обобщение численного решения задачи минимизации расхода ресурсов на решение задачи с минимизацией строго выпуклого интегрального однородного функционала.

В разделе 3.1 дана постановка задачи. Пусть движение управляемого объекта описвыается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1). На управления наложены ограничения (2.2).

Предполагается, что система (1.1) полностью управляема и переводима допустимыми управлениями в начало координат.

Задача 3.1. *Требуется найти допустимое управление $u^0(t)$ ($t \in [0, T]$), переводящее систему (1.1) за фиксированное время $T > 0$ в нулевое конечное состояние $x(T) = 0$ и минимизирующее функционал*

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^T W(u(t))dt, \tag{3.3}$$

где $W(u)$ — выпуклая неотрицательная однородная функция степени $\beta \geq 1$.

Дано краткое геометрическое описание численного метода решения поставленной задачи.

В разделе 3.2 дано полное формальное описание алгоритма 3.1 решения задачи 3.1.

В разделе 3.3 дано обоснование сходимости алгоритма 3.1. Показано, что для любого $\varepsilon > 0$ он через конечное число итераций дает ε-оптимальное решение.

В разделе 3.4 для частного случая функционала (3.3), когда $W(u) = u^2$ приведены численные результаты решения задач минимизации расхода энергии.

В заключение приведены

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ:

1. Дан способ покрытия строго внутренности выпуклых компактных тел смежными симплексами. Доказано существование такого покрытия внутренности строго выпуклого компактного тела симплексами, у которых все вершины лежат на границе тела.

2. Разработаны численные методы решения линейной задачи оптимального быстродействия, основанные на построении последовательности смежных симплексов $\{\sigma_k\}$, каждый из которых входит в покрытие внутренностей областей достижимости $R(T_k)$ смежными симплексами. При достаточно общих предположениях доказана глобальная сходимость методов.

3. Разработан численный метод решения задачи оптимального по быстродействию перевода линейной системы на заданный выпуклый компакт *G*. Доказана глобальная сходимость метода.

4. Разработан численный метод решения линейной задачи минимизации расхода ресурсов и дано обобщение его на задачу с однородными выпуклыми интегральными функционалами, зависящими только от управления. В основе его лежит построение последовательности смежных симплексов. Доказана сходимость метода.

Основные публикации по теме диссертации

1. Шевченко Г.В. Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. № 8. С. 1184-1196.

2. Шевченко Г.В. Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия и его модификация// — Новосибирск, 2002. — 27 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Институт математики, № 93).

3. Shevchenko G.V. Algorithm for Solving Linear Problem of Minimizing Resources Consumption// Proceedings of the IASTED International Conference "Automation, Control, and Information Technology" ACIT 2002. Anaheim-Calgary-Zurich: ACTA Press, 2002. P. 224-229.

4. Шевченко Г.В. Оптимальный по быстродействию перевод линейной системы на выпуклый компакт// Труды XII Байкальской международной конференции "Методы оптимизации и их приложения." Иркутск: Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 2001. Т. 2. С. 191-196.

5. Шевченко Г.В. Линейная задача оптимального управления с выпуклым однородным функционалом// Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. № 3. С. 757-763.

6. Шевченко Г.В. Задача оптимального перевода на выпуклый компакт с выпуклым однородным функционалом// Труды 11-ой Байкальской Международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск: Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 1998. Т. 2. С. 132-135.

7. Shevchenko G.V. Algorithm of Optimal Time Moving of a Linear System to the Convex Compact// Proceedings of International Workshop "Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization". Chelyabinsk: Chelyabinsk State University, 1998. P. 188-190.

8. Шевченко Г.В. Итерационный метод решения линейной задачи минимизации расхода топлива// Оптимизация, управление, интеллект. Иркутск: Ир. ВЦ СО РАН, 1997. № 2. С. 61-66.

9. Shevchenko G.V. Optimal time moving to the convex compact// Abstracts of International Conference honoring academician Sergei K. Godunov "Mathematics in Applications". Novosibirsk: S.L. Sobolev Insnitute of Mathematics Publisher, 1999. P. 132-135.

10. Шевченко Г.В. Итерационный метод решения линейной задачи минимизации расхода топлива// Тезисы докладов 10-й Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск: Сибирский энергетический институт СО РАН, 1995. С. 223-224.